УДК 336.32

О. В. Дащенко,
виконавчий директор з питань готівкового обігу,
Національний банк України

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗАМІНИ НОМІНАЛІВ КУПЮР

У статті запропоновано економіко-математичну модель для прогнозування обсягів введення в обіг і виведення з обігу готівки у розрізі окремих номіналів.

The article analyses the economic-mathematical model for prognostication of cash introduction and cash withdrawal volumes in the context of separate face-values.

Ключові слова: банкноти, готівка, модель, оптимальна стратегія, гравець.
Key words: banknotes, cash, model, optimal strategy, player.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема заміни старих купюр новими є актуальним практичним завданням і вимагає невідкладного рішення. При рішенні цієї проблеми велику роль відіграє прогноз необхідного обсягу випуску готівки, який дозволяє підтримувати обіг готівки на рівні, що забезпечує нормальне функціонування економіки.

Такий прогноз випуску готівки є найважливішою складовою процесу організації розроблення та виробництва знаків грошової одиниці України [1]. У Національному банку України прогнозні розрахунки здійснюються на підставі Прогнозу основних макроекономічних показників економічного і соціального розвитку України на відповідний рік, Проекту Основних прогнозних макроекономічних показників економічного і соціального розвитку України до 2015 року, а також прогнозних даних Департаменту монетарної політики та Департаменту платіжних систем.

Аналіз останніх публікацій та досліджень свідчить, що у вітчизняній науковій літературі проблеми моделювання та прогнозування готівкового грошового обігу майже не відображено. Лише окремі аспекти знайшли відображення в роботах Малюкова В.П., Міщенка В.І. та Міщенко С.В.

Метою статті є аналіз обґрунтування економіко-математичної моделі для прогнозування обсягів введення в обіг і виведення з обігу готівки у розрізі окремих номіналів.

ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ НАУКОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

З метою оперативного розв'язання кола питань, що мають місце, Правлінням Національного банку України було схвалено Концепцію удосконалення роботи з готівкою в Україні на 2008—2012 роки, мата якої полягає у визначенні оптимальних обсягів готівки, необхідних для потреб економіки та впровадженні новітніх технологій у роботі з готівкою [7].

Відповідно до Концепції, удосконалення прогнозу готівкового обігу з використанням елементів математичного моделювання є одним з головних завдань. У зв'язку з цим відзначимо, що корисним є економіко-математичне моделювання процесу заміни старих купюр новими — у випадках деномінації або заміни старих купюр.

Запропонована модель дозволяє зробити прогноз обсягів готівки, що складається з нових банкнот заданих номіналів, яку необхідно ввести в обіг для того, щоб ліквідовувати дефіцит готівки у разі, коли обсяги готівки, що складається зі старих банкнот заданих номіналів, які виводяться з обігу, задані та навпаки. Крім того, модель дозволяє визначити структурне співвідношення по номіналах банкнот — тих, що вводяться в обіг та виводяться з обігу, при якому процес заміни старих банкнот новими буде збалансованим.

Для визначення величини готівки, що складається з нових банкнот заданих номіналів, які необхідно ввести в обіг для того, щоб ліквідувати дефіцит готівки, який виникає у випадку виведення старих банкнот із обігу, запропоновано наступний підхід. Проведемо таку формалізацію. Спочатку задамо планові величини обсягів готівки, що виводиться із обігу і вводиться в обіг. Нехай T — кількість планових періодів процедури введення-виведення готівки, x(0) — готівка, що вводиться в обіг на плановому періоді [0,T]; y(0) — готівка, що виводиться із обігу на плановому періоді [0,T]. Задана структура готівки, що вводиться в обіг і виводиться із обігу по номіналах банкнот. Позначимо через $\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_M$ — частки банкнот *i*-го номіналу готівки, що вводиться в обіг, а через $\beta_1,\ldots,\beta_j,\ldots,\beta_K$ — частки банкнот *j*-го номіналу, що виводиться із обігу.

Передбачається, що для введення в обіг однієї банкноти *i*-го номіналу необхідно вивести з обігу γ_{i1} банкнот 1-го номіналу (величина номіналу рівна n_1), γ_{ij} банкнот *j*-го номіналу (величина номіналу дорівнює n_j), γ_{iK} банкнот K-го номіналу (величина номіналу дорівнює n), тобто величина, рівна сумі $\gamma_{i1} n_1 + \ldots + \gamma_{ij} n_j + \ldots + \gamma_{iK} n_K$ характеризує кількість банкнот різних номіналів, що "йдуть" на заміну однієї банкноти і-го номіналу.

Тоді, якщо величина α_i x(0) — величина готівки, що складається із банкнот і-го номіналу і яка вводиться в обіг, то для її введення потрібно вивести із обігу величину $\alpha_i\ x(0)*[\gamma_{i1} n_1 +.+ \gamma_{ij} n_j +.+ \gamma_{iK} n_K]/n_i$ готівки, що складається з банкнот K номіналів. Якщо x(0) — величина готівки, яка вводиться в обіг, що складається з банкнот M-номіналів, то для її введення потрібно вивести із обігу величину

$$x(0)*\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\,[\gamma_{i1} n_1 + \ldots + \gamma_{ij} n_j + \ldots + \gamma_{iK} n_K]/n_i$$

готівки, що складається з банкнот K номіналів.

Передбачається, що для виведення із обігу однієї банкноти *j*-го номіналу необхідно ввести в обіг δ_{1j} банкнот 1-го номіналу (величина номіналу рівна m_1), δ_{ij} банкнот *i*-го номіналу (величина номіналу рівна m_i), δ_{Mj} банкнот M-го номіналу (величина номіналу рівна m_M), тобто величина, рівна сумі $\delta_{1j}\ m_1 + \ldots + \delta_{ij} m_i + \ldots + \delta_{Mj} m_M$ характеризує величину готівки, що вводиться в обіг, яка характеризує кількість банкнот різних номіналів, що "йдуть" на заміну однієї банкноти *j*-го номіналу.

Тоді, якщо β_j y(0) — величина готівки, що складається з банкнот *j*-го номіналу, яка виводиться з обігу, то для її виведення потрібно ввести в обіг величину $\beta_j\,y(0)*[\delta_{1j}\ m_1 + \ldots + \delta_{ij}\ m_i + \ldots + \delta_{Mj}\ m_M]/m_j$ готівки, що складається з банкнот M номіналів. Якщо y(0) — величина готівки, яка виводиться з обігу, що складається з банкнот M-номіналів, то для її виведення потрібно ввести в обіг

$y(0)*\sum_{j=1}^{K}\beta_j\,[\delta_{1j}m_1+\ldots+\delta_{ij}m_i+\ldots+\delta_{Mj}m_M]/m_j$

готівки, що складається з банкнот M номіналів.

Якщо x(0) та (y(0)) — готівка, то виконується рівність $x(0)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i m_i$;

$(y(0) = \sum_{j=1}^{K}\beta_j n_j)$.

Опишемо процедуру введення-виведення банкнот. У початковий момент часу t=0 перший гравець, що управляє процесом введення готівки в обіг, вибирає величину $u(0)\in[0,1]$ і визначає величину $u(0)*\alpha*x(0)$ (α — темп зміни величини x (готівки, що вводиться в обіг)), яку він збирається вводити в плановому періоді [0,1].

Другий гравець, що управляє процесом виведення готівки із обігу, обирає величину $v(0)\in[0,1]$ і визначає $v(0)*\beta*y(0)$ (β — темп зміни величини y — готівка, що виводиться із обігу), яку він збирається виводити в плановому періоді [0,1].

Вибір першим гравцем величини $u(0)*\alpha*x(0)$, що визначає величину введення готівки в обіг, визначить величину $u(0)*\alpha*x(0)*\sum_{i=1}^{M}\alpha_i[\gamma_{i1}n_1+\ldots+\gamma_{ij}n_j+\ldots+\gamma_{iK}n_K]/n_i$, тобто готівку, що виводиться із обігу.

Вибір другим гравцем величини $v(0)*\beta*y(0)$, що визначає величину виведення готівки із обігу, визначить $v(0)*\beta*y(0)*\sum_{j=1}^{K}\beta_j\,[\delta_{1j}m_1+\ldots+\delta_{ij}m_i+\ldots+\delta_{Mj}m_M]/m_j$ — готівка, що вводиться в обіг.

Тоді в момент часу t=1 маємо:

$$x(1)=\alpha*x(0)-u(0)*\alpha*x(0)-v(0)*\beta*y(0)*\sum_{j=1}^{K}\beta_j\,[\delta_{1j}m_1\ldots+\delta_{ij}m_i\ldots+\delta_{Mj}m_M]/m_j \quad (1)$$

$$y(1)=\beta*y(0)-v(0)*\beta*y(0)-u(0)*\alpha*x(0)*\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\,[\gamma_{i1}n_1+\ldots+\gamma_{ij}n_j+\ldots+\gamma_{iK}n_K]/n_i .$$

У момент часу t=1 можливо виконання наступних чотирьох випадків:

1) $x(1)\geq 0,\ y(1)\prec 0$;
2) $x(1)\prec 0,\ y(1)\geq 0$;
3) $x(1)\prec 0;\ y(1)\prec 0$;
4) $x(1)\geq 0;\ y(1)\geq 0$.

Якщо виконується перша умова, то процес виведення готівки закінчився, а введення готівки не закінчився. В цьому випадку вважається, що процедура введення-виведення готівки закінчилася.

Якщо виконується друга умова, то процес введення готівки закінчився, а виведення готівки не закінчився. В цьому випадку вважається, що процедура введення-виведення готівки закінчилася.

Якщо виконується третя умова, то процес і введення, і виведення готівки закінчився. В цьому випадку вважається, що процедура введення-виведення готівки закінчилася.

Якщо виконується четверта умова, то процес і введення, і виведення готівки не закінчився. В цьому випадку вважається, що процедура введення-виведення готівки продовжується далі для моментів часу $t\geq 1$. Запропонована схема управління введенням-виведенням готівки може бути вкладена у рамки схеми позиційної багатокрокової гри з повною інформацією.

У результаті рішення гри знаходяться множини переваги гравців та їх оптимальні стратегії. Їх визначення залежить від параметрів, що задають процедуру введення-виведення готівки.

Позначимо через s_1 — величину $\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\,[\gamma_{i1}n_1+\ldots+\gamma_{ij}n_j+\ldots+\gamma_{iK}n_K]/n_i$, s_2 — величину $\sum_{j=1}^{K}\beta_j\,[\delta_{1j}m_1+\ldots+\delta_{ij}m_i+\ldots+\delta_{Mj}m_M]/m_j$.

Тоді співвідношення (1) можна переписати таким чином:

$$x(1)=\alpha*x(0)-u(0)*\alpha*x(0)-s_2v(0)*\beta*y(0) \quad (1)$$

$$y(1)=\beta*y(0)-v(0)*\beta*y(0)-s_1u(0)*\alpha*x(0).$$

Вкладаючи стандартним чином запропоновану модель у рамки схеми позиційної багатокрокової гри якості з повною інформацією, одержимо рішення гри, а саме, будуть знайдені множини переваги гравців, тобто множини початкових станів, для яких існують оптимальні стратегії гравців, що приводять, або до виконання умови 1) в один з моментів часу, або до виконання умови 2) в один з моментів часу; а також — знайдені оптимальні стратегії гравців.

Інструментарій теорії ігор дозволяє визначити множини можливих початкових станів обсягів введення готівки в обіг та обсягів виведення готівки із обігу, які володіють властивістю: якщо процедура управління починається з цих станів, то в один з моментів часу можлива реалізація плану введення готівки в обіг або реалізація плану виведення готівки із обігу.

Це дає можливість отримати необхідний результат процедури управління процесом введення-виведення готівки як в обіг, так із обігу, та знайти оптимальні (раціональні) стратегії управління цією процедурою.

Для знаходження таких множин розв'язується багатокрокова гра якості з двома термінальними поверхнями, рішення якої полягає у визначенні множини можливих початкових станів обсягів введення готівки в обіг та обсягів виведення готівки із обігу, а також стратегій гравців, застосовуючи які, можливо отримання результатів, переважних для кожного гравця (реалізація плану введення готівки в обіг або реалізація плану виведення готівки з обігу).

Наведений процес реалізації процедури управління процесом введення-виведення готівки як в обіг, так із обігу розглядатиметься у рамках схеми позиційної багатокрокової гри з повною інформацією. У рамках цієї схеми процес "породжує" два завдання: з точки зору першого гравця-союзника [9—11] і з точки зору другого гравця-союзника. Унаслідок симетричності достатньо буде обмежитися розглядом однієї з них, наприклад, з точки зору першого гравця-союзника.

Позначимо через $T^* = \{0,1\ldots T\}$ дискретну множину, що характеризує область зміни тимчасового параметра. Чистою стратегією першого гравця-союзника називається функція $u\colon T^*\times R_+^2\to[0,1]$, що стану інформації (позиції) (t(x,y)) вказує значення $u(t(x,y))\in[0,1]$.

Тобто чистою стратегією першого гравця союзника є функція (правило), що стану інформації у момент часу t указує величину $u(t,(x,y))$, яка визначається величиною введення готівки в обіг на плановому періоді $[t,t+1]$. Відносно інформованості гравця-супротивника (в рамках схеми позиційної гри) ніяких припущень не робиться, що еквівалентно тому, що гравець-супротивник вибирає свою дію $v(t)$, яка визначається величиною готівки, котра виведена із обігу, на підставі будь-якої інформації.

Після визначення стратегій у завданні 1 необхідно визначити множину "переваги" W_1 для першого гравця. W_1 — множина таких початкових станів $(x(0),\ y(0))$, що є величинами обсягів готівки, яка вводиться в обіг, так і виводиться із обігу, і які володіють властивістю: для таких початкових станів існує стратегія першого гравця, котрий управляє обсягами готівки, що вводиться в обіг та виводиться із обігу, яка для будь-яких реалізацій стратегії другого гравця "приводить" стан (x(t), y(t)) в один із моментів часу t, при якому виконуватиметься умова (1). При цьому, у другого гравця не існує стратегії, яка може "привести" до виконання умов (2) або (3) в один з попередніх моментів часу. Стратегія $u_*(.,.)$ першого гравця, що володіє вказаною властивістю, називається оптимальною.

Рішення завдання 1 полягає в знаходженні множини "переваги" першого гравця та його оптимальних стратегій. Аналогічно ставиться завдання з точки зору другого гравця-союзника. Унаслідок симетричності досить обмежитися рішенням завдання 1, оскільки рішення завдання 2 знаходиться точно також.

Рішення завдання 1 знаходиться за допомогою інструментарію теорії багатокрокових ігор з повною інформацією, який дозволяє знаходити його при різних співвідношеннях параметрів гри. Наведемо рішення гри, тобто множину переваги W_1 і оптимальні стратегії першого гравця. Відзначимо таке: множина переваги W_1 є об'єднанням множин W_1^i станів $(x(0),y(0))$, котрі володіють властивістю, що якщо процедура управління обсягами готівкової грошової маси, яка вводиться й обсягами готівки, що виводиться з обігу, почнеться з них, то у першого гравця існує стратегія $u_*(.,.)$, що дозволяє йому одержати виконання умови (1) у момент часу $t=i$, як би не діяв другий гравець, причому у другого гравця існує стратегія $v_*(.,.)$, яка не дозволяє першому гравцю одержати виконання умови (1) за менший час.

Відразу відзначимо, що всі параметри, які визначають, передбачаються константами, і рішення гри знаходитиметься при цьому припущенні.

Випишемо множини W_1^i $(i \in\{1,\ldots,T\})$ і оптимальні стратегії $u_*(.,.)$ при всіх співвідношеннях параметрів гри.

1) $\alpha \le \beta$;

$W_1^i = \{ (x(0),y(0)) : k(i-1)\beta y(0) \le$
$\le s_1 \alpha x(0) < k(i-2)\beta y(0)\},\ \ i = 1,2.$

$u_* = (u_*(o,(x,y)),\ldots,u_*(t-1,(x,y)),$
$u_*(t(x,y))) = \{[1-(s_2\ \beta y)/(\alpha x)],$

при $(x,y)\in R_+^2,\ \alpha x > s_2\ \beta y$, і не визначена — в протилежному випадку; $t=0,1,.,i-1\}$.

Тут $k(i)$ визначається за рекурентною формулою: $k(i)= 1 + s_1s_2 - (s_1\alpha s_2)/(\beta k(i-1));\ \ k_{-1}= 0;\ k_0 = 1+s_1s_2;$

$$W_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_1^i.$$

Промінь $s_1\alpha x(0) = \{[1 + s_1s_2 + ((1 + s_1s_2 - 4\ s_1s_2\ \alpha/\beta)^{1/2}]/2\}\beta y(0)$ є бар'єром, тобто із станів $(x(0),y(0))$: $s_1\alpha x(0) \le \{[1 + s_1s_2\ \ +((1 + s_1s_2 - 4s_1s_2\ \alpha/\beta)^{1/2}]/2\}\beta y(0)$ перший гравець не може "примусити" другого гравця виконати план з випуску готівки в будь-який момент часу.

2) $\alpha > \beta,\ s_1s_2 \ge 1.$

В цьому випадку множина переваги першого гравця W_1 буде об'єднанням кінцевого числа множин W_1^i, а саме $(N+2)$ множин, де N: $k(i)> s_1s_2(\alpha/\beta),\ i = 0.,N-1;\ \ k(N) \le \le s_1s_2(\alpha/\beta)$

$W_1^i = \{ (x(0),y(0)) : k(i-1)\beta y(0) \le$
$\le s_1\alpha x(0) < k(i-2)\beta y(0)\},\ i=1,2,.,N+1;$

$W_1^{N+2} = \{ (x(0),y(0)) : s_1s_2\ \beta y(0) \le$
$\le s_1\alpha x(0) < k(N)\beta y(0)\}.$

Оптимальна стратегія $u_* = (u_*(o,(x,y)),\ldots,u_*(t-1,(x,y)),u_*(N+1,(x,y)))$ визначається таким чином: $u_*(0,(x,y))= \{\ 0,$ при $(x,y)\in R_+^2\ \alpha y > s_2\ \beta y$, і не визначена — в протилежному випадку}, $u_*(t,(x,y))= \{[1 - (s_2\ \beta y)/(\alpha x)]$, при $(x,y)\in R_+^2,\ \alpha y > s_2\ \beta y$, і не визначена — в протилежному випадку; $t = 0.,N+1\}$.

3) $\alpha > \beta,\ s_1s_2 < 1.$

В цьому випадку множина переваги першого гравця W_1 також буде об'єднанням кінцевого числа множин W_1^i, а саме $(N+ i_*+2)$ множин, де N: $k(i)> \alpha/\beta,\ i=0,.,N-1$; $k(N) \le \alpha/\beta$; i_* — мінімальне ціле додатне число, визначуване нерівністю: $k(N)(\alpha/\beta)^{i_*+1} < s_1s_2$.

Тоді: $W_1^i = \{ (x(0),y(0)) : k(i-1)\beta y(0) \le$
$\le s_1\alpha x(0) < k(i-2)\beta y(0)\},\ i=1,2,.,N+1$

Якщо $i_* = 0$, то $W_1^i = \{ (x(0),y(0)) :$
$: k(i-1)\beta y(0) \le s_1\alpha x(0) < k(i-2)\beta y(0)\},$
$i=1,2,.,N+1$

$W_1^{N+2} = \{ (x(0),y(0)) : s_1s_2\ \beta y(0) \le$
$\le s_1\alpha x(0) < k(N)\beta y(0)\}.$

Запис оптимальної стратегії в даному випадку такий самий, як і у разі

Якщо $i_* > 0$, то:

$W_1^{N+1+j} = \{(x(0),y(0)): k(N)(\alpha/\beta)^{j}\ \beta y(0)\le$
$\le s_1\alpha x(0) < k(N)(\alpha/\beta)^{j-1}\ \beta y(0)\},j=1,\ldots,i_*;$

$W_1^{N+i+i_*} = \{ (x(0),y(0)): s_1s_2\ \beta y(0)\le$
$\le s_1\alpha x(0) < k(N)(\alpha/\beta)^{i_*}\ \beta y(0)\}.$

Оптимальна стратегія

$u_* = (u_*(o,(x,y)),\ldots,u_*(N+1+i_*,(x,y)))$ визначається таким чином:

$u_*(t,(x,y))= \{\ 0,$ при $(x,y)\in R_+^2\ \alpha y > s_2\ \beta y$ і не визначена — в протилежному випадку, $t = 0,1.,i_*\}$,

$u_*(t,(x,y))= \{[1 - (s_2\ \beta y)/(\alpha x)]$, при $(x,y)\in R_+^2\ \alpha y > s_2\ \beta y,\ i \ge i_* + 1$, і не визначена — в протилежному випадку}.

ВИСНОВКИ

При рішенні завдань запропонованими ігровими методами в просторі змінних (x,y) знаходяться або області збалансованості, або промені збалансованості, тобто якщо процедура управління обсягами готівки, що вводяться в обіг і виводяться із обігу, починається з них, то у гравців існують стратегії, які дозволяють їм, залишатися або в області збалансованості, або на промені збалансованості. Тому, для будь-якого стану $(x(0),y(0))$ можна визначити параметри процедури, за яких цей стан знаходитиметься, або на промені збалансованості, або у області збалансованості. Це означає, що при заданих обсягах готівки, що вводяться в обіг та виводяться із обігу, можна знайти співвідношення на параметри процедури, при виконанні якої процедура управління готівкою, що вводиться в обіг і виводиться із обігу, стане рівноважною, зокрема, на параметри, котрі визначають структури готівки, яка вводиться в обіг і виводиться з обігу.

Запропонована економіко-математична модель взаємозв'язку вхідних і вихідних готівкових потоків, які мають задані структури за номіналами банкнот, дозволяє реалізувати виважену стратегію управління процесом заміни номіналів старих купюр новими.

Література:

1. Положення про порядок організації розробки і виробництва знаків грошової одиниці України // Постанова Правління Національного банку України від 24.05.2006 р. № 190.

2. Юров А.В. Пути развития наличного денежного обращения в Российской Федерации // Деньги и кредит. — 2008. — № 10. — С. 8—9.

3. Малюков В.П. Дифференциальная игра качества двух групп объектов // Прикладная математика и механика. — 1991. — Т.55. — Вып. 5. — С. 732—740.

4. Малюков В.П. Стратегия управления инвестиционным капиталом в зонах предпочтения и повышенного риска потери капитала // Финансовые риски. — 2002. — № 4.— С. 87—91.

5. Малюков В.П. Моделирование процедуры спроса и предложения на рынке продуктов и услуг // Финансовые риски. — 2007. — № 3. — С. 60—64.

6. Малюков В.П., Міщенко С.В. Обгрунтування економіко-математичної моделі для прогнозування обсягів готівкової грошової маси в обігу // Вісник Університету банківської справи Національного банку України. — 2009. — № 2 (5). — С. 190—194.

7. Концепція вдосконалення організації роботи з готівкою в Україні на 2008—2012 роки // Постанова Правління Національного банку України від 24.06.2008 р. № 177.