

УДК 519.863:338.3

О. П. Коржевська,  
аспірант, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИЧНОЇ МОДИФІКОВАНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА

О. Korzhevskaya,  
postgraduate student, Taras Shevchenko National University of Kyiv

INVESTIGATION OF THE STATIC LEONTIEF-FORD MODEL

*У роботі запропоновано статичну модифіковану еколого-економічну модель Леонтьєва-Форда, в якій враховуються забруднення від споживання продукції та матеріальні витрати на обслуговування викидів забруднювачів згідно вимог Кіотського протоколу. На основі цієї моделі побудована відповідна двоїста модель, а також еколого-економічна виробнича функція.*

*In the article static modified ecological and economic Leontief-Ford model which takes into account pollution from production consumption and material costs for maintenance contaminants emission in accordance with The Kyoto Protocol is proposed. Based on this model corresponding dual model is built. Ecological and economic production function is built.*

*Ключові слова: модель Леонтьєва-Форда, еколого-економічна виробнича функція.  
Key words: Leontief-Ford model, ecological-economic production function.*

### ПЕРЕДМОВА

Сучасна екологічна ситуація внаслідок невинно зростаючого антропогенного впливу дедалі погіршується. Забруднення навколишнього середовища відбувається протягом усіх етапів виробництва і споживання продукції. Це, в свою чергу, призводить до посилення суперечностей між інтересами екологічної та економічної систем, адже боротьба із забрудненням тісно пов'язана з матеріальними витратами на її проведення, які зростають пропорційно зі збільшенням обсягів забруднення. Якщо екологічні проблеми залишати невіршеними, то це призведе до негативних трансформацій кліматичної, економічної, соціальної та політичної систем сучасного суспільства. Тому надзвичайно актуальним є перехід до екологічно збалансованої економіки, яка повинна забезпечувати сталий розвиток шляхом реалізації відповідної державної політики.

Щоб вирішити вказані проблеми на макрорівні, необхідно дотримуватись балансу у взаємозв'язках виробництва, розподілу, споживання та нагромадження валового продукту в розрізі видів економічної діяльності та в єдності аспектів екологічного складника [1]. Заданим вимогам на рівні економіко-математичного моделювання відповідають балансові моделі.

Першою спробою дослідження взаємодії економічних та екологічних факторів виробництва була запропонована Леонтьєвим та Фордом (70-ті роки ХХ століття) міжгалузєва модель "витрати-випуск", яка на сьогодні є основою майже для усіх балансових, імітаційних та оптимізаційних еколого-економічних моделей. Вона задається системою лінійних рівнянь, що мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x^1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + y^1, \\ x^1 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 - y^2, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$  — вектор-стовпець валового випуску продукції основного виробництва;  $y^1 = (y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)^T$  — вектор-стовпець кінцевої продукції;  $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T$  — вектор-стовпець обсягів знищених забруднювачів;  $y^2 = (y_1^2, y_2^2, \dots, y_m^2)^T$  — вектор-стовпець обсягів незнищених забруднювачів (викидів забруднювачів в навколишнє середовище);  $A_{11} = (a_{ij}^{11})_{i,j=1}^n$  — квадратна матриця коефіцієнтів прямих

витрат продукції  $i$  на випуск продукції  $j$ ;  $A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$  — прямокутна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції  $i$  на знищення одиниці забруднювачів  $g$ ;  $A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$  — прямокутна матриця коефіцієнтів прямого випуску забруднювачів  $k$  під час вироблення одиниці продукції  $j$ ;  $A_{22} = (a_{kg}^{22})_{k,g=1}^{m,m}$  — квадратна матриця коефіцієнтів прямого випуску забруднювачів  $k$  під час знищення одиниці забруднювача  $g$  ( $T$  — операція транспонування вектора).

У моделі (1) всі компоненти векторів  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $y^1$ ,  $y^2$  та елементи матриць  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  вважаються невід'ємними.

На основі цієї моделі здійснюється аналіз розвитку економіки з врахуванням впливів екологічних чинників. Її використання дає змогу отримати галузєву структуру витрат на охорону навколишнього середовища, впливу їх на обсяги кінцевого та валового випуску залежно від встановленого рівня забруднення навколишнього середовища та інших показників. Також в результаті досліджень цієї моделі було побудовано виробничу функцію екологічної економіки, що функціонує як виробник продукції та як очищувач навколишнього середовища, побудовано еколого-економічну виробничу функцію значень задачі оптимального використання ресурсів (виробничу функцію з врахуванням екологічних обмежень), векторну еколого-економічну виробничу функцію [3].

Модель (1) є досить загальною і не враховує багатьох факторів. Зокрема, вона не враховує забруднення, яке виникає в процесі споживання продуктів багатьох галузей. Так, наприклад, споживання продуктів у пластмасових упаковках, використання легкових автомобілів, побутової та офісної техніки неодмінно призводить до забруднення довкілля, яке обов'язково має бути враховане при міжгалузєвому моделюванні. Дана проблема була вирішена автором шляхом додаванням в модель матриці, яка враховує створене забруднення від споживання продукції [2].

В умовах стабільного розвитку виникає необхідність подальшої модифікації моделі з урахуванням нових факторів. Оскільки екологічні проблеми є глобальними, то у світі укладаються міжнародні угоди про обмеження шкідливих викидів у атмосферу. Якщо ці вимоги потрібно виконувати, то їх необхідно

враховувати також у моделях еколого-економічної взаємодії. Однією з таких міжнародних вимог є дотримання Кіотського протоколу — міжнародної угоди про обмеження викидів в атмосферу парникових газів. Цей протокол був прийнятий як додатковий документ до Рамкової конвенції ООН зі змін клімату, підписаної 1992 року на міжнародній конференції в Ріо-де-Жанейро. Кіотський протокол почав діяти з 16 лютого 2005 року. Він зобов'язує розвинуті країни та країни з перехідною економікою скоротити або стабілізувати викиди парникових газів.

Враховуючи вищезазначені дві вимоги, в даній роботі запропонована статична модифікація моделі Леонтьєва-Форда, яка враховує як забруднення, що супроводжують споживання кінцевої продукції, так і матеріальні витрати на обслуговування викидів забруднювачів за Кіотським протоколом:

$$\begin{aligned} x^1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + y^1 + Cy^2, \\ x^2 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + Dy^1 - y^2, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $C = (c_{ig})_{i,g=1}^{n,m} \geq 0$  — прямокутна матриця витрат по Кіотському протоколу — витрати на обслуговування викидів; матриця  $D = (d_{kj})_{k,j=1}^{m,n} \geq 0$  — прямокутна матриця коефіцієнтів створення забруднювачів під час споживання одиниці кінцевої продукції  $j$ .

## МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Результати дослідження отримано на основі методів економіко-математичного моделювання, теорії невід'ємних матриць, лінійного програмування, теорії двоїстості, системного аналізу.

## РЕЗУЛЬТАТИ

З математичної точки зору, система (2) являє собою систему із двох лінійних рівнянь. Перше рівняння системи (2) — це збалансований розподіл валового випуску продукції основного виробництва  $x^1$  на витрати основного виробництва  $A_{11}x^1$ , допоміжного виробництва  $A_{12}x^2$ , кінцеве споживання  $y^1$  та витрати на обслуговування викидів згідно умов Кіотського протоколу  $Cy^2$ . Друге рівняння системи (2) відображає обсяги знищених забруднювачів  $x^2$ , як різницю між утвореним забрудненням, яке утворилось під час виробництва продукції  $A_{21}x^1$ , протягом знищення забруднювачів  $A_{22}x^2$ , а також в процесі споживання кінцевої продукції  $Dy^1$ , та незнищеним забрудненням  $y^2$ . Кінцеве споживання продукції  $y^1$  визначається ринковим попитом на продукцію. Обсяг забруднювачів, які не знищуються, визначається прийнятими стандартами якості довкілля, умовами еколого-економічної рівноваги, або встановлюються, виходячи з реальних техніко-економічних можливостей чи економічних коштів.

Якщо ввести такі позначення:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y^1 + Cy^2 \\ Dy^1 - y^2 \end{pmatrix} \quad (3),$$

то система (2) набуде вигляду класичної моделі Леонтьєва:

$$x = Ax + y \quad (4).$$

Матриця повних витрат  $A$  для моделі (2) є блочною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (5).$$

Її продуктивність не гарантує невід'ємність розв'язків системи (2), адже компоненти вектора  $y$  можуть змінюватись довільно, і тому виникають умови, що їх зв'язують.

У даній моделі вважатимемо, що друга компонента вектора недоводатня, тобто  $Dy^1 \leq y^2$ . Ввівши позначення  $y^1 + Cy^2 = \bar{y}^1$ , та  $Dy^1 - y^2 = -\bar{y}^2$ , модель (2) перетвориться у модель (1) зі змінними  $x^1 \geq 0$ ,  $x^2 \geq 0$ ,  $\bar{y}^1 \geq 0$ ,  $\bar{y}^2 \geq 0$ . Умови існування невід'ємних розв'язків для цієї моделі досліджено у монографії [4, с. 24—27]. Отриманий результат математично був названий теоремою про існування невід'ємних розв'язків. Ця теорема з'ясовує умови, за яких будуть існувати невід'ємні розв'язки для системи (1). Крім цього, у монографії описані методи практичного одержання даних невід'ємних розв'язків [4, с. 27—32].

Аналогічно визначимо умови існування невід'ємних розв'язків для моделі (2). Розглянемо вирази для  $x^1$  та  $x^2$ . Бачимо, що  $x^1 = (E_1 - A_{11})^{-1}(A_{12}x^2 + y^1 + Cy^2)$ . Таким чином, якщо  $x^2 \geq 0$ , то при  $y^1 > 0, y^2 \geq 0$  автоматично виконуватиметься умова  $x^1 \geq 0$ .

Отже, необхідною і достатньою умовою невід'ємності розв'язків модифікованої моделі Леонтьєва-Форда при продуктивності матриці (5) при  $y^1 > 0, y^2 \geq 0$  буде умова  $x^2 \geq 0$ .

Для визначення достатньої умови невід'ємності розв'язків системи (2) розглянемо її розв'язок у явному вигляді:

$$\begin{aligned} x^1 &= (E_1 - A_1)^{-1}[(y^1 + Cy^2) - A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}(y^2 - Dy^1)], \\ x^2 &= (E_2 - A_2)^{-1}[A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}(y^1 + Cy^2) - (y^2 - Dy^1)], \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21} \quad (7),$$

$$A_2 = A_{22} + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12} \quad (8).$$

Достатньою умовою невід'ємності розв'язків даної модифікованої статичної моделі (2) при продуктивності блочної матриці (5) та при умові  $y^1 > 0, y^2 \geq 0$  є умова:

$$y_2 \leq (A_{21} + D)y_1 + A_{21}Cy_2 \quad (9),$$

яка означає, що основне та допоміжне виробництва будуть функціонувати, якщо обсяги незнищуваних забруднювачів  $y_2$  не перевищує повного випуску забруднювачів, що виникають при виготовленні та споживанні кінцевої продукції  $y_1$ , а також при виготовленні продукції, що обслуговує Кіотський протокол.

Далі запропонуємо таку модель оптимального використання ресурсів для економіки, що враховує екологічну складову:

$$\begin{aligned} F &= c^1 y^1 - c^2 y^2 \rightarrow \max, \\ x^1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + y^1 + Cy^2, \\ x^2 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + Dy^1 - y^2, \\ B_1 x^1 + B_2 x^2 &\leq R, \\ x^1 &\geq 0, x^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

У даній моделі (8) змінні  $x^1, x^2, y^1, y^2$  та матриці  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, C, D$  аналогічні відповідним змінним та матрицям моделі (2). У (10) введено вектор-рядок цін кінцевої продукції  $c^1 = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_n^1) > 0$  та вектор-рядок цін незнищених забруднювачів  $c^2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_m^2) > 0$ , матрицю витрат  $q$ -го економічного ресурсу на виробництво одиниці  $i$ -ї продукції  $B_1 = (b_{qi}^1)_{q,i=1}^{l,n} \geq 0$ , матрицю витрат  $q$ -го економічного ресурсу на знищення одиниці  $k$ -го забруднювача  $B_2 = (b_{qk}^2)_{q,k=1}^{l,m} \geq 0$  та вектор-стовпчик наявних матеріальних ресурсів для виробничого процесу  $R = (R_1, R_2, \dots, R_l)^T$ .

Економічний зміст задачі оптимального використання ресурсів (10) полягає у максимізації доходу виробництва від споживання випуску продукції, частина якого йде на обслуговування викидів згідно умов Кіотського протоколу, із врахуванням від нього витрат на знищення забруднень, які виникають в процесі споживання продукції, та забруднень, які залишаються незнищеними. При цьо-

му, ресурси на виробництво продукції та на знищення забруднень є обмеженими. Це обмеження відображає вектор наявних матеріальних ресурсів для виробничого процесу  $R$ . Накладення умов невід'ємності на змінні  $x^1, x^2$  показує незворотність процесів у виробництві. При цьому, вважатимемо  $y^1, y^2$  вільними змінними.

Визначимо змінні  $y^1, y^2$  з системи (2). Отримаємо:

$$\begin{aligned} y^1 &= (E_1 - A_{11})x^1 - A_{12}x^2 - C(E_2 + DC)^{-1}[(A_{21} + D(E_1 - A_{11}))x^1 - (E_2 - A_{22} + DA_{12})x^2], \\ y^2 &= (E_2 + DC)^{-1}[(A_{21} + D(E_1 - A_{11}))x^1 - (E_2 - A_{22} + DA_{12})x^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

З урахуванням (11) модель (10) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} F &= [c^1(E_1 - A_{11}) - (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11}))]x^1 + \\ &+ [-c^1A_{12} + (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12})]x^2 \rightarrow \max, \\ B_1x^1 + B_2x^2 &\leq R, \\ x^1 \geq 0, x^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Як відомо з теорії двоїстості, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу, двоїсту до неї. Економічний зміст побудови двоїстої задачі до даної задачі (12) полягає у знаходженні цін на ресурси  $p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$  у такий спосіб, щоб мінімізувати витрати на їх придбання, при цьому враховуючи задані ціни на одиницю кінцевої продукції  $c^1 = (c^1_1, c^1_2, \dots, c^1_n)$ , а також ціни на одиницю незнищених забруднювачів  $c^2 = (c^2_1, c^2_2, \dots, c^2_m)$ .

Побудуємо двоїсту задачу до моделі (12):

$$\begin{aligned} pR &\rightarrow \min, \\ pB_1 &\geq c^1(E_1 - A_{11}) - (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11})), \\ pB_2 &\geq -c^1A_{12} + (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12}), \\ p &\geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$  — вектор-рядок двоїстих оцінок економічних ресурсів  $R$  (вектор цін ресурсів). У задачах параметричного лінійного програмування (12) і (13) на оптимальних розв'язках  $x^{1*}(R), x^{2*}(R), p^*(R)$  значення цільових функцій прямої і двоїстої задачі рівні між собою і виконуються умови доповнюючої нежорсткості [5]:

$$\begin{aligned} F(R) &= [c^1(E_1 - A_{11}) - (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11}))]x^{1*}(R) + \\ &+ [-c^1A_{12} + (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12})]x^{2*}(R) = p^*(R) \cdot R, \\ [pB_1 - c^1(E_1 - A_{11}) - (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11}))] \cdot x_i^* &= 0, i = \overline{1, m}, \\ [pB_2 - (-c^1A_{12} + (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12}))] \cdot x_j^* &= 0, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Звідси отримуємо наступне:

якщо

$$\begin{aligned} c^1((E_1 - A_{11}) - C(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11}))) < \\ < c^2(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11})) \end{aligned} \quad (15),$$

то  $x^{1*}(R) \equiv 0$ ;

якщо

$$\begin{aligned} c^1(A_{12} - C(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12})) > c^2(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12}), \\ \text{то } x^{2*}(R) \equiv 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Економічний зміст цих умов досить прозорий. Достатня умова того, що виробництво працювати не буде — це виконання умови (15). Ця умова, в свою чергу, виконується, коли  $c^1 \ll c^2$ , тобто в наявності пріоритети на очищення середовища. Іншими словами, основне виробництво працювати не буде, якщо вартісні збитки від забруднювачів, що випускаються і від забруднення навколишнього середовища під час споживання продукції перевищують вартість витрат ресурсів для випуску цієї продукції і для обслуговування викидів згідно Кіотського протоколу.

Достатня умова (16), що означає припинення роботи очисних споруд, виконується, коли  $c^1 \gg c^2$ , тобто коли пріоритетним є виробництво продукції. Це означає, що відбувається економія коштів на знищенні забруднювачів. У свою чергу, це призводить до погіршення якості знищення забруднювачів (наприклад, очисний процес пришивається, використовується замі-

на матеріалів очисних споруд, проводяться несанкціоновані викиди забруднювачів та інше).

Спробуємо дослідити максимально можливий випуск продукції при заданих обмежених ресурсах. Для цього побудуємо виробничу функцію. Виробнича функція пов'язує фізичний випуск продукції виробничого процесу із вхідними факторами виробництва. Математично — це є функція, яка показує практично можливий максимум випуску продукції за певної можливої комбінації вхідних ресурсів. Є різні підходи до побудови виробничих функцій та видів, у яких вона може бути представлена. У екологічній економіці використовують виробничу функцію Леонтьєва, що описує ситуацію, коли всі вхідні ресурси беруться у певній фіксованій пропорції. Якщо використання одного з ресурсів зростає без зростання використання іншого ресурсу, вихідний результат не зміниться. Виробнича функція Леонтьєва задається таким виразом:  $Q = \min\{aX_1, bX_2, \dots\}$ .

Визначимо алгоритм побудови виробничої функції  $F(R)$  для системи (10). Він полягає у знаходженні всіх нетривіальних опорних розв'язків  $P^*, P^{2*}, \dots, P^{s*}$  розширеної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} pB_1 - \mu &= c^1(E_1 - A_{11}) - (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(A_{21} + D(E_1 - A_{11})), \\ pB_2 - \nu &= -c^1A_{12} + (c^1C + c^2)(E_2 + DC)^{-1}(E_2 - A_{22} + DA_{12}), \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \geq 0$  і  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \geq 0$  вектори доповнюючих змінних.

Розв'язки системи (17) дадуть змогу в явному вигляді написати виробничу функцію екологічної економіки:

$$F(R) = \min\{p^{1*}R, p^{2*}R, \dots, p^{s*}R\}. \quad (18)$$

Після цього знаходяться функції завантаженості виробництва  $x^{1*}(R)$  та очисних споруд  $x^{2*}(R)$ , а також обсяги кінцевої продукції і викидів забруднювачів у навколишнє середовище  $y^{2*}(R)$  (незнищених забруднювачів).

Наведений вище алгоритм знаходження виробничої функції може бути застосований при проектуванні інформаційної системи підтримки прийняття рішень на підприємстві. Автоматизація цього процесу дасть можливість визначити оптимальний шлях розподілу використання ресурсів на виробничі цілі та боротьбу з викидами забруднювачів в навколишнє середовище, врахувавши при цьому забруднення, які створюються у процесі споживання виготовленої кінцевої продукції, а також витрати, необхідні для обслуговування викидів згідно умов Кіотського протоколу.

## ВИСНОВКИ

Таким чином, у роботі запропонована модифікація міжгалузевої еколого-економічної моделі Леонтьєва-Форда. Одержані умови існування розв'язків даної моделі. Побудована двоїста модель цін продукції та вартостей знищення забруднювачів. Розроблено методика побудови еколого-економічних виробничих функцій та їх використання для розв'язання ряду прикладних задач.

## Література:

1. Онищенко А.М., Мостинець В.С. Магістральні траєкторії прямої та двоїстої динамічної моделі Леонтьєва-Форда // Науковий вісник Київського національного технічного університету. Серія: Економіка. — 2010. — № 1. — С. 154—159.
2. Хрущ А.З., Коржевська О.П. Розширення міжгалузевої еколого-економічної моделі Леонтьєва — Форда // "БізнесІнформ". — 2012. — № 3. — С. 75—78.
3. Ляшенко І.М. Виробничі функції екологічної економіки / І.М. Ляшенко, А. З. Хрущ // Dynamical system modelling and stability investigation: international conference, May 22—25, 2007: thesis of conference reports. — К., 2007. — С. 211.
4. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку / Ляшенко І.М. — К.: Вища школа, 1999. — 236 с.
5. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование / [Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З.] / под общ. ред. И. Н. Ляшенко. — К.: Вища школа, 1975. — 372 с.

Стаття надійшла до редакції 23.05.2013 р.