

УДК 621.3.01;621.315

П. Я. ПРИДУБКОВ, канд. техн. наук, доцент

Українська державна академія залізничного транспорту, м. Харків

І. В. ХОМЕНКО, канд. техн. наук, доцент

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

**ДОСЛІДЖЕННЯ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ЛІНІЙНОГО ТРАНСФОРМАТОРА**

*Выявлено не соответствие известных схем замещения линейного трансформатора его электромагнитным процессам, проведен анализ преобразования энергии в трансформаторе в соответствии с общей теорией Умова. Определена система уравнений, описывающих электромагнитные процессы линейного трансформатора, установлена схема, соответствующая данным уравнениям.*

*Виявлена не відповідність відомих схем заміщення лінійного трансформатора його електромагнітним процесам, проведено аналіз перетворення енергії в трансформаторі відповідно до загальної теорії Умова. Визначена система рівнянь, що описують електромагнітні процеси лінійного трансформатора, встановлена схема, відповідна даним рівнянням.*

**Вступ**

Трансформатор є найважливішим елементом у схемах електропостачання й відіграє роль проміжної ланки між генераторами й приймачами електричної енергії. У найпростішому випадку трансформатор складається із двох електрично не з'єднаних, нерухомих відносно один одного, індуктивно зв'язаних між собою обмоток. Потік взаємної індукції зростає, якщо обмотки намотані на феромагнітний сердечник, але це може привести до нелінійної залежності між величиною магнітного потоку й струмом обмоток. Властивості такого трансформатора будуть нелінійними і тому при синусоїдальній прикладеній напрузі струм у трансформаторі може бути несинусоїдальним. Помітне відхилення струму від синусоїдального спостерігається тільки в режимах близьких до холостого ходу. У режимах навантаження ці відхилення настільки незначні, що ними можна знехтувати й вважати трансформатор зі сталевим сердечником лінійним елементом кола.

Втім, у вимірювальних пристроях, використовуваних, у тому числі, і в системах енергопостачання, сердечники трансформаторів перебувають у лінійному режимі, а при високих частотах застосовують і повітряні трансформатори, тобто не утримуючі феромагнітних сердечників. Такі трансформатори мають лінійні характеристики, і процеси в них можуть бути описані лінійними рівняннями. Тому основні риси робочого режиму виявляються при розрахунках, що припускають лінійність.

Велике практичне значення має схема заміщення даних трансформаторів, складена для приведених струмів і напруг відповідно з еквівалентним колом, що не містить індуктивно зв'язаних елементів. Однак електрична схема без індуктивних зв'язків, описувана у відповідних розділах теорії лінійних електричних кіл [1, 3, 4], не адекватна процесам, що відбуваються в лінійному трансформаторі. Дана схема є простою електричною схемою, тому напрямки струмів у її вітках повинні відповідати напрямку діючій на вході трансформатора напруги. Якщо виконується ця відповідність [4], то рівняння, складене по другому закону Кірхгофа для вторинної обмотки трансформатора, не рівнозначно аналогічному рівнянню, що описує електромагнітні процеси вихідного контуру еквівалентної схеми без індуктивних зв'язків. Це обумовлено тим, що в останнім рівнянні знак падіння напруги, що врівноважує е. р. с. взаємоіндукції, не відповідає знаку даної е. р. с. В іншому випадку [3], в еквівалентній схемі напрямок струму, що протікає через вітку, що містить навантаження, протилежний дії вхідної напруги.

Уточнення еквівалентної схеми лінійного трансформатора без індуктивних

зв'язків, тобто усунення вище зазначених недоліків, дозволить підвищити ефективність розробок електротехнічних пристроїв, тому що при цьому виключається невідповідність даної схеми електромагнітним явищам, що відбуваються в лінійному трансформаторі.

### Основна частина

Відповідно до закону збереження енергії в просторі, де не відбувається механічна робота з переміщення заряджених провідних тіл і провідних контурів зі струмами, енергія, що доставляється у вигляді потоку вектора Пойнтинга усередину деякого об'єму, перетворюється усередині цього простору в тепло і йде на збільшення енергії електромагнітного поля [5]. Енергетичні співвідношення електромагнітного поля описує теорема Умова - Пойнтинга:

$$-\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV, \quad (1)$$

де:  $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$  – вектор Пойнтинга;

$\int_V \gamma E^2 dV$  – енергія, що виділяється у вигляді теплоти в одиницю часу в об'ємі  $V$  ;

$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$  – швидкість зміни запасу електромагнітної енергії.

Трансформатор є електростатичним пристроєм, що містить не менш двох електрично не з'єднаних, нерухомих відносно один одного, індуктивно зв'язаних між собою обмоток. Енергія з первинної обмотки у вторинну обмотку передається за допомогою магнітного поля, створюваного струмами цих обмоток. Аналіз процесу перетворення енергії в трансформаторі ґрунтується на загальній теорії Умова, що відповідає закону збереження енергії й уявленням про її фізичну реалізацію: якщо усередині деякого об'єму відбувається зміна енергії, то через замкнуту поверхню, що охоплює даний об'єм, повинен пройти потік енергії, рівний цій зміні. Швидкість зміни даного потоку характеризується вектором Пойнтинга  $\vec{P}$ .

Напрямок вектора Пойнтинга  $\vec{P}_1$  на початку двохпровідної лінії, з'єднаної з витками первинної обмотки трансформатора визначається векторами напруженостей  $\vec{E}_1$  і  $\vec{H}_1$  електромагнітного поля на вході трансформатора. Він збігається з напрямком руху вістря правого гвинта, якщо останній обертати по найкоротшому напрямку від  $\vec{E}_1$  до  $\vec{H}_1$ . Картина поля векторів  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_2$ ,  $\vec{P}_2$  для вторинної обмотки трансформатора й двохпровідної лінії, що відходить від цієї обмотки, визначається аналогічно. Потік електромагнітної енергії, що надходить у первинну обмотку трансформатора, передається у вторинну обмотку за допомогою магнітного поля, створюваного струмами цих обмоток.

Якщо обмотки перебувають у магнітному середовищі, для якого  $\mu_a = const$ , (лінійний трансформатор), енергія їхнього магнітного поля визначається за допомогою наступного виразу [2]:

$$W_M = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV,$$

де:  $\vec{H}$  – напруженість результуючого магнітного поля, створюваного струмами  $i_1$  первинної й  $i_2$  вторинної обмоток трансформатора.

Тому що залежність  $\vec{B} = f(\vec{H})$  для магнітного кола розглянутого трансформатора лінійна ( $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ ), то дане коло є лінійним й при його розрахунку може бути використаний принцип суперпозиції.

Відповідно до принципу суперпозиції, результуючий вектор  $\vec{H}$  напруженості магнітного поля трансформатора може бути визначений як результат додавання вектора напруженості  $\vec{H}_1$  магнітного поля, створюваного струмом первинної обмотки, і вектора  $\vec{H}_2$  напруженості магнітного поля, створюваного струмом, що протікає через вторинну обмотку (відповідно до закону повного струму). Тобто:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint \vec{H}_1 d\vec{l} + \oint \vec{H}_2 d\vec{l}.$$

Таким чином:

$$\frac{d}{dl} \oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dl} \left( \oint \vec{H}_1 d\vec{l} + \oint \vec{H}_2 d\vec{l} \right),$$

або:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

У такий спосіб:

$$H^2 = (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)^2 = H_1^2 + 2\vec{H}_1\vec{H}_2 + H_2^2,$$

Отже, енергія магнітного поля лінійного трансформатора буде дорівнювати:

$$W_M = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H_1^2}{2} dV + \int_V \mu_a \vec{H}_1 \vec{H}_2 dV + \int_V \frac{\mu_a H_2^2}{2} dV. \quad (2)$$

Перший і останній члени правої частини рівності (2) це власні магнітні енергії струмів відповідно первинної й вторинної обмоток, а другий член – взаємна магнітна енергія даних струмів.

Швидкість зміни магнітної енергії (потужності), що запасється в магнітному полі двох індуктивно зв'язаних обмоток описується виразом:

$$\frac{dW_M}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{\mu_a H_1^2}{2} dV + \int_V \mu_a \vec{H}_1 \vec{H}_2 dV + \int_V \frac{\mu_a H_2^2}{2} dV \right). \quad (3)$$

Потужності, переданої з первинної обмотки трансформатора у вторинну, відповідає другий доданок останньої рівності.

У випадку гармонічного поля й лінійного середовища, що має місце при синусоїдальному джерелі живлення, що діє на вході лінійного трансформатора, вище зазначена потужність може бути представлена в комплексній формі:

$$\frac{dW_{M12}}{dt} = j\omega \int_V \mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2^* dV + j\omega \int_V \mu_a \dot{\vec{H}}_2 \dot{\vec{H}}_1^* dV,$$

де:  $\dot{\vec{H}}_1^*$  і  $\dot{\vec{H}}_2^*$  – комплексно сполучені вектори напруженості магнітних полів, створюваних струмами відповідно первинної й вторинної обмоток.

Тому що електромагнітні процеси розглядаються в лінійному трансформаторі, тобто в однорідному магнітному середовищі, то при заданій конфігурації провідників комплексні вектори напруженостей магнітного поля  $\dot{\vec{H}}_1$  й  $\dot{\vec{H}}_2$  пропорційні комплексам струмів  $\dot{I}_1$  і  $\dot{I}_2$ , що протікають у первинній і вторинній обмотках відповідно. Тому комплексна потужність, формована індуктивно зв'язаними обмотками, може бути представлена як:

$$\tilde{S}_{M12} = j\omega M \dot{I}_1 I_2^* + j\omega M \dot{I}_2 I_1^* = \tilde{S}_{2M} + \tilde{S}_{1M}, \quad (4)$$

де:  $M$  – взаємна індуктивність обмоток трансформатора;

$\dot{I}_1, \dot{I}_2$  – комплекси струмів первинної й вторинної обмоток;

$\tilde{S}_{1M}$  і  $\tilde{S}_{2M}$  – комплексні потужності, обумовлені взаємною індукцією й передані з первинної обмотки у вторинну й навпаки. Причому:

$$\tilde{S}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2 I_1^* = j\omega M I_2 I_1 e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = P_{1M} + jQ_{1M},$$

$$\tilde{S}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1 I_2^* = j\omega M I_1 I_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = P_{2M} + jQ_{2M}.$$

Активні складові комплексних потужностей  $\tilde{S}_{1M}$  і  $\tilde{S}_{2M}$ :

$$P_{1M} = \text{Re}\left\{j\omega M \dot{I}_2 I_1^*\right\} = -\omega M I_2 I_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$P_{2M} = \text{Re}\left\{j\omega M \dot{I}_1 I_2^*\right\} = -\omega M I_1 I_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тому що  $\pi > \varphi_1 > 0$ , і  $\varphi_1 > \varphi_2$ , то  $P_{1M} > 0$ , а  $P_{2M} < 0$ , що відповідає передачі енергії з первинної обмотки трансформатора у вторинну.

У відповідності із другим законом Кірхгофа рівняння, що описує електричні процеси у вторинній обмотці трансформатора (рис. 1), може бути представлено наступним виразом:

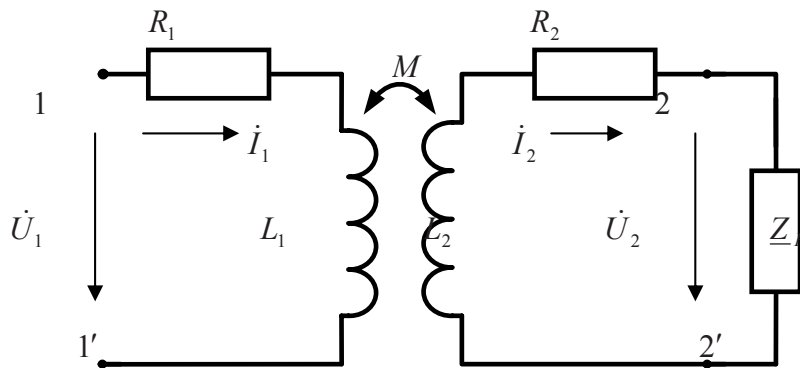


Рис. 1. Обмотки трансформатора

$$-j\omega M \dot{I}_1 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2, \quad (5)$$

де:  $R_2$  і  $L_2$  – активний опір і індуктивність вторинної обмотки трансформатора;

$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H$  – напруга на виході трансформатора, на навантаженні;

$Z_H = R_H \pm jX_H$  – комплексний опір навантаження.

Отже,

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \frac{R_2 + R_H + j(\omega L_2 \pm X_H)}{-j\omega M} = \dot{I}_2 \frac{R_{22} \pm jX_{22}}{Z_M} = \dot{I}_2 \frac{Z_{22} e^{j\varphi_{22}}}{Z_M e^{-j90^\circ}} = \dot{I}_2 K e^{j(\varphi_{22} + 90^\circ)}, \quad (6)$$

де:  $Z_{22} = R_{22} \pm jX_{22}$  – комплексний опір вторинної обмотки з урахуванням опору навантаження;

$K = \frac{Z_{22}}{Z_M}$  – коефіцієнт пропорційності модулів опорів  $Z_{22}$  і  $Z_M$ ;

$\varphi_{22} = \arctg \frac{\pm X_{22}}{R}$  – аргумент комплексного опору  $Z_{22}$ .

Причому,  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi_{22} \geq -\frac{\pi}{2}$ , тому струм  $\dot{I}_1$  випереджає струм  $\dot{I}_2$  вторинної обмотки на кут  $\varphi$ . Цей кут лежить у межах  $0 \geq \varphi \geq \pi$ , тому що  $\varphi = \varphi_{22} + \frac{\pi}{2}$ . Таким чином,  $P_{1M} > 0$ , а  $P_{2M} < 0$ .

Припливу енергії відповідає позитивне значення активної складової комплексної потужності, обумовленою взаємною індукцією (потужність  $P_{1M}$ ), а передачі енергії – негативне значення (потужність  $P_{2M}$ ), отже, енергія передається в магнітне поле через первинну обмотку й повертається назад через вторинну.

Струм  $i_1$ , що протікає в первинній обмотці трансформатора, створює магнітний потік  $\Phi_1$ , що частково замикається, минаючи вторинну обмотку ( $\Phi_{11}$ ), і частково проходить через неї ( $\Phi_{12}$ ). У вторинній обмотці відповідно до закону електромагнітної індукції наводиться е. р. с., що створює струм  $i_2$ . Даний струм викликає магнітний потік  $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$ , що пронизує як вторинну, так і первинну обмотки, причому, його напрямок протилежно  $\Phi_1$ . Таким чином, в обох обмотках індукуються протилежні по напрямку е. р. с. взаємоіндукції: у первинній –  $e_{1M}(t) = -M \frac{di_2}{dt}$ , і у вторинній –  $e_{2M}(t) = -M \frac{di_1}{dt}$ . Е. р. с.  $e_{2M}(t)$  обумовлена дією вхідної напруги на вторинну обмотку трансформатора, у той час як  $e_{1M}(t)$  є реакцією вторинної обмотки на дію вхідної напруги. Тому результуюча е. р. с. взаємоіндукції визначається різницею даних е. р. с.:

$$e_M(t) = e_{2M}(t) - e_{1M}(t) = -M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

де:  $M$  – взаємна індуктивність обмоток трансформатора.

В останній формулі е. р. с. взаємоіндукції  $e_{2M}(t)$  взята із плюсом, а  $e_{1M}(t)$  – з мінусом, тому що енергія з первинної обмотки передається у вторинну.

Комплексна форма запису результуючої е. р. с. взаємоіндукції:

$$\dot{E}_M = -j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{E}_{12M} - \dot{E}_{21M}. \quad (7)$$

У такий спосіб:

$$\dot{E}_M = -j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2), \quad (8)$$

де:  $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{I}_\mu$  – струм, що створює (результуючий) магнітний потік, що здійснює передачу енергії з первинної обмотки у вторинну.

Рівняння, що відповідає другому закону Кірхгофа для первинної обмотки, має вигляд:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + j\omega M \dot{I}_2, \quad (9)$$

де:  $\dot{U}_1$  – напруга на вході первинної обмотки трансформатора;

$R_1, L_1$  – відповідно активний опір і індуктивність первинної обмотки.

З урахуванням, що  $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_\mu$ ,  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_\mu$ , другому закону Кірхгофа для первинної й вторинної обмоток, будуть відповідати наступні вирази.

Для первинної:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_\mu)$$

або

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 + j\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_\mu, \quad (10)$$

для вторинної:

$$-j\omega M(\dot{I}_2 + \dot{I}_\mu) = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2$$

або

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_\mu + \dot{U}_2. \quad (11)$$

Таким чином, електромагнітні процеси, що відбуваються в лінійному трансформаторі, описуються наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{I}_\mu = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \\ \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \\ 0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 - j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \dot{U}_2 \end{cases}$$

Даній системі рівнянь відповідає електрична схема, що не містить індуктивно зв'язаних елементів (рис. 2).

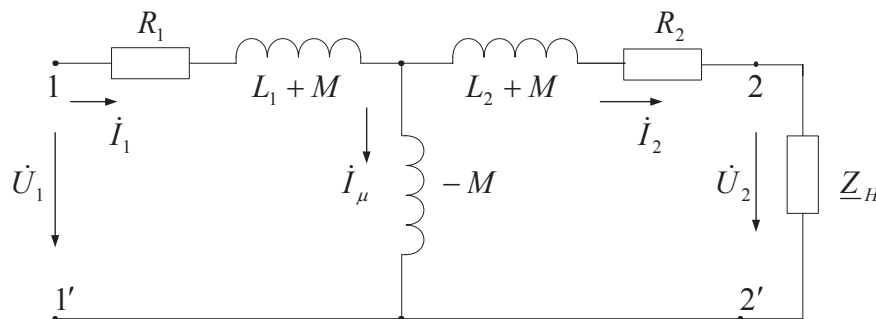


Рис. 2. Електрична схема без індуктивно зв'язаних елементів

Відповідно до наведеної схеми (рис. 2) струм  $\dot{I}_2$  може бути виражений через струм  $\dot{I}_1$  на підставі правила розкиду струмів:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H},$$

або

$$-j\omega M\dot{I}_1 = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + \dot{U}_2. \quad (12)$$

Останній вираз відповідає рівнянню (5), складеному по другому закону Кірхгофа для вторинної обмотки лінійного трансформатора.

### Висновки

Таким чином, схема заміщення лінійного трансформатора (еквівалентна схема без індуктивних зв'язків) рис. 2 є простою електричною схемою, причому напрямки струмів у її



вітка відповідають напрямку діючої на вході схеми напруги, крім того, рівняння, складене по другому закону Кірхгофа для вихідного контуру схеми заміщення трансформатора, рівнозначно аналогічному рівнянню, що описує електромагнітні процеси у вторинній обмотці. Отримана математична модель дозволить підвищити ефективність розробок електротехнічних пристроїв, тому що при цьому виключається невідповідність даної схеми електромагнітним явищам, що відбуваються в лінійному трансформаторі.

### Список літератури

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1984. – 559 с.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
3. Нейман Л. Р. Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Том 1. Теория линейных электрических цепей. – Л.: Энергоиздат, 1981 – 536 с.
4. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными. – М.: Энергия, 1972 – 240 с.
5. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 3. Теория электромагнитного поля. – М.: Энергия, 1969 – 352 с.

## RESEARCH OF CHART OF SUBSTITUTION OF LINEAR TRANSFORMER

P. Y. PRIDUBKOV, Cand. Tech. Sci.

I. V. KHOMENKO, Cand. Tech. Sci.

*It is exposed short of the known charts of substitution of linear transformer to his electromagnetic processes, the analysis of transformation of energy in a transformer in accordance with general to the Umov theory is conducted, the system of equalizations describing the electromagnetic processes of linear transformer is certain, a chart proper to the given equalizations is set.*

*Поступила в редакцию 27.08 2010 г.*



**Уважаемые читатели!**  
Приглашаем Вас стать подписчиками  
журнала  
«Энергосбережение • Энергетика •  
Энергоаудит»  
на 2011 год!

На страницах журнала публикуются  
статьи об актуальных проблемах  
электроэнергетики, энергорынка,  
теплоэнергетики, газоснабжения,  
водоснабжения, водоотведения и  
экономики.

Подписка с любого месяца!  
Справки по телефону 8(057) 7-149-451