УДК 621.3.01
П. Я. ПРИДУБКОВ, канд. техн. наук, доцент
Українська державна академія залізничного транспорту, г. Харьков
І. В. ХОМЕНКО, канд. техн. наук, доцент
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», г. Харьков

ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНІ ЗАЛЕЖНОСТІ РЕЧОВИННОГО СЕРЕДОВИЩА, ЩО ОПИСУЮТЬ СТАЦІОНАРНЕ ПОЛЕ

Показано, что процессы электростатического поля в вещественной среде могут быть описаны уравнениями стационарного поля, установлена функциональная аналитическая зависимость, описывающая взаимодействие зарядов стационарного поля, доказано, что данная зависимость является теоретической основой получения как дифференциальных, так и интегральных уравнений стационарного поля.

Показано, що процеси електростатичного поля в речовинному середовищі можуть бути описані рівнянням стаціонарного поля, встановлена функціональна аналітична залежність, що описує взаємодію зарядів стаціонарного поля, доведено, що дана залежність є теоретичною основою отримання як диференціальних, так і інтегральних рівнянь стаціонарного поля.

Вступ

Всі речовинні середовища, що використовуються в електротехнічних пристроях (у тому числі і в пристроях передачі і розподілу електричної енергії), мають провідність, не рівну нулю, і володіють, тією чи іншою мірою, діелектричними властивостями. В електростатичному полі (при незмінному в часі розподілі напруженості електричного поля або потенціалів) завдяки відмінній від нуля провідності речовинних середовищ буде протікати постійний електричний струм, при якому розподіл електричних зарядів у просторі залишається в часі незмінним. Відбувається тільки безперервна заміна кожного елемента заряду рівним йому іншим елементом. Таким чином, електростатичне поле є постійним в часі електричним полем, тобто стаціонарним електричним полем і його електромагнітні процеси можливо описати (визначити) рівняннями стаціонарного поля.

Отримання аналітичних залежностей, що описують взаємодію зарядів стаціонарного електричного поля, є досить актуальною проблемою. Вони можуть стати теоретичною основою нових методів розрахунку електричних та електростатичних кіл [1], тобто, теоретичною базою для розробки електротехнічних пристроїв нового покоління.

Основна частина

Відповідно до однієї з найважливіших теорем електростатики теореми Гауса потік вектора електричної індукції крізь будь-яку замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що перебувають усередині цієї поверхні. Заряди, відповідно до постулату Максвелла можуть бути як статичними, так і змінними в часі [2], тобто теорема Гауса справедлива для будь-якого електричного поля, зв'язаного або не пов'язаного з нерухомими або як завгодно рушійними зарядами. Отже, теорема Гауса залишається справедливою і для стаціонарного електричного поля, що підтверджується першим рівнянням Максвела, законом Ампера [3]:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \delta .$$

Якщо узяти дивергенцію від обох його частин, враховуючи, що згідно з однією з основних формул векторного аналізу дивергенція ротора рівна нулю, тому:

$$div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + div\vec{\delta} = 0 .$$

Даний вираз справедливий і при просторовому розповсюдженні електромагнітного поля, отже:

$$\int_V div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}dV + \int_V div\vec{\delta}\,dV = 0.$$

Для стаціонарного електричного поля перший доданок в останньому співвідношенні рівний нулю, другий доданок може бути перетворений за допомогою теореми Гауса - Остроградського:

$$\int_V div\vec{\delta}\,dV = \oint_S \vec{\delta}\,d\vec{S}.$$

У відповідність із законом Ома в диференціальній формі $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$, отже:

$$\int_V div\vec{\delta}\,dV = \oint_S \gamma\vec{E}d\vec{S}..$$

Оскільки $div\vec{\delta} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$, тому:

$$\oint_S \gamma\vec{E}d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (1)$$

Рівняння (1) описує зв'язок між потоком вектора напруженості стаціонарного електричного поля і зарядами, що рухаються.

Щоб визначити напруженість поля в точці, видаленій на відстань r від заряду $\frac{dq}{dt}$, необхідно через дану точку провести сферичну поверхню радіусом r, вважаючи, що заряд знаходиться в центрі сфери. Вектор, що зображає елемент поверхні сфери $d\vec{S}$, перпендикулярний поверхні сфери і співпадає по напряму з вектором напруженості $\vec{E}$ електричного поля, що має однакове числове значення в різних точках цієї поверхні через їх симетричне розташування щодо заряду. Отже, E можна винести з-під інтеграла формули (1):

$$\oint_S \gamma\vec{E}d\vec{S} = \gamma\oint_S EdS\cos 0^\circ = \gamma E\oint_S dS = \gamma E 4\pi r^2 = \frac{dq}{dt}.$$

Отже:

$$E = \frac{\frac{dq}{dt}}{4\pi\gamma r^2}. \qquad (2)$$

Напруженістю електричного поля є сила, діюча на одиничний електричний заряд, що знаходиться в даній точці поля. Отже, на точковий заряд діє сила, визначена співвідношенням [4]:

$$F = qE. \qquad (3)$$

Враховуючи вираз (2), останнє рівняння може бути описано таким чином:

$$F = \frac{q\frac{dq}{dt}}{4\pi\gamma r^2}. \qquad (4)$$

Таким чином, останнє рівняння описує функціональну залежність взаємодії точкових зарядів стаціонарного електричного поля. Вираз (4) є теоретичною основою, на якій базується і теорія стаціонарного електричного поля, і теорія лінійних електричних кіл постійного струму.

Тому що відповідно до виразу (2) напруженість E стаціонарного електричного поля, створюваного точковим змінним в часі зарядом $\frac{dq}{dt}$ визначається як:

$$E = \frac{1}{4\pi\gamma r^2}\frac{dq}{dt},$$

то потік вектора $\vec{E}$ через елементарну площадку $d\vec{S}$ буде дорівнювати:

$$\vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\gamma r^2}\frac{dq}{dt}\vec{r}_0 d\vec{S}, (5)$$

де: $\vec{r}_0$ - орт радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з елемента струму $\frac{dq}{dt}$ до площадки $d\vec{S}$.

Таким чином:

$$\vec{E}d\vec{S} = \frac{dq}{dt}\frac{\cos\left(\vec{r}_0, d\vec{S}\right)}{4\pi\gamma r^2}.$$

Добуток $\cos\left(\vec{r}_0 d\vec{S}\right)$ чисельно дорівнює проекції площадки $d\vec{S}$ на поверхню, перпендикулярну до радіуса-вектора $\vec{r}$.

Перпендикулярна до радіуса-вектора площадка dS' збігається з елементом кульової поверхні радіуса r із центром у точці O, де в цей момент перебуває точковий змінний у часі заряд (елемент струму $\frac{dq}{dt}$). Тілесний кут, під яким площадка dS' видна із точки O як відомо [5] визначається:

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{\cos\left(\vec{r}_0, d\vec{S}\right)}{r^2},$$

і тому:

$$\vec{E}d\vec{S} = \frac{dq}{dt}\frac{1}{4\pi\gamma}d\Omega. \qquad (6)$$

Таким чином, у полі елементарного заряду $\frac{dq}{dt}$, що рухається, потік вектора напруженості через довільно орієнтовану dS площадку залежить тільки від тілесного кута, під яким ця площадка видна із займаної елементом $\frac{dq}{dt}$ струмом точки O. Остання формула є наслідком того, що напруженість $\vec{E}$ поля спрямована радіально й при видаленні від елементарного заряду $\frac{dq}{dt}$ убуває також як й тілесний кут, що відповідає даній площадці dS.

Отже, потік вектора $\vec{E}$ через кінцеву поверхню S може бути визначений як:

$$\int_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{dq}{dt}\frac{1}{4\pi\gamma}\Omega,$$

де: Ω – тілесний кут, під яким видна з елемента струму $\frac{dq}{dt}$ вся поверхня S, тобто тілесний кут, утворений радіусами-векторами, проведеними з $\frac{dq}{dt}$ до крайової лінії цієї поверхні. Якщо поверхня S замкнута, то тілесний кут Ω може мати одне із двох значень: 4π і 0.

Точковий змінний у часі заряд $\frac{dq}{dt}$ може бути розташований або усередині замкнутої поверхні, або поза нею. Розгляд елемента струму $\frac{dq}{dt}$, розташованого на самій поверхні, позбавлено змісту, тому що користуватися уявленням про точковий елемент струму можна лише за умови, що дійсні розміри $\frac{dq}{dt}$ малі в порівнянні з відстанню його до розглянутих точок поля.

Якщо точковий елемент струму $\frac{dq}{dt}$ розташований усередині замкнутої поверхні S, то ця поверхня оточує його з усіх боків і, як наслідок, видна з розташування $\frac{dq}{dt}$ під кутом $\Omega = 4\pi$. Отже, у цьому випадку:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{dq}{dt},$$

або:

$$\oint_S \gamma \vec{E} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}.$$

Якщо ж елемент струму $\frac{dq}{dt}$ перебуває в точці O, що лежить поза замкнутою поверхнею S, то із цієї точки O можна провести до поверхні S пучок дотичних. Сукупність цих дотичних утворить конус, що стикається з S уздовж деякої замкнутої лінії, що розділить поверхню S на дві частини. Обидві частини поверхні S видні із точки O під тим самим тілесним кутом, що відповідає розхилу дотичного конуса, причому одна із цих частин буде видна з її внутрішньої сторони, а інша - із зовнішньої. Таким чином, цим обом частинам поверхні S будуть відповідати тілесні кути рівні по величині й протилежні за знаком. Потоки напруженості електричного поля через обидві частини поверхні S будуть рівні по величині, але протилежні за знаком і в сумі дадуть нуль. Отже, потік вектора $\vec{E}$ через усяку замкнуту поверхню, що не охоплює елемент струму $\frac{dq}{dt}$, дорівнює нулю:

$$\oint_S \gamma \vec{E} d\vec{S} = 0.$$

Ці можливі випадки (елемент струму усередині й поза поверхнею) можуть бути охоплені єдиною формулою:

$$\oint_S \gamma \vec{E} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}, \tag{7}$$

якщо тільки вмовиться розуміти в цій формулі під величиною $\frac{dq}{dt}$ елемент струму, розташованого усередині поверхні S, і, таким чином, вважати $\frac{dq}{dt}$ рівним нулю, якщо елемент струму розташований поза цією поверхнею.

Будь-яка система струмів може бути розкладена на сукупність елементарних струмів, кожний з яких може бути визначений як $\frac{dq}{dt}$. Любий із цих струмів створює окремо напруженість $\vec{E}_i$, тоді відповідно до принципу суперпозиції напруженість результуючого поля всієї системи елементарних струмів визначається як:

$$\vec{E} = \Sigma \vec{E}_i ,$$

відповідно:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \Sigma \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \Sigma q . \qquad (8)$$

Якщо заряд знаходиться в деякому об'ємі V , тоді $\Sigma q = \int_V \rho dV$, а його зміна в часі дається похідною:

$$\frac{d}{dt} \Sigma q = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV . \qquad (9)$$

З іншого боку, зміна за одиницю часу визначається кількістю заряду, що вийшов за цей час з даного об'єму назовні, або, навпаки, що ввійшов всередину нього. Кількість заряду, що пройшов за одиницю часу через елемент $d\vec{S}$ поверхні обмежуючої даний об'єм, рівно $\rho \vec{v} d\vec{S}$, де $\vec{v}$ є швидкість заряду в тій точці простору, де знаходиться елемент $d\vec{S}$. Вектор $d\vec{S}$ направлений по зовнішній нормалі до поверхні, тобто по нормалі направленої назовні від даного об'єму. Тому $\rho \vec{v} d\vec{S}$ позитивно, якщо заряд виходить з об'єму і негативно, якщо заряд входить в нього. Повна кількість заряду, що вийшов в одиницю часу з даного об'єму дорівнює:

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} , \qquad (10)$$

де інтеграл поширений по всій замкнутій поверхні, обмежуючий цей об'єм.

З порівняння обох одержаних виражень (9) та (10) виходить:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} . \qquad (11)$$

Враховуючи, що $\rho \vec{v} = \vec{\delta}$ є щільність струму, рівняння (11) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \vec{\delta} d\vec{S} . \qquad (12)$$

Зважаючи на те, що $\gamma = const$, можна констатувати, що виразу (8) відповідає рівняння:

$$\oint_S \gamma \vec{E} d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV . \qquad (13)$$

Оскільки:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \Sigma q = \oint_S \vec{\delta} d\vec{S} ,$$

тому:

$$\oint_S \gamma \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \vec{\delta} d\vec{S} . \qquad (14)$$

Рівність інтегралів припускає рівність підінтегральних виразів, таким чином:

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} . \qquad (15)$$

Останній вираз є законом Ома в диференціальній формі. У тому випадку якщо в розглянутому елементі провідного середовища діє й стороннє електричне поле з напруженістю $\vec{E}_{стор}$, тоді:

$$\vec{\delta} = \gamma \left(\vec{E} + \vec{E}_{стор} \right) . \qquad (16)$$

Отримане рівняння є диференціальною формою узагальненого закону Ома або другого закону Кірхгофа.

Вирази для об'ємної щільності заряду ρ можна представити за допомогою δ - функції, якщо припустити, що є всього лише один заряд q, так що [6]:

$$\rho = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Тоді щільність струм визначається виразом:

$$\vec{\delta} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

де: $\vec{v}$ – швидкість заряду.

При русі заряду міняються його координати, тобто міняється $\vec{r}_0$, тому:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\vec{r}_0}\frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Але $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ є не що інше як швидкість $\vec{v}$ заряду. Оскільки ρ є функція від $\vec{r} - \vec{r}_0$:

$$\frac{d\rho}{d\vec{r}_0} = -\frac{d\rho}{d\vec{r}}.$$

Отже [7]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\vec{v}grad\rho = -div\rho\vec{v},$$

(швидкість $\vec{v}$ заряду не залежить від $\vec{r}$).

Таким чином виходить, що:

$$div\vec{\delta} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Тому що $c\rho = \delta_t$ - часова складова чотиривектора щільності струму й $\frac{1}{c}\frac{d}{dt}$ – часова компонента чотиридивергенції, то останнє вираження є чотиридивергенція чотиривектора струму $(\nabla_\mu \delta_\mu = 0)$. Якщо часова складова $\delta_t = 0$, тоді:

$$div\vec{\delta} = 0. \tag{17}$$

Рівняння (17) називають першим законом Кірхгофа в диференціальній формі. Воно означає, що в будь-якій точці стаціонарного електричного поля немає а ні витоку, а ні стоку ліній струму провідності $\vec{\delta}$.

З огляду на те, що робота, чинена стаціонарним електричним полем при переміщенні одиничного заряду на одиницю відстані дорівнює його напруженості $\vec{E}$, енергія, що виділяється в одиниці об'єму провідного середовища в одиницю часу, буде визначатися як:

$$\vec{\delta}\vec{E}.$$

Тому що $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$, то:

$$\vec{\delta}\vec{E} = \gamma E^2, \tag{18}$$

Вираз (18) відповідає диференціальній формі закону Джоуля – Ленца.

Що б одержати інтегральні форми основних законів електротехніки необхідно взяти об'ємні інтеграли від їхніх диференціальних форм, з огляду на те, що інтеграл по об'єму є подвійним інтегралом (по поверхні й довжині даного об'єму):

$$\int_V dV = \int_S \int_l d\vec{S} d\vec{l} \ .$$

Так, наприклад, інтегральній формі закону Ома відповідає вираз:

$$\int_S \vec{\delta}\, d\vec{S} \int_l d\vec{l} = \gamma \int_S d\vec{S} \int_l \vec{E} d\vec{l} \ ,$$

$$\int_S \vec{\delta}\, d\vec{S} \frac{\int_l d\vec{l}}{\gamma \int_S d\vec{S}} = \int_l \vec{E} d\vec{l} \ ,$$

$$IR = U \ . \qquad (19)$$

Висновки

Таким чином, одержані вирази (4) та (7) описують функціональні залежності взаємодії зарядів стаціонарного електричного поля. Ці залежності є теоретичною основою одержання диференціальних форм аналітичних формул, що описують процеси стаціонарного електричного поля. Проведенні дослідження мають стати основою нових методів розрахунку електричних та електростатичних кіл, і відповідно, теоретичною базою для проектування електротехнічних пристроїв нового покоління.

Список літератури

1. Придубков П.Я. Хоменко І.В. Використання поняття електростатичного кола для вирішення деяких проблем електростатики. // Електротехніка і електромеханіка. – 2010 - №4. - С. 40-43.

2. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. В двух томах. М.: Наука, 1989.

3. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир. 1965. – 702 с.

4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.

5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988. –512 с.

7. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960 –618 с.

ABOUT FUNCTIONAL TO DEPENDENCE OF MATERIAL ENVIRONMENT, THAT THE STATIONARY FIELD IS DESCRIBED

P.Y. PRIDUBKOV, Cand. Tech. Scie.

I. V. KHOMENKO, Cand. Tech. Scie.

It is shown, that the processes of the electrostatic field in a material environment can be described by equalizations of the stationary field, functional analytical dependence describing co-operation of charges of the stationary field is set, it is proved, that the given dependence is the theoretical basis of receipt of equalizations of the stationary field both differential, and integral.

Поступила в редакцию 18.12 2010 г.