ЯНІШЕВСЬКИЙ
Василь Степанович
yanishev@ukr.net

УДК 330.43+336.764.2

АНАЛІЗ МОДЕЛІ ЦІНОУТВОРЕННЯ КОНВЕРТОВАНОЇ ОБЛІГАЦІЇ

ANALYSIS OF PRICING MODEL FOR CONVERTIBLE BOND

канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри технологій управління, Національний університет "Львівська політехніка"

Досліджена модель ціноутворення конвертованої облігації, що ґрунтується на моделі Кокса–Інгерсолла–Росса для процентної ставки. Розв'язок рівняння динаміки ціни облігації отримано перетворенням до відомої моделі квантової механіки. Досліджена узгодженість моделі в залежності від вхідних параметрів, наведена формула для ціни конвертованої облігації європейського стилю у випадку нульової кореляції вінерівських процесів

Исследована модель ценообразования конвертируемой облигации, основанной на модели Кокса-Ингерсолла-Росса для процентной ставки. Решение уравнения динамики цены облигации получено преобразованием до известной модели квантовой механики. Исследована согласованность модели в зависимости от входных параметров, приведена формула для цены конвертируемой облигации европейского стиля в случае нулевой корреляции винеровских процессов

A pricing model for convertible bond which is based on Cox-Ingersoll-Ross model for interest rate is investigated. A solution to the price bonds dynamic equation was obtained based on a known model of quantum mechanics. Consistency of the model depending on input parameters is investigated. A formula for European-style price of a convertible bond in case of zero correlation of Wiener processes is given.

Ключові слова: *конвертована облігація, стохастичні рівняння, геометричний броунівський рух, модель Васічека, модель Кокса-Інгерсолла-Росса, безризиковий портфель*

Ключевые слова: *конвертируемая облигация, стохастические уравнения, геометрическое броуновское движение, модель Васичека, модель Кокса-Ингерсолла-Росса, безрисковый портфель*

Keywords: *convertible bond, stochastic equations, geometric Brownian motion, Vasicek model, Cox-Ingersoll-Ross model, risk-free portfolio*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Розвиток сучасних методів дослідження фінансових процесів бере початок від знаменитої теорії спекуляції Башельє [1], який досліджував нерегулярні рухи цін акцій на фондовому ринку. Він уперше розробив математичну модель зміни ціни акції еквівалентну опису руху броунівських частинок. Становлення фінансової теорії сучасного рівня відбувалось всередині минулого століття з відкриттям моделі оцінки вартості фінансових активів, формулюванні гіпотези ефективного ринку та інших. Одним з важливих досягнень дослідження фінансових ринків стала модель Блека–Шоулза для визначення ціни опціонів [1]. Завдяки цій роботі було обґрунтоване поняття економічної ціни опціону, розкриті механізми ціноутворення на фінансовому ринку, а також фінансові аналітики та практики отримали важливі формули для аналізу. Підхід Блека–Шоулза ґрунтується на побудові безризикового портфелю і лежить тепер в основі ціноутворення різноманітних фінансових інструментів: акцій, облігацій, опціонів, ф'ючерсів, та багато інших, як базових активів так і похідних фінансових інструментів [2-5]. Сучасна кількісна теорія фінансових процесів використовує складні моделі та методи, серед яких стохастичні диференціальні рівняння, методи стохастичного аналізу, диференціальні рівняння в частинних похідних [1, 3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Відповідно з потребами опису різноманіття фінансових інструментів з'явилось чимало моделей, які розвивали та доповнювали існуючі [1, 3]. Зокрема, були запропоновані моделі стохастичної волатильності, що узагальнювали модель Блека-Шоулза для опціонів, розв'язувались задачі визначення дохідності облігацій, часової структури процентних ставок та інше.

Отримати точні розв'язки рівнянь цінової динаміки, які є диференціальними рівняннями в частинних похідних декількох змінних, вдається лише у небагатьох випадках. Сюди відносяться, зокрема, вже згадувана модель Блека-Шоулза, моделі Васічека та Кокса-Інгерсолла-Росса процентних ставок та ряд інших. Перелічені моделі відносяться також до однофакторних моделей.

Серед двофакторних моделей, які допускають точний розв'язок – це модель Гестона для опціонів зі стохастичною динамікою волатильності [1], моделі ціни конвертованої облігації [4, 6, 7]. У двофакторних моделях конвертованої облігації ціна акції описується моделлю геометричного броунівського руху, а процентна ставка моделями Васічека чи Кокса–Інгерсолла–Росса. В роботах [6, 7] була знайдена функція Гріна у моделі Васічека, модель Кокса–Інгерсолла–Росса не розглядалась через її суттєву складність.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В даній роботі для аналізу моделі конвертованої облігації застосовано підхід, який використовувався в роботі [8] для дослідження моделей опціонів. Рівняння ціноутворення облігації як і рівняння Шредінгера квантової механіки чи рівняння матриці густини статистичної механіки [9, 10] є рівняннями еволюційного типу. Тому для його аналізу зручно використовувати результати відомих модельних задач квантової механіки. Для рівнянь квантової механіки виконана детальна класифікація точних розв'язків та розвинуті методи побудови наближених розв'язків. В результаті зазначений підхід дає змогу проаналізувати рівняння ціни конвертованої облігації в моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, з'ясувати наявність точного розв'язку та вказати методи побудови наближень.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Ціну конвертованої облігації позначимо через $V(r,S,t)$, вона залежить від процентної ставки і ціни акції в момент часу t. У свою чергу r, S є випадковими величинами, які описуються за допомогою стохастичних рівнянь. Зокрема, динаміка ціни акції задається рівнянням геометричного броунівського руху:

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW_1 , \tag{1}$$

де σ – волатильність ціни акцій, величина μ визначає дрейф ціни і зазначені величини вважаються сталими. Стохастична динаміка процентної ставки r задається наступним рівнянням:

$$dr = u(r)\,dt + w(r)\,dW_2 . \tag{2}$$

Тут величина дрейфу $u(r)$ і волатильності $w(r)$ поки що невизначені функції процентної ставки. Також у рівняннях (1) і (2) величини W_1, W_2 є стандартними броунівськими рухами чи вінерівськими процесами, які визначаються характеристиками:

$$\langle dW_{1,2}\rangle = 0,\ \langle dW_1^2\rangle = \langle dW_2^2\rangle = dt,\ \langle dW_1\,dW_2\rangle = \rho\,dt ,$$

де ρ параметр кореляції ($-1 \le \rho \le 1$), дужки $\langle\ldots\rangle$ позначають середнє значення величин.

Для побудови диференціального рівняння для ціни облігації $V(r,S,t)$ формується безризиковий портфель згідно ключової ідеї Блека-Шоулза. Вказаний портфель містить конвертовану облігацію з терміном погашення T_1, кількість Δ_1 безкупонних облігацій з терміном погашення T_2 та базовий актив у кількості Δ_2:

$$\Pi = V - \Delta_1 Z - \Delta_2 S .$$

Сформований портфель має на меті хеджування ризиків зміни процентних ставок і базового активу. Як показано в [4, 6] після вибору величин «дельта» у вигляді $\Delta_1 = \dfrac{\partial V}{\partial r}\Big/\dfrac{\partial Z}{\partial r}$, $\Delta_2 = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ даний портфель є безризиковим з процентною ставкою r. В результаті у [4, 6] було отримано рівняння ціни динаміки конвертованої облігації:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma S\,w\frac{\partial^2 V}{\partial S\,\partial r} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + (u - \lambda w)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 . \tag{3}$$

Величина λ, що входить у рівняння, є ринковою ціною ризику зміни процентної ставки. Величина $u - \lambda w$ визначає дрейф для процентної ставки (2) з поправкою на ринковий ризик. Розв'язок рівняння (3) розглядається для часу $t \le T$, де T – час погашення облігації. Вибір величин $u - \lambda w = a - br$, $w = c\sqrt{r}$ у рівнянні (3), де a,b,c – сталі величини відповідає відомій моделі Кокса-Інгерсолла-Росса для процентної ставки:

$$dr = (a - br)dt + c\sqrt{r}\,dW_2 . \tag{4}$$

У рівнянні (3) зручно здійснити заміну $\tau = T - t$, де τ – час, що залишився до погашення облігації. Тоді рівняння (3) для ціни облігації набере вигляду:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma c S\sqrt{r}\frac{\partial^2 V}{\partial S\,\partial r} + \frac{1}{2}c^2 r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + (a - br)\frac{\partial V}{\partial r} - rV . \tag{5}$$

Далі необхідно знайти розв'язок рівняння (5) для заданої початкової умови в момент $V_0 = V(0)$ ($\tau = 0$, $t = T$). Такі умови можуть бути різними в залежності від конкретної постановки задачі. У випадку конвертованих облігацій європейського стилю задаємо у вигляді $V_0 = \max(nS, P)$, де S –

ринкова ціна акції, а P – номінальна ціна конвертованої облігації, n – коефіцієнт конверсії [3, 4].

Функція Гріна рівняння ціни конвертованої акції

Спростимо рівняння (5) виконуючи заміну змінної S ($x=\ln(S)$, $x\in R$). В результаті рівняння набуде вигляду:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\rho\sigma c\sqrt{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial r}+\frac{1}{2}c^2 r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x}+(a-br)\frac{\partial V}{\partial r}-rV. \qquad (6)$$

Оскільки коефіцієнти рівняння (6) не залежать від змінної x, зручно здійснити перетворення Фур’є для ціни $V(x)$ за змінною x: $V(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{V}(k)e^{ikx}dk$.

Для Фур’є-зображення $\tilde{V}(k)$ отримаємо таке рівняння (для спрощення запису залежність від k для $\tilde{V}(k)$ не вказуємо) :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tau}=\frac{1}{2}c^2 r\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2}+\left(ik\rho\sigma c\sqrt{r}+a-br\right)\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r}-\frac{1}{2}\left(i+k\right)\left(k\sigma^2-2ir\right)\tilde{V}. \qquad (7)$$

В результаті перетворень ми зменшили порядок рівняння. Отримане рівняння – диференціальне рівняння параболічного типу, а шукана функція $\tilde{V}(\kappa)$ і коефіцієнти рівняння залежать від змінної k як від параметра.

Для аналізу рівняння встановимо зв’язок з відомими моделями математичної фізики та квантової механіки [9, 10]. Для цього зведемо його до канонічного вигляду, де коефіцієнт біля доданка з другою похідною не залежить від r, відсутній доданок з першою похідною, а також коефіцієнт біля $\tilde{V}$ не містить постійних доданків (не залежних від r). Отже спочатку виконаємо заміну змінної $r\to\left(\frac{z}{2}\right)^2$ у рівнянні (7), після чого рівняння набуде вигляду:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tau}=\frac{1}{2}c^2\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2}+\left(ik\rho\sigma c-\frac{bz^2+c^2-4a}{2z}\right)\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}-\frac{1}{4}\left(i+k\right)\left(2k\sigma^2-iz^2\right)\tilde{V}. \qquad (8)$$

Наступні перетворення здійснюються за допомогою підстановки: $\tilde{V}=\exp(\phi_1(z)+\phi_0\tau)\tilde{V}_1$. (9)

Якщо функції $\varphi_1(r),\varphi_0$ обрати у вигляді: $\phi_1(z)=\frac{b}{4c^2}z^2-ik\frac{\rho\sigma}{c}z+\frac{1}{2}\left(1-\frac{4a}{c^2}\right)\ln(z)$;

$\phi_0=-\frac{1}{2}k^2(1-\rho^2)\sigma^2-\frac{1}{2}ik\sigma^2+\frac{ab}{c^2}$, то для функції $\tilde{V}_1$ отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \tau}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial z^2}-\left(\frac{c^2}{2}\frac{\Lambda^2-1/4}{z^2}+\frac{\Omega^2}{2c^2}z^2-\frac{1}{2}ik\rho\sigma\cdot h(z)\right)\tilde{V}. \qquad (10)$$

У перетвореному рівнянні (10) введено також позначення: $\Lambda=\left|1-\frac{2a}{c^2}\right|$; $\Omega^2=\frac{1}{4}\left(b^2+2c^2(1-ik)\right)$; $h(z)=\frac{b}{c}z+\frac{c}{z}\left(1-\frac{4a}{c^2}\right)$.

Отримане рівняння (10) має вигляд рівняння руху частинки у потенціалі, що задається виразом:

$$\Phi(z)=\frac{c^2}{2}\frac{\Lambda^2-1/4}{z^2}+\frac{\Omega^2}{2c^2}z^2-\frac{1}{2}ik\rho\sigma\cdot h(z) \qquad (11)$$

Перші два доданки у (11) відповідають відомій моделі радіального осцилятора [9, 10] квантової механіки, третій доданок пропорційний параметру кореляції ρ і визначає певний додатковий потенціал. Послідовний аналіз рівняння (10) демонструє, що точний розв’язок задачі Коші існує лише для моделі відсутності кореляції вінерівських процесів ($\rho=0$) [10]. У цьому випадку задача зводиться до моделі радіального осцилятора, що має точний розв’язок. На основі сказаного можна сформулювати схему розрахунку: за нульове наближення слід обрати випадок некорельованих вінерівських процесів, а наявність кореляції враховувати за допомогою теорії збурень.

Спочатку розглянемо нульове наближення поклавши у (11) значення $\rho=0$:

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \tau} = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial z^2} - \left(\frac{c^2}{2}\frac{\Lambda^2 - 1/4}{z^2} + \frac{\Omega^2}{2c^2} z^2 \right) \tilde{V} . \quad (12)$$

Для рівняння радіального осцилятора відома функція Гріна, яка має наступний вигляд [9]:

$$G_1(\tau, z, z_0, k) = \frac{\sqrt{z z_0}\,\Omega}{c^2 \sinh(\tau \Omega)} \exp\left(-\frac{\Omega}{2c^2}\left(z^2 + z_0^2 \right) \coth(\tau \Omega) \right) I_\Lambda \left(\frac{z z_0 \Omega}{c^2 \sinh(\tau \Omega)} \right). \quad (13)$$

Тут $I_\Lambda\left(x\right)$ – модифікована функція Бесселя [11].

Отже розв'язок рівняння (13) для $\forall \tau > 0$ визначається наступним інтегралом:

$$\tilde{V}_1(\tau) = \int_0^\infty G_1(\tau, z, z_0, k) \tilde{V}_1(0) dz_0 \,, \quad (14)$$

де $\tilde{V}_1(0)$ значення в початковий момент $\tau = 0$ часу. Зауважимо, що інтегрування в формулі (11) поширюється на півосі $z_0 > 0$.

Використовуючи зв'язок між функціями (9), запишемо також розв'язок $\tilde{V}(\tau)$ у вигляді (14), що визначатиме функцію Гріна рівняння (8):

$$\tilde{V}(\tau) = \int_0^\infty \tilde{G}(\tau, z, z_0, k) \tilde{V}(0) dz_0 \,, \quad (15)$$

де функція Гріна $\tilde{G}(\tau, z, z_0, k)$ рівна:

$$\tilde{G}(\tau, z, z_0, k) = \exp(\phi_0 \tau) \exp(\phi_1(z))\, G_1(\tau, z, z_0, k) \exp(-\phi_1(z_0)) \,. \quad (16)$$

Зауважимо, що у виразах для функцій ϕ_0, $\phi_1(z)$ (9) слід покласти $\rho = 0$.

Таким чином, вирази (13) і (16) визначають Фур'є-зображення (за змінною x) функції Гріна вихідного рівняння (7) динаміки ціни конвертованої облігації. Для визначення функції Гріна рівняння (6) слід здійснити заміну змінної $z \to 2r^2$ у формулах (15), (16) та виконати обернене перетворення Фур'є. Проте зручніше виконати спершу обернене перетворення Фур'є. Оскільки коефіцієнти рівняння (5) не залежать від змінної x, функція Гріна залежатиме лише від різниці змінних $x - x_0$:

$$G(\tau, z, z_0, x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\tau, z, z_0, k) e^{ik(x - x_0)} dk \,. \quad (17)$$

Як видно із структури формул (7) залежність від k містять функції ϕ_0 і $\phi_1(z)$, а також $G_1(\tau, z, z_0, k)$ містить залежність від k через Ω (див. позначення до формули 10) . Очевидно через складну аналітичну залежність від k виконати у (17) інтегрування у замкнутому вигляді неможливо, а тому не існує простої аналітичної залежності для $G(\tau, z, z_0, x - x_0)$.

Формула ціни конвертованої облігації

У загальному випадку початкові умови щодо ціни облігації в момент погашення T не містять залежності від процентної ставки r_0 і відповідно від z_0. Тому інтегрування за z_0 у формулі (15) виконується лише для Фур'є-зображення функції Гріна $\tilde{G}(\tau, z, z_0, k)$. Отже перейдемо до Фур'є-зображення функції Гріна $\overline{G}(\tau, z, k)$:

$$\overline{G}(\tau, z, k) = \int_0^\infty \tilde{G}(\tau, z, z_0, k) dz_0 \,. \quad (18)$$

Інтегрування у формулі (18) можна виконати у замкнутому вигляді. Для спрощення виразів слід вказати значення параметра Λ. Параметр Λ, згідно формули (10), можна задати двояким чином: $\Lambda = \frac{2a}{c^2} - 1 \left(\frac{2a}{c^2} > 1 \right)$ або $\Lambda = 1 - \frac{2a}{c^2} \left(0 < \frac{2a}{c^2} < 1 \right)$. У випадку випадку, враховуючи також підстановку $z \to 2r^2$, для Фур'є-зображення $\overline{G}(\tau, z, k)$ отримаємо вираз:

$$\overline{G}(\tau, r, k) = \exp\left(\phi_0 \tau\right) \exp\left(-\frac{4\Omega^2 - b^2}{b + 2\Omega \coth(\tau \Omega)} r \right) \left(\cosh[\tau \Omega] + \frac{b \sinh[\tau \Omega]}{\Omega} \right)^{-\frac{2a}{c^2}} . \quad (19)$$

Неважко показати, що у другому випадку отримується неправильна границя $\overline{G}(\tau, r, k) \to 0$ для $r \to 0$, що суперечить змісту процентної ставки.

Таким чином слід накласти умову $\frac{2a}{c^2} > 1$, що визначає застосовність моделі Кокса-Інгерсолла-Росса для ціноутворення облігації.

Отриманий компактний вигляд Фур’є-зображення функції Гріна $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$ (19) дозволяє отримати формулу ціни конвертованої облігації. Для цього, як вже вказувалось, слід обчислити інтеграл добутку $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$ і початкової умови (умова задається в момент погашення облігації T). Зокрема, що для звичайної облігації початкова умова має вигляд $V_0 = P$, де P – номінальна вартість облігації. Тоді для ціни отримаємо:

$$V(\tau) = P\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G}(\tau, r, k)e^{ik(x-x0)}\right)dx_0 = P\overline{G}(\tau, r, 0).$$

Підставляючи значення $k = 0$ у формулу (19) отримаємо:

$$V(\tau) = P\cdot F(\tau, r),\ \ F(\tau, r) = \exp\left(-B(\tau)r + A(\tau)\right),$$

$$B(\tau) = \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 2c^2}\coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2}\,\tau\right)},$$

$$A(\tau) = \frac{ab}{c^2}\tau - \frac{2a}{c^2}\ln\left(\cosh\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2}\,\tau\right) + \frac{b\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2}\,\tau\right)}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}\right). \qquad (20)$$

Нагадаємо, що $\tau = T - t$ – час, що залишився до погашення облігації. Ми отримали формулу для дохідності звичайної облігації в моделі, де процентна ставка описується однофакторною моделлю Кокса–Інгерсолла–Росса [12].

Для конвертованих облігацій європейського стилю, як вже було заначено, умову задамо у вигляді:

$$V_0 = \max(nS, P).$$

Зміст умови очевидний – конвертація відбудеться, якщо ринкова вартість акцій буде перевищувати номінальну ціну облігації. Ціна облігації в довільний момент часу $0 \le t \le T$ визначається наступним інтегралом:

$$V(\tau) == \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G}(\tau, r, k)e^{ik(x-x_0)}dk\right)\max(ne^{x_0}, P)dx_0 \qquad (21)$$

Оскільки для функції Гріна $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$ немає простої аналітичної залежності, подальших спрощень можна досягнути, якщо у формулі (22) здійснити перестановку порядків інтегрування, спершу виконати інтегрування за змінною x_0. Очевидно, що здійснити перестановку порядків інтегрування зараз є неможливо, оскільки інтеграли за x_0 є невизначені. Для перестановки місцями інтегралів за k і x_0 необхідно перейти в комплекс-ну площину змінної k і скористатись теоремою Коші [11]. Детально зазначені перетворення наведені в [8] при дослідженні моделі Гестона, тому ми їх тут не наводимо. В кінцевому підсумку для ціни конвертованої облігації (у наближенні некорельо-ваних вінерівських процесів ($\rho = 0$) отримаємо формулу:

$$V(\tau) = \frac{1}{2}\left(nS + PF(\tau, r)\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nS\overline{G}\left(\tau, r, k - i\right) - P\overline{G}\left(\tau, r, k\right)}{ik}e^{ik\ln\left(nS/P\right)}dk \qquad (22)$$

За своєю структурою отримана формула нагадує формулу ціни європейського опціону в моделі Гестона [1, 8]. Нагадаємо, що у моделі Гестона також використовується два стохастичні процеси – модель геометричного броунівського руху для ціни акції та модель Кокса–Інгерсолла–Росса для волатильності ціни акції. Проте для моделі Гестона існує точний розв’язок, що пов’язано, очевидно, з іншою структурою портфеля та отриманим диференціальним рівнянням ціни опціону.

ВИСНОВКИ

Досліджувалась модель ціноутворення конвертованої облігації, в якій використовуються два стохастичні процеси для моделювання цінової динаміки базового активу і зміни процентної ставки.

Для опису динаміки ціни акції вико-ристовується модель геометричного броунів-ського руху, для опису зміни процентної ставки – модель Кокса-Інгерсолла-Росса. В літературі було отри-мане диференціальне рівняння для ціни конвер-тованої облігації, виведення якого ґрунтувалось на ідеї Блека-Шоулза щодо побудови безризикового портфеля з використанням методів стохастичного аналізу. Проте розв'язки для зазначеного рівняння не наводились, що пов'язано із значною складністю їх отримання.

У даній роботі для аналізу рівняння ціни конвертованої облігації використовувався метод зведення його до рівняння, яке добре вивчені у квантовій і статистичній механіках. Як рівняння ціни облігації та рівняння Шредінгера квантової механіки чи матриці густини статистичної механіки є еволюційними рівняннями, тому методи дослідження є досить подібними. В той же час для багатьох моделей теоретичної фізики складена досить детальна класифікація рівнянь для частинок у різних полях, для яких існують точні розв'язки, а також розвинуті методи отримання наближених розв'язків.

В результаті застосування зазначеного підходу виявлено, що рівняння ціни конвертованої облігації еквівалентне рівнянню радіального осцилятора з додатковим потенціалом, і для нього немає точних розв'язків. Показано також, що точні розв'язки існують у випадку відсутності кореляцій вінерів-ських процесів у стохастичних рівняннях моделі. Для цього випадку знайдена функція Гріна рівняння ціни конвертованої облігації, що дозволяє вивчати процеси ціноутворення в залежності від постановки різних початкових умов.

В результаті нами отримана формула ціни конвертованої облігації європейського стилю. Для початкової умови незалежної від ціни базового активу (акції) – отримано формулу дохідності у моделі процентної ставки Кокса–Інгерсолла–Росса. Проаналізована також узгодженість вхідних пара-метрів моделі Кокса–Інгерсолла–Росса для яких наведена формула дохідності має сенс.

Очевидно, для практичного використання наве-дених формул необхідно здійснити калібрування моделі, визначити значення вхідних параметрів моделі на основі статистичних даних ринків облігацій. Також слід розглянути внески пов'язані з відмінною від нуля кореляцією вінерівських процесів. Зазначені завдання та ряд інших будуть предметом наступних досліджень.

<u>Список використаних джерел</u>

1. A.L. Lewis. Option Valuation under Stochastic Volatility / A.L. Lewis. – Finance Press, 2000. – 351 p.

2. Джон К. Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Джон К. Халл. – Издательство: Вильямс, 2013. – 1072 р.

3. Jan De Spiegeleer. The Handbook of Hybrid Securities: Convertible Bonds, CoCo Bonds and Bail-In / Jan De Spiegeleer, Wim Schoutens, Cynthia Van Hulle. – Wiley-Finance, 2014. – 410 p.

4. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.

5. Шарп У. Инвестиции / Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. : [Пер. с англ.] – М.: ИНФРА-М, 2001. – 1028 с.

6. R. Mallier. A Green's function for a convertible bond using the Vasicek model / R. Mallier and A.S. Deakin // Journal of Applied Mathematics. – 2002. – vol. 2, no. 5. – P. 219–232.

7. R. Mallier. An Analytic Solution for a Vasicek Interest Rate Convertible Bond Model / R. Mallier and A. S. Deakin // Journal of Applied Mathematics. – 2010. – vol. 10, no. 2. – P. 109-113.

8. В.С. Янішевський. Рівняння динаміки ціни опціону та моделі квантової механіки / В.С. Янішевський // Журнал фізичних досліджень. – 2014. – Т. 18, №1. – С. 1005:1-1005:7.

9. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.

10. Крылов, Г.Г. Точно и квазиточно решаемые модели в квантовой механике и стохастической динамике / Крылов, Г.Г. – Минск : БГУ, 2011. – 131 с.

11. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М: Наука, 1979. – 834 с.

12. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу. [Пер. с англ.] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.