КІЛЬКІСНІ ОЦІНКИ РИЗИКІВ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ

Пасенченко Ю.А.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного
моделювання економічних систем,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

Вступ. В статті вивчається задача оцінки ризику кредитного портфеля комерційного банку. Кредитний ризик – це ризик неповернення суми боргу у встановлені угодою терміни. Для оцінки кредитного ризику застосовують якісні та кількісні показники [1, 2, 4]. Одними з найважливіших кількісних показників кредитного ризику є величини p_j – ймовірності виникнення збитків щодо окремої кредитної угоди чи портфеля, або ймовірності неповернення позики (часткинеповернення)[1].Зокрема,знання ймовірності (частки) неповернення дозволяє оцінювати складову кредитного ризику у вартості (ставці i_j) p_j j–го кредиту[4]:

$$i_j^{(kp)} = \frac{p_j}{1-p_j} \quad (1)$$

Ймовірності p_j можна визначати експертним шляхом, або статистично з кредитних історій позичальників.

У даній роботі новим елементом є використання припущення про випадковий характер величин p_j. Далі вважаємо, що для випадкових величин p_j можлива оцінка середньоквадратичних відхилень σj.

Зауважимо, що в роботі [1] величини p_j вважалися фіксованими і на їх основі знаходилися усереднені характеристики кредитного портфеля. В роботі [3] вивчалася задача векторної оптимізації кредитного портфеля, в якій максимізувався очікуваний чистий зведений доход і мінімізувалася дисперсія зведеного доходу. На відміну від попередніх робіт в даній статті портфельний підхід застосовується до аналізу кредитного ризику і знаходиться структура найбільш надійного портфеля – оптимального щодо ризику неповернення позик. Такий підхід дає можливість отримати додаткові засоби управління кредитним портфелем комерційного банку.

В статті також з'ясовано, що структура оптимального портфеля залежить від рівня надійності відповідних оцінок і подільності чи неподільності кредитних запитів.

В даній роботі використовується ймовірнісний підхід і портфельна теорія Г. Марковиця – Д. Тобіна – У. Шарпа для отримання кількісних оцінок кредитного ризику портфелів комерційного банку.

Результати дослідження.

Нехай S_j, p_j – це сума *j*–ї кредитної позики та ймовірність (частка) її неповернення,

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

сума кредитного портфеля банку. В сумах *S* та S_j можуть міститися прибутки за позиками.

На основі показників p_j наступним чином оцінюється очікувана сума збитків за окремою угодою: $S_j p_j$ і в цілому – портфеля:

$$\sum_{j=1}^{n} S_j p_j \text{ , (2)}$$

середньозважений за сумами кредитів портфельний ризик (частка неповернення в цілому по портфелю):

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{S_j}{S} \text{ , (3)}$$

середньоквадратичне відхилення портфельного ризику, семіваріанти, коефіцієнти асиметрії портфеля, сподіване значення обсягу безнадійних боргів і інші показники [1].

Оскільки ймовірності (частки неповернення) визначаються експертним шляхом, або статистично з кредитних історій позичальників, то p_j є усередненими, або очікуваними значеннями.

При оцінці j–ї частки неповернення з заданим рівнем надійності будемо вважати p_j випадковою величиною і будемо використовувати її додаткові характеристики, зокрема – середньоквадратичне відхилення (розсіювання) σ_j, що також визначається при обробці експертних даних, або статистично з кредитних історій. Якщо такі дані відсутні, то σ_j завжди можна оцінити через p_j наступним чином:

$$\sigma_j \le \sqrt{p_j(1-p_j)} \text{ . (4)}$$

Дійсно, для неперервної з щільністю *f(x)* випадкової величини $\xi \in [0,1]$ оцінка (4) випливає з нерівності:

$$\sigma^2(\xi) = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \le M\xi - (M\xi)^2 \text{ . (5)}$$

Далі замість p_j будемо використовувати величини P_j – ймовірності повернення (частки повернення) j-го кредиту. Очевидно, що має місце співвідношення:

$$P_j = 1 - p_j \text{ (6)}$$

а середньоквадратичні відхилення величин P_j та p_j співпадають.

Таким чином, ризикованість j-го кредиту суми S_j будемо характеризувати парою чисел: (P_j, σ_j) – ймовірністю (часткою) повернення P_j і середньоквадратичним відхиленням (розсіюванням) σ_j цієї величини.

Для портфеля кредитних запитів $\{(P_j, \sigma_j), S_j\}_{j=1}^{n}$ сумою $S = \sum_{j=1}^{n} S_j$ знаходимо характеристики:

$$P_{portf.} = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j ; \quad \sigma_{portf.} = \sqrt{\sum_{j,k} \sigma_j \sigma_k r_k x_j x_k} \text{ , (7)}$$

де $P_{portf.}$ – середня частка (ймовірність) повернення по усьому портфелю, $\sigma_{portf.}$ – розсіювання щодо цієї частки, r_{jk} – коефіцієнти кореляції j-го та k-го кредитів, x_j – частки j-го кредиту в портфелі банку, які в сумі складають одиницю.

В даній моделі враховуються лише парні залежності кредитів. Тобто вивчення проводиться в межах кореляційної теорії. Значення величини $P_{portf.}$ потрібно збільшувати, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_{portf.}$ – зменшувати для того, щоб отримати кількісну оцінку найбільшої середньої частки повернення з максимальною точністю.

Нехай $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – структура кредитного портфеля. Зокрема, при задоволенні усіх кредитних запитів:

$$x_j = \frac{S_j}{S}, \quad j = 1,2,...,n. \quad (8)$$

Якщо не усі запити задовольняються, то x_j – частки j-го кредиту в портфелі банку можуть бути відмінними від величин (8).

З наведених вище міркувань отримуємо задачу векторної оптимізації з двома критеріями:

$$P_{portf.} \to \max, \quad \sigma_{portf.} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \quad x_j \geq 0; \quad j = 1,2,...n. \quad (9)$$

Зауважимо, що коли банк кредитує з використанням запозичених ресурсів, то деякі із змінних x_j можуть набувати від'ємних значень.

Задача (9) вивчалася в дослідженнях Г. Марковиця і Д. Тобіна стосовно фондового ринку, де *P* та σ відповідно визначали очікувану доходність та ризик портфеля цінних паперів. В цих роботах щодо задачі (9) здійснювався перехід до оптимальної за Парето множини і знаходилася точка ринкового портфеля цінних паперів на площині змінних (σ, *P*) .

Застосуємо такий же підхід до кредитного портфеля комерційного банку і зведемо задачу (9) з двома критеріями до задачі з одним критерієм. Для цього фіксуємо рівень одного з критеріїв і додаємо нове обмеження. Виникає задача квадратичного програмування (з одним критерієм), що відповідає (9), яка має вигляд:

$$\sigma^2_{portf.} \to min, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P; x_j \geq 0; j = 1,2,...,n. \quad (10)$$

В задачі (10) фіксованим є очікуваний рівень повернення *P* по усьому портфелю, а шукається структура портфеля $(x_1, x_2, ..., x_n)$ з мінімальним стандартним відхиленням σ, тобто найбільше прогнозованого щодо *P*.

Варіюючи значення *P* , з (10) знаходимо множину Парето задачі (9). В теорії фондового ринку відповідна множина Парето називається «лінією ефективних портфелів Г. Марковиця» [2]. Стосовно кредитного портфеля комерційного банку будемо називати відповідну множину Парето «лінією ефективних щодо ризику портфелів» [4].

Чисельні методи розв'язання оптимізаційних задач добре відомі [6]. Зокрема, для розв'язання задачі квадратичного програмування (10) можна використовувати програму MS Excel – «Пошук рішення» [6]. Зауважимо, що для побудови «лінії ефективних щодо ризику портфелів» задачі (9), задачу (10) треба розв'язувати багато разів на достатньо щільній множині значень параметра *P Є [0,1]*.

В комерційному банку завжди є безнадійні кредити, для яких $P_j = 0$ (тобто ймовірності повернення цих позик рівні нулю). Позначимо через x_0 частку таких кредитів у банківському портфелі. Тоді виникає задача, яка розглядалася в роботах Д. Тобіна [2] стосовно фондового ринку:

$$\sigma^2_{portf.} \to min, \quad \sum_{j=0}^{n} x_j = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P; \quad x_j \geq 0; \quad j = 0,1,2,...,n. \quad (11)$$

Розв'язання задачі (11) дозволяє в площині змінних (σ, P) знайти точку, що виражає оптимальне для кредитного портфеля банку співвідношення між часткою (ймовірністю) повернення P^* та розсіюванням σ^* цієї величини. Варіюючи P, знаходимо множину Парето задачі (11), яка складається з частини кривої «лінії ефективних щодо ризику портфелів» задачі (9) та відрізка прямої, що з'єднує початок координат з точкою (σ^*, P^*). В теорії фондового ринку точка (σ^*, P^*) називається «ринковим портфелем». Стосовно кредитного портфеля комерційного банку будемо називати точку (σ^*, P^*) – «оптимальним за кредитним ризиком портфелем».

Знання оптимального за кредитним ризиком портфеля дозволяє проводити селекцію, нормування та лімітування позик. З оптимальним портфелем можна порівнювати інші портфелі банку і приймати рішення про надання, обмеження чи ненадання окремих позик.

Якщо банк розглядає кілька варіантів надання позик і виникає кілька портфелів з характеристиками (σ, P), то якість портфелів можна порівнювати за показником коефіцієнта варіації [2, 5]:

$$V = \frac{\sigma}{P} \ . \quad (12)$$

Згідно цього показника кращому щодо ризикованості кредитному портфелю відповідає менше значення коефіцієнта варіації.

Зауважимо, що в задачах (9), (10), (11) передбачалася можливість подрібнення кредитних запитів. Якщо кредити неподільні, то ввівши змінні Буля: $\delta_j = 1$, якщо j–й кредит надається та $\delta_j = 0$, якщо j–й кредит не надається, приходимо до задачі дискретного програмування з двома критеріями:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \sigma_j \sigma_k r_k S_j S_k \delta_j \delta_k \to min; \quad \sum_{j=1}^{n} P_j S_j \delta_j \to max; \quad \sum_{j=1}^{n} S_j \delta_j \leq R; \delta_j = 0;1 \ , \quad (13)$$

де R – кредитний ресурс банку, S_j – суми кредитних запитів. В задачі (13) максимізується середня сума повернення по портфелю і мінімізується дисперсія відхилення від цієї суми.

Відмітимо також, що використовуючи методи стохастичного програмування, задачі (9), (13) можна різними способами зводити до задач з одним критерієм, отримуючи М-задачі та Р-задачі стохастичного програмування [7].

Наприклад, замість (13) можна розглянути таку задачу з одним критерієм:

$$L = \sum_{j=1}^{n} P_j S_j \delta_j - \alpha \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} \sigma_j \sigma_k r_k S_j S_k \delta_j \delta_k} \to max; \sum_{j=1}^{n} S_j \delta_j \leq R; \delta_j \in \{0,1\} \ , \quad (14)$$

де параметр α характеризує надійність інтервальних оцінок сум повернення.

Якщо позики подільні, то замість (13) можна розглянути таку задачу з одним критерієм:

$$L = \sum_{j=1}^{n} P_j S_j x_j - \alpha \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} \sigma_j \sigma_k r_k S_j S_k x_j x_k} \to max; \quad \sum_{j=1}^{n} S_j x_j \le R; x_j \ge 0,$$

$$j = 1,2,...n \qquad (15)$$

Зокрема, використання цільових функцій (14), (15) дозволяє будувати з заданим рівнем надійності довірчі інтервали для сум кредитів портфеля банку, які будуть повернуті.

Дійсно, згідно нерівності П. Л. Чебишева [5], маємо наступну оцінку ймовірності попадання випадкової величини ξ в інтервал $|\xi - M\xi| \le \alpha \cdot \sigma(\xi)$:

$$Prob\{|\xi - M\xi| \le \alpha \cdot \sigma(\xi)\} \ge 1 - \frac{1}{\alpha^2} \ . \quad (16)$$

Оцінка (16) справедлива для довільної випадкової величини з скінченою дисперсією.

З (16) отримуємо оцінки ймовірності попадання випадкової величини в даний інтервал (надійності) в залежності від α:

α	2	3	4
Prob	0,75	0,89	0,9375

(17)

При відомому законі розподілу випадкової величини ξ оцінки (17) дозволяють уточнення. Наприклад, якщо ξ нормально розподілена випадкова величина, то, користуючись таблицями [5], замість (16), (17) обчислюємо більш точні оцінки ймовірності (надійності) попадання випадкової величини ξ в даний інтервал в залежності від α:

α	2	3	4
Prob	0,954	0,997	0,999936

(18)

Зауважимо, що в економіці та фінансах припущення про нормальний розподіл досліджуваних величин є найбільш вживаним.

Розглянемо тепер питання про врахування кредитів з різними термінами у портфелі комерційного банку, оскільки характеристика кредитів параметрами (σ_j, P_j) передбачає приблизно однакові терміни кредитів портфеля. Якщо кредити мають різні терміни, то при порівнянні їх кредитних ризиків потрібно перераховувати ймовірності повернення кредитів.

Дійсно, нехай $\hat{P}_j$ – ймовірність повернення j-го кредиту протягом терміну *T* керування портфелем. Нехай *j*-й кредит має термін t_j. Припустимо, що повернення j-го кредиту в кожному з t_j років його терміну є незалежними випадковими подіями. Тоді отримуємо ймовірність повернення перераховану на термін *T*:

$$\hat{P}_j = P_j^{\frac{T}{t_j}} \ . \quad (19)$$

Ймовірності $\hat{P}_j$ можна використовувати в задачах (9) – (11), (13) – (15) і вважати, що усі кредити портфеля мають один термін *T*.

Зауважимо, що знання ймовірності (частки) неповернення p_j дозволяє оцінювати згідно (1) складову кредитного ризику у вартості (ставці i_j) j–го кредиту. Формулою (1) оцінюється складова кредитного ризику у вартості кредиту для детермінованих p_j. Якщо p_j є випадковою величиною, то оцінку (1) треба уточнити. Отримуємо з (1) наближено (при малих p_j) вираз:

$$i_{kp} \approx p + p^2. \quad (20)$$

Обчислимо математичне сподівання правої і лівої сторін у співвідношенні (20). Врахувавши вираз для моменту другого порядку через дисперсію [5], із (20) отримуємо кількісну оцінку для математичного сподівання М(i_{kp}):

$$M(i_{kp}) = M(p) + M^2(p) + \sigma^2(p) \quad . (21)$$

Формула (21) дозволяє отримувати оцінки величин i_{kp} у вигляді довірчих інтервалів. Співвідношення (21) показує, що навіть при однакових середніх рівнях ймовірності неповернення p_j банк повинен застосовувати (в середньому) більшу складову i_{kp} до боржників з більшою дисперсією $\sigma^2(p)$ величини p_j. Тобто, для більш непередбачуваних боржників ставка кредитування повинна бути більшою, а формула (21) дає кількісну оцінку відповідного збільшення.

Розглянемо приклади кількісних оцінок кредитних ризиків.

Приклад 1. Нехай маємо портфель кредитних запитів комерційного банку:

Номер запиту j	1	2	3	4	5
Сума запиту S_j (тис. грн.)	150	200	250	350	300
Терміни t_j (роки)	0,5	1	1	0,5	1,25
Ймовірність p_j неповернення	0,02	0,035	0,045	0,04	0,03

Припустимо, що термін керування портфелем *T*=0,5 року. Перейдемо до P_j – ймовірностей повернення позик і перерахуємо їх згідно (19) на термін *T*:

j	1	2	3	4	5
S_j	150	200	250	350	300
t_j	0,5	1	1	0,5	1,25
p_j	0,02	0,035	0,045	0,04	0,03
P_j	0,98	0,965	0,955	0,96	0,97
$\hat{P}_j$	0,98	0,982344	0,977241	0,96	0,98789

Хай відомі оцінки коефіцієнтів кореляції позичальників (кореляційна матриця):

$$\begin{matrix} 1 & 0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 1 & 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ -0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}4 & 1 & 0{,}15 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}15 & 1 \end{matrix}$$

Зауважимо, що елементи кореляційної матриці можуть визначатися експертним шляхом, або за минулою статистикою кредитних історій позичальників.

Порахуємо σ_j згідно оцінки (4):

j	1	2	3	4	5
σ_j	0,14	0,131697	0,149134	0,195959	0,109376

Припустимо, що кредитний ресурс R , який може виділити банк на дані позики, дорівнює сумі кредитних запитів *S*:

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j = \text{R=1250000 грн.}$$

Будемо знаходити характеристики (σ, *P*) різних портфелів, які можуть виникати при аналізі кредитних запитів. Будемо обчислювати також і коефіцієнти варіацій *V* відповідних портфелів за формулою (12).

Знайдемо за формулами (7), (8), (12) характеристики (σ, *P*) , *V* портфеля №1, в якому задовольняються усі кредитні запити.

Знайдемо структуру оптимального за кредитним ризиком портфеля №2. Для цього розв'язуємо оптимізаційну задачу Д. Тобіна (11). Як засіб розв'язання використовуємо MS Excel – «Пошук рішення» [6]. Раніш вже відмічалось, що задачу (11) треба розв'язувати багато разів на достатньо щільній множині значень параметра Р Є [0,1].

Бачимо, що з оптимального портфеля (σ*, *P**) вилучено 4-й запит (оскільки величина Х4=0). Тобто банк може відмовити 4-му позичальнику у кредиті. Даний позичальник може отримати кредит в іншому банку з більш ризикованою кредитною політикою. По запитах 1-му, 3-му, 5-му банк може збільшити суми позик. Запит 2-й може бути задоволений не в повній мірі.

Знайдемо структуру оптимального за ризиком портфеля №3 в умовах, коли банк нормує (обмежує) величину 4-го запиту сумою 125 тис. грн (Х4=0,1). Розраховуємо для цього портфеля величини *P*, σ та *V*.

Знайдемо структуру оптимального за ризиком портфеля №4 в умовах, коли банк нормує (обмежує) величину 4-го запиту сумою 125 тис. грн (Х4=0,1) та повністю задовольняє 5-й запит. Розраховуємо для цього портфеля величини *P*, σ та *V*.

Xj	Портфель №1 (кредитних запитів)	Портфель №2 (оптимальний)	Портфель №3 (оптимальний, нормований за *X4*)	Портфель №4 (оптимальний, нормований за *X4, X5*)
X1	0,12	0,240167	0,200382	0,216898
X2	0,16	0,120904	0,153643	0,260400
X3	0,20	0,272763	0,203586	0,182701
X4	0,28	0	0,1	0,1
X5	0,24	0,366166	0,342389	0,24
P	0,976117	0,98242	0,9805	0,98
σ	0,060497	0,059263	0,063594	0,065527
V	0,061977	0,060323	0,064859	0,066864

Бачимо, що портфельний підхід до оцінки ризику даної сукупності кредитних запитів дозволяє проводити певну селекцію позичальників за їх ризикованістю. Порівнюючи з оптимальним (портфелем №2), бачимо, що інші портфелі мають гірші показники величин (σ, P), V. Отже, оптимальний портфель навіть без його запровадження є певним еталоном характеристик P, σ та V даної сукупності запитів.

Якщо кредити не корелюють, тобто коефіцієнти кореляції різних позик рівні нулю ($r_{jk}=0$), то отримуємо з (11), (12) оптимальний за ризиком портфель такої структури:

$$X1=0{,}13608\ ;\ X2=0{,}227708\ ;\ X3=0{,}051947\ ;\ X4=0\ ;X5=0{,}584185\ ;$$
$$P=0{,}985;\ \sigma=0{,}073523;\ V=0{,}07464326.$$

Приклад 2. Припустимо, що кредитний ресурс банку обмежений сумою 1 млн грн (меншою ніж сума запитів) і кредитні запити неподільні.

Розв'язуючи задачу (14), отримуємо різні структури оптимальних портфелів в залежності від рівня надійності, що визначається параметром α.

Так, при α=2 маємо таку структуру оптимального кредитного портфеля:

$$\delta(opt)=(1,1,0,1,1).$$

Тобто, задовольняються 1-й, 2-й, 4-й, 5-й кредитні запити, а 3-й запит відхиляється. Середня сума повернення по портфелю:

$$P_{portf.}=975{,}8359 \text{ тис грн.}$$

Середньоквадратичне відхилення і коефіцієнт варіації суми повернення відповідно дорівнюють:

$$\sigma_{portf.}=88{,}94637 \text{ тис. грн },\ V=0{,}09115.$$

При α=3: маємо таку структуру оптимального кредитного портфеля:

$$\delta(opt)=(1,1,1,0,1).$$

Тобто задовольняються 1-й, 2-й, 3-й, 5-й кредитні запити, а 4-й запит відхиляється. Середня сума повернення по портфелю:

$$P_{portf.}=884{,}1462 \text{ тис грн.}$$

Параметри σ, V дорівнюють:

$$\sigma_{portf.}=55{,}10436 \text{ тис. грн},\ V=0{,}06232.$$

Користуючись таблицями (17), (18) можна знаходити довірчі ймовірності і довірчі інтервали відповідних параметрів портфелів.

Приклад 3. Знайдемо за формулою (20) очікувані значення М(i_{kp}) складових i_{kp} кредитного ризику у ставці кредиту в залежності від обраних банком портфелів:

	Портфель №1	Портфель №2	Портфель №3	Портфель №4
$M(i_{kp})$	0,02811	0,02140	0,02392	0,02469

Бачимо, що портфелям з більшим σ (більш непередбачуваним) відповідають більші (в середньому) складові i_{kp} кредитного ризику у ставці кредиту.

Висновки

1. Кредит комерційного банку крім частки (ймовірності) повернення-неповернення корисно характеризувати розсіюванням цього параметру. Це дозволяє застосовувати теорію Г. Марковиця – Д. Тобіна – У. Шарпа до оптимізації структури кредитного портфеля, враховувати кореляційну залежність позик і різноманітні обмеження.

2. Знання оптимального кредитного портфеля дозволяє порівнювати портфелі банку, проводити селекцію, нормування та лімітування позик.

3. Структура оптимальних портфелів залежить від рівня надійності відповідних оцінок і подільності чи неподільності кредитних запитів.

4. Показники ризику позик різних термінів можна перераховувати і вважати усі кредити портфеля одного терміну.

5. Для більш непередбачуваних боржників (з більшою варіацією частки неповернення) банк повинен застосовувати більшу складову кредитного ризику у вартості кредиту. В роботі знайдені відповідні кількісні оцінки для складових кредитного ризику у вартості кредитів.

6. Отримані в статті оцінки середніх сум повернення, середніх часток повернення і їх розсіювань дозволяють будувати довірчі інтервали з заданими рівнями довірчої ймовірності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. *Вітлінський В.В., Пернарівський О.В., Наконечний Я.С., Великоіваненко Г.І.* Кредитний ризик комерційного банку. Навчальний посібник. – Київ: Знання, 2000. – 252 с.
2. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: Расчет и риск. – Москва: Инфра – М, 1994. – 192 с.
3. *Кігель В.Р.* Математичні методи ринкової економіки. – Київ: Кондор, 2003. – 160 с.
4. *Пасенченко Ю.А.* Портфельний аналіз кредитного ризику. Матеріали науково-практичної конференції «Актуальні проблеми економічної кібернетики», 9–10 квітня 2008 р. Київ – КНУТД, с. 41–42.
5. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – Москва: Наука, 1965. – 400 с.
6. *Леоненков А.Л.* Решение задач оптимизации в среде MS Excel.– Санкт-Петербург: BHV, 2005.– 704 с.
7. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. – Москва: «Советское радио», 1979. – 392 с.