УДК 519.174.7

ПОБУДОВА ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

І.І. Скрильник. Полтавський національний технічний університет ім. Ю. Кондратюка.

The article is devoted to the problem of development of the innovative modelling of financial portfolio and its optimisation basing on the theory of n-dimensional patterns. The obtained n-dimensional patterns stand as different solutions of the problem of initial investment and are used to find the optimal case.

Вступ. Розвиток сучасної науки вимагає створення нових, ефективних методів розв'язання оптимізаційних задач, що виникають при вирішенні теоретичних та прикладних проблем в економічних, виробничих процесах різних галузей народного господарства. Розв'язання багатьох оптимізаційних задач з різних галузей знань зводиться до створення теоретико-графових математичних моделей. Ці моделі відображають структуру системи, зв'язки між її елементами. З дослідження ряду задач виявлено, що їх можна розв'язувати за певними шаблонами, так званими паттернами. Це дозволяє розробникам стандартизувати розв'язання багатьох класів практичних задач, створювати паттерни. Теорія паттернів пов'язана з теорією графів. Моделлю партерна є n-дольний зв'язаний граф, який описує його структуру.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. Засновником теорії паттернів вважається Ульф Гренадер, який намагався побудувати теорію логічних шаблонів для моделювання образів. Теорія паттернів ефективно використовується у різних галузях науки, а також у командному розробленні комп'ютерних додатків, в об'єктно-орієнтованому програмуванні [1]. Цю теорію можна також застосувати до розв'язання економічних задач, наприклад управління портфелем цінних паперів, задач логістики, планування та ін.

Для розв'язання таких класів задач дослідники використовували різні методи оптимізації. Фундаментальні результати у цьому напрямі належать Д. Конолі, Д. Абрамсону, М. Рандалу [2; 3]. Але такі підходи не завжди дають уяву про множину розв'язків. Тому виникла потреба створювати моделі шаблонів, які були б універсальними структурами й охоплювали б усі варіанти розв'язків задачі, а також несли в собі інформацію про зв'язки між об'єктами.

Постановка завдання. Нехай на ринку обертаються 5 видів цінних паперів q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, що мають за чотири періоди випадкову ефективність E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 (табл. 1).

Три інвестори сформували власні портфелі цінних паперів незалежно один від одного. Так, портфель першого інвестора складають цінні папери 1-го, 3-го, 4-го видів, другого – 2-го, 3-го, 5-го видів, а третього – 1-го, 3 го, 4-го, 5-го видів.

Для формування спільного портфеля кожний з учасників може виділити певну частку від власного капіталу: перший – не більше 0,2, другий – не більше 0,2, третій – не більше 0,1. На спільні кошти передбачено купівлю та розподіл цінних паперів між учасниками, але таких паперів, що вже складають їх власні портфелі.

Мета дослідження. Побудувати паттерн, перевірити правильність його побудови. Визначити найменший ризик спільного портфеля та частки капіталу, які виділить кожний інвестор на придбання певних видів паперів для його формування при такому ризику.

Методи дослідження: методи 0-1 програмування та квадратичної оптимізації для побудови математичної моделі n-мірного паттерна; евристичний метод пофарбування теоретико-графової моделі – генетичний алгоритм.

Основний матеріал і результати. Побудовано аналітичну модель для цієї задачі.

Розглянемо оптимізацію капіталовкладень у цінні папери за наявності *n* рівноправних інвесторів. У цьому випадку кожний учасник має свій власний капітал XW_1, XW_2, ... XW_n. Нехай на ринку цінних паперів обертається також *q* видів паперів, що мають ефективності E_1, E_2, ..., E_q. Кожний з учасників може сформувати свій власний портфель незалежно від інших. Задача полягає у зниженні значення максимального ризику інвесторів. Зниження значення максимального ризику інвесторів можна здійснити за допомогою формування спільного портфеля шляхом об'єднання часток капіталів інвесторів [4]. Ризик спільного

Таблиця 1. Таблиця ефективності цінних паперів за чотири періоди

Види паперів	Випадкова ефективність	1 період	2 період	3 період	4 період	Середнє значення ефективності	Відхилення від середнього значення
q_1	E_1	1,10	1,30	0,90	1,20	1,13	0,125
q_2	E_2	0,78	0,94	1,10	1,30	1,03	0,170
q_3	E_3	0,96	0,89	1,12	1,30	1,07	0,1425
q_4	E_4	0,86	0,83	1,12	1,15	0,99	0,145
q_5	E_5	1,20	1,30	1,60	1,40	1,38	0,125

портфеля обчислюється за формулами:

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{\bar{\sigma}_p}{\sqrt{q}}; \qquad (1)$$

$$\bar{\sigma}_p = \max \sigma_{p\,j};\ j = 1 \ldots n, \qquad (2)$$

де σ_{Σ} – ризик спільного портфеля, тобто ризик для кожного з учасників; $\bar{\sigma}_p$ – максимальний ризик портфелів учасників; $\sigma_{p\,j}$ – значення ризику для j-го портфеля. Якщо кожний з учасників виділяє певну частку свого капіталу для формування спільного портфеля, тоді капітал кожного з інвесторів буде дорівнювати:

$$XW_i = w_{vpi} + W_i;\ 1 \le i \le n, \qquad (3)$$

де w_{vpi} – частка капіталу і-го інвестора, котру він планує вкласти в спільний портфель; W_i – капітал, що і-ий інвестор планує вкласти у власний портфель. Цей капітал буде для кожного учасника розподілений по-різному:

$$W_i = \sum_{k=1}^{q} w_{i,k}\ , \qquad (4)$$

де q – загальна кількість ціних паперів, що обертаються на ринку цінних паперів. Капітал, виділений кожним учасником для формування спільного портфеля, у цьому разі дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{n} w_{vpi} = W_{\max}\,. \qquad (5)$$

Маємо графову модель $G(x,w)$ (рис. 1).

Таким чином, задача формування спільного портфеля відповідає моделі (6) – (9), (1).

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot x_{i,j} \cdot V_{ij} \cdot \left(w_i \cdot x_{i,j}\right)^T \to \min; \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{N} x_{i,j} \cdot w_i = W_{\max};\ 0 \le w_i \le W_{\max}; \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_{i,j} \cdot w_i = m_p; \qquad (8)$$

$$x_{i,j} + x_{k,j} \le 1;\ x_{i,j} \in \{0,1\};\ x_{k,j} \in \{0,1\}; \quad 1 \le (i,k) \le N;\ 1 \le j \le q, \qquad (9)$$

де V_p є дисперсією портфеля, що визначає в кінцевому випадку його ризик; $x_{i,j} \in \{0,1\}$ є бінарною змінною (вершина графа), значення якої дорівнює 1, якщо $x_{i,j}$ пофарбована у колір E_j та 0 в іншому разі; w_i – це вага вершини в графі (частка капіталу); $W_{\max}$ – загальний капітал; m_i – відоме математичне очікування ефективності; m_p – бажане математичне очікування ефективності портфеля, що задається інвестором. Коваріаційна матриця V_{ij} обчислюється за формулою:

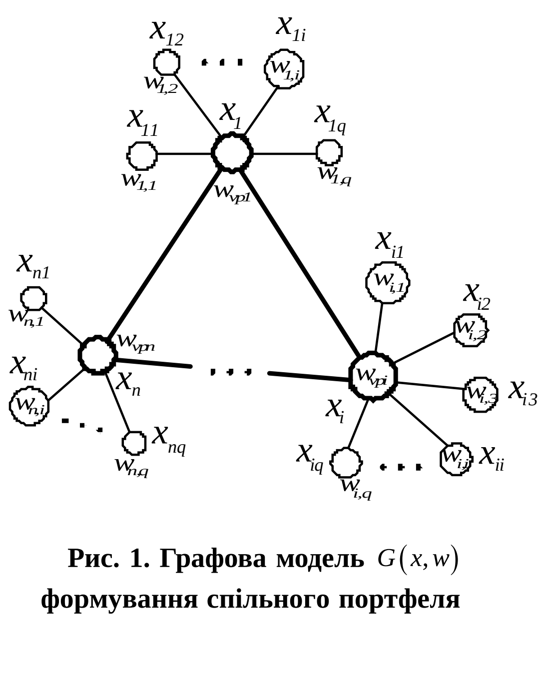

Рис. 1. Графова модель $G(x,w)$ формування спільного портфеля

Таблиця 2. Ефективність цінних паперів першого інвестора

Види паперів	Випадкова ефективність	1-й період	2-й період	3-й період	4-й період	Середнє значення ефективності	Відхилення від середнього значення
q_1	E_1	1,10	1,30	0,90	1,20	1,13	0,125
q_3	E_3	0,96	0,89	1,12	1,30	1,07	0,1425
q_4	E_4	0,86	0,83	1,12	1,15	0,99	0,145

$$V_{ij} = \mathrm{cov}\left(E_i E_j\right). \qquad (10)$$

Щоб мати уяву про варіанти розподілу капіталовкладень між учасниками спільного портфеля та визначити оптимальний варіант, побудуємо n-мірний паттерн. Проблема побудови паттерна висвітлювалася раніше [5; 6], зокрема при розробленні алгоритмів побудови паттернів з накладеними обмеженнями.

Для розв'язання поставленої задачі потрібно пофарбувати граф $G(x,w)$ у кольори з множини E та визначити матрицю $\Re(E) = x^*_{опт} \circ E$.

Математична модель описується (6-9), (1). При цьому умова перевірки правильності побудови паттерна у випадку формування спільного портфеля набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot V_{ij} \cdot w_j} \le \sigma_{\Sigma}. \qquad (11)$$

Задачу пофарбування зв'язаних графів (1, 6-9) можна розв'язати за допомогою методів оптимізації, а також вона ефективно розв'язується при застосуванні генетичного алгоритму [7; 8].

Розв'язок. Спільний портфель, сформований трьома інвесторами, є графом K_3. Визначимо найменший ризик спільного портфеля для кожного з учасників. Моделлю власних портфелів кожного з учасників є підграфи. Вони являють собою структури у вигляді зірок, що знаходяться у кожній вершині графа K_3. Для першого інвестора – це підграф $G_1^{'}$ з відповідними видами цінних паперів q_1, q_3, q_4 (табл. 2).

Коваріаційна матриця для портфеля першого інвестора представлена у табл. 3.

Аналогічно визначаємо коваріаційні матриці для другого та третього інвестора.

Оскільки перший інвестор вклав свої кошти у три види цінних паперів, то пофарбування графової структури, що відповідає його портфелю, визнається вектором $x_1^* = (100\ 010\ 001)$. Пофарбування графової структури, що відповідає другому портфелю, – вектором $x_2^* = (100\ 010\ 001)$, що відповідає третьому портфелю, – вектором $x_3^* = (1000\ 0100\ 0010\ 0001)$.

Визначимо частки капіталу, вкладені у кожний вид цінних паперів кожним з трьох інвесторів відповідно до їх власних портфелів. Для цього використаємо рівняння (6), (7), (9). У результаті маємо, що перший учасник повинний вкласти капітал у цінні папери власного портфеля у таких частках: $w_1 = 0,3442$, $w_2 = 0,3016$, $w_3 = 0,3542$. При цьому коваріація портфеля першого інвестора дорівнює $V_1 = 0,0075$, а ризик – $\sigma_1 = 0,0868$.

Другий учасник має вкласти капітал у таких частках: $w_1 = 0,2391$, $w_2 = 0,3553$, $w_3 = 0,4056$. Коваріація портфеля другого інвестора дорівнює $V_2 = 0,0089$, а ризик – $\sigma_2 = 0,0942$.

Третій учасник – у частках $w_1 = 0,2561$, $w_2 = 0,2242$, $w_3 = 0,2635$, $w_4 = 0,2563$. Коваріація портфеля третього інвестора дорівнює $V_3 = 0,0056$, а ризик – $\sigma_3 = 0,0748$.

Відповідно до цього розв'язку визначаємо ризик спільного портфеля цінних паперів:

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{\max\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)}{\sqrt{5}} = 0,0421,$$

Таблиця 3. Коваріаційна матриця цінних паперів першого інвестора

V_{ij}	E_1	E_3	E_4
E_1	0,021875	-0,00569	-0,0105
E_3	-0,00569	0,024969	0,0216
E_4	-0,0105	0,0216	0,02125

коваріація спільного портфеля дорівнює:

$$V_{\Sigma} = \sigma_{\Sigma}^2 = 0,0018.$$

Знаючи найменший ризик спільного портфеля, потрібно визначити, який цінний папір з п'яти видів буде придбаний кожним учасником для формування спільного портфеля (при цьому враховується склад кожного власного портфеля) і яку частку свого капіталу кожний для цього виділить. Граф K_3 потрібно пофарбувати у кольори з множини фарб $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$.

Оскільки спільний портфель сформовано з п'яти видів цінних паперів, то коваріаційна матриця, обчислена за допомогою формули (10), має вигляд, представлений у табл. 4.

Тоді задача знаходження оптимального портфеля полягає у пофарбуванні графа K_3 у кольори з множини фарб $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ так, щоб $V_p = V_{\Sigma}$. Задача побудови паттерна формулюється таким чином:

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot x_{i,j} \cdot V_{ij} \cdot \left(w_i \cdot x_{i,j}\right)^T = V_{\Sigma}; \quad (12)$$

$$x_{i,j} + x_{k,j} \le 1;\ x_{i,j} \in \{0,1\};\ x_{k,j} \in \{0,1\}; \quad (13)$$
$$1 \le (i,k) \le N;\ 1 \le j \le q.$$

$$x_{1,4} = 0;\ x_{1,5} = 0;\ x_{2,2} = 0;\ x_{2,4} = 0;\ x_{3,5} = 0. \quad (14)$$

Отриманий розв'язок задачі за допомогою рівнянь (12), (13), (14) дорівнює $x^*_{опт} = (00010\ 00001\ 00100)$, тобто при найменшому ризику спільного портфеля перший учасник вкладе свою частку капіталу в 4-й вид цінних паперів, другий – у 5-й, а третій – у 3-й. Маємо перший варіант формування спільного портфеля $(4\ 5\ 3)$. Відповідно на закупівлю цих паперів будуть виділені такі частки капіталів кожного інвестора: $w_1 = 0,0929$, $w_2 = 0,2545$, $w_3 = 0,0835$.

Другий варіант формування спільного портфеля $(3\ 5\ 4)$. У цьому випадку:

$$x^*_{опт} = (00100\ 00001\ 00010).$$

Одержуємо розв'язок:

$$w_1 = 0,1832,\ w_2 = 0,1504,\ w_3 = 0,1442.$$

І, нарешті, третій варіант формування спільного портфеля $(4\ 3\ 5)$. У цьому випадку:

$$x^*_{опт} = (00010\ 00100\ 00001).$$

Отримуємо розв'язок:

$$w_1 = 0,1442,\ w_2 = 0,1832,\ w_3 = 0,1504.$$

У результаті побудовано паттерн:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Одержаний паттерн можна представити у вигляді таблиці (табл. 5).

На основі цієї таблиці та відомостей про частки капіталу кожного з учасників, вкладених у спільний портфель, маємо табл. 6.

Оскільки для формування спільного портфеля

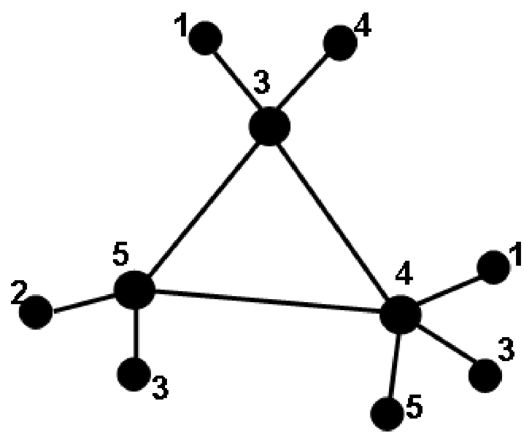

Рис. 2. Графова модель сформованого спільного портфеля

Таблиця 4. Коваріаційна матриця цінних паперів для спільного портфеля

V_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	0,021875	-0,00125	-0,00569	-0,0105	-0,01438
E_2	-0,00125	0,0371	0,027325	0,0248	0,01825
E_3	-0,00569	0,027325	0,024969	0,0216	0,012438
E_4	-0,0105	0,0248	0,0216	0,02125	0,017
E_5	-0,01438	0,01825	0,012438	0,017	0,021875

Таблиця 5. Таблиця варіантів спільного портфеля

Учасники	Перший	Другий	Третій	Ризик
Варіант 1	4	5	3	0,042
Варіант 2	3	5	4	0,042
Варіант 3	4	3	5	0,042

Таблиця 6. Розподіл капіталовкладень

Учасники	Перший	Другий	Третій
Варіант 1	0,09	0,25	0,08
Варіант 2	0,18	0,15	0,14
Варіант 3	0,14	0,18	0,15

Таблиця 7. Коваріаційна матриця цінних паперів спільного портфеля

V_{ij}	E_3	E_5	E_4
E_3	0,025	0,012	0,022
E_5	0,012	0,022	0,017
E_4	0,022	0,017	0,021

перший учасник може виділити не більше 0,2 частки від власного капіталу, другий – не більше 0,2, третій – не більше 0,1, то другий варіант розподілу капіталовкладень є найбільш прийнятним.

Аналіз одержаних результатів. Перевіримо правильність побудови паттерна Π, виходячи з умови (11).

Оскільки спільний портфель сформований з паперів виду q_3, q_5, q_4, що мають відповідно ефективність E_3, E_5, E_4, то коваріаційна матриця цінних паперів матиме вигляд, представлений у табл. 11.

На рис. 2 зображено графову модель сформованого оптимального портфеля, що відповідає другому варіанту розв'язку побудованого паттерна.

Обчислення за формулою (11) наведено у табл. 8. Сума ризиків портфелів інвесторів дорівнює:

$$\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot V_{ij} \cdot w_j} = 0,0379 .$$

Висновки. Оскільки ризик спільного портфеля дорівнює $\sigma_\Sigma = 0,0421$, то умова (11) виконується, а значить – паттерн побудовано правильно.

Ця задача має три варіанти розв'язку. Оптимальним є другий варіант.

Поставлена задача розв'язана за допомогою нового підходу з використанням побудови n-мірного паттерна на основі пофарбування відповідної теоретико-графової моделі зі зваженими вершинами.

Створено комп'ютерні програми «Pattern Designer Toolbox», «Latin Square Designer», «Pattern».

Отримані алгоритми можуть бути використані у сферах управління, планування ресурсів, соціології, логістиці. Автор вважає перспективним застосування розробленого підходу для розв'язання оптимізаційних економічних задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гренандер, У. Лекции по теории образов : Т. 3 : Регулярные структуры. / У. Гренандер; пер. с англ. И. Гуревича. – М. : Мир, 1983. – 430 с.
2. Connolly, D. General Purpose Simulated Annealing / D. Connolly // The journal of the operational research society: mathematical programming in honour of Ailsa land. – 1992. – V. 43, № 5. – P. 495-505.
3. Abramson, D. A Simulated Annealing Code for General Integer Linear Programs / D. Abramson, M. Randall // Annals of Operations Research. – 1999. – V. 86. – P. 3-24.
4. Скрильник, І. І. Управління портфелем цінних паперів у випадку декількох інвесторів /

Таблиця 8. Таблиця перевірки побудови паттерна

$w_i \cdot V_{ij} \cdot w_j$	w_3	w_5	w_4	$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot V_{ij} \cdot w_j$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot V_{ij} \cdot w_j}$
w_3	$2,7E^{-5}$	$4,5E^{-5}$	$4,2E^{-5}$	0,000114	0,0106964
w_5	$4,5E^{-5}$	$7,62E^{-5}$	$7,05E^{-5}$	0,000192	0,0138605
w_4	$4,2E^{-5}$	$7,05E^{-5}$	$6,51E^{-5}$	0,000178	0,013324

І. І. Скрильник // Математичні методи в економіці : тези доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції “Стратегические вопросы мировой науки”. – 2009, 7-15 лютого 2009 р. – Przemysl : Nauka i studia, 2009. – С. 65-68.

5. Скрильник, І. І. Алгоритм побудови n-мірних патернів з накладеними обмеженнями / І. І. Скрильник // Вісник Запорізького національного університету. – 2006. – № 1. – С. 110-116. – (Серія: Фізико-математичні науки. Біологічні науки).

6. Скрильник, І. І. Проблема побудови n-мірних паттернів / І. І. Скрильник // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – 2009. – № 1 (131), ч. 2. – С. 245-252.

7. Mertz, P. Genetic algorithms for binary quadratic programming / P. Mertz, B. Freisleben // In Proceedings of the 1999 International Genetic and Evolutionary Computational Conference (GECCO’99), Morgan Kaufmann. – 1999.

8. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / [Вороновский Г. К., Махотило К. В., Петрашов С. М., Сергеев С. А.]. – Х. : Основа, 1997. – С. 107-112.

УДК 519.174.7

Скрильник Ірина Іванівна, старший викладач кафедри економічної кібернетики Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка. **Побудова оптимізаційної моделі формування портфеля цінних паперів**. Розглянуто інноваційне моделювання оптимізації портфеля цінних паперів з використанням теорії n-мірних паттернів. Побудовані n-мірні паттерни дають уяву про варіанти розподілу капіталовкладень та можливість знаходження оптимального розв’язку.

Ключові слова: n-мірний паттерн, графова модель, частка капіталу, ризик, ефективність цінних паперів, коваріація, математичне сподівання.

УДК 519.174.7

Скрыльник Ирина Ивановна, старший преподаватель кафедры экономической кибернетики Полтавского национального технического университета им. Ю. Кондратюка. **Построение оптимизационной модели формирования портфеля ценных бумаг**. Рассматривается инновационное моделирование оптимизации портфеля ценных бумаг с использованием теории n-мерных паттернов. Построенные n-мерные паттерны дают представление о вариантах распределения капиталовложений и возможности нахождения оптимального решения.

Ключевые слова: n-мерный паттерн, графовая модель, доля капитала, риск, эффективность ценных бумаг, ковариация, математическое ожидание.

UDC 519.174.7

Skrylnyk Irina Ivanivna, first assistant of professor of economical cybernetics speciality of Poltava national technical university named after Yu. Kondratyuk. **Development and optimisation of the model of stakeholder portfolio.** The article is devoted to the problem of development of the innovative modelling of financial portfolio and its optimisation basing on the theory of n-dimensional patterns. The obtained n-dimensional patterns stand as different solutions of the problem of initial investment and are used to find the optimal case.

Keywords: n-dimensional pattern, graph model, the share capital, risk, performance securities, covariance, expectation.

Стаття отримана редакцією 12.03.2012 р.