МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ Й ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.171

УДОСКОНАЛЕННЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТОРГОВЕЛЬНОЇ МЕРЕЖІ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

О. Г. Климко, М. С. Вольна.
Полтавський національний технічний університет ім. Ю. Кондратюка

Стаття отримана редакцією 03.09.2013 р.

Вступ. У сучасних умовах господарювання важливим є внесок кожної сфери економічної діяльності в розвиток національної економіки. Поряд з виробничими галузями не меншу роль відіграє торгівля, завдяки якій підтримується збалансованість виробництва і споживання, формується суттєва частка валової доданої вартості в Україні, забезпечується робочими місцями економічно активне населення.

Проте на споживчому ринку пропозиція частіше перевищує попит. Торговельні об’єкти ведуть запеклу боротьбу за клієнтів, намагаючись зацікавити покупця будь-яким можливим способом. Виникають нові форми супермаркетів, покликані задовольнити найвибагливіших відвідувачів. Звичайним торговим павільйонам стає все складніше виживати в таких умовах. Підприємці, які мають власну мережу магазинів, усе більше зіштовхуються з проблемою раціонального розміщення торговельних точок, складських приміщень, що є одним з вагомих факторів ведення конкурентної боротьби. Знайти розв’язок задач оптимального розміщення торгових об’єктів можна за допомогою мереж або графів.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. За останні роки з’явилася велика кількість наукових робіт, у яких використовуються можливості теорії графів не тільки в математиці й традиційних додатках – хімії та електротехніці, а й у соціології, лінгвістиці, економіці та генетиці. Наочність теоретико-графових структур дозволяє зробити доступними для широкого кола науковців складні прикладні задачі. Відомості щодо теоретичного й практичного застосування теорії графів, її методів та інструментів можна знайти в працях А. А. Зикова [1], Н. Кристофідеса [2], В. Н. Салія та А. М. Богомолова [4], Р. Уілсона [6], Р. Дістеля [7].

Постановка завдання. Завдання роботи полягає у вирішенні питання застосування теорії графів, її методів та інструментів для оптимізації розміщення торгівельної мережі для зменшення витрат на транспортування товарів.

Отже, **метою** статті є вибір оптимального розміщення складського приміщення та визначення найкоротших маршрутів транспортування товару в межах торговельної мережі приватного підприємства «Торговий дім «Моринський» у місті Полтава. Для досягнення поставленої мети застосовано алгоритми визначення: 1) найменшої домінуючої множини графа, 2) мінімальних відстаней та маршрутів між об'єктами (алгоритм Флойда); 3) медіани графа.

Основний матеріал і результати. Малі та середні фірми, що обмежують збут своєї продукції одним або декількома довколишніми районами, мають, як правило, один склад. Територіальне розміщення складів та їх кількість визначаються потужністю матеріальних потоків і їх раціональною організацією, попитом на ринку збуту, розмірами районів збуту й концентрацією в ньому споживачів, відносним розташуванням постачальників й покупців, особливостями комунікаційних зв'язків і т.д. Слід мати на увазі, що завдання розміщення та формування складської мережі – оптимізаційне, оскільки, з одного боку, будівництво нових і купівля діючих складів та їх експлуатація пов'язані зі значними капіталовкладеннями, а з іншого – треба забезпечити (разом з підвищенням рівня обслуговування споживачів) скорочення витрат за рахунок максимального наближення складів до клієнтів.

У загальному вигляді доцільно зобразити цю ситуацію у вигляді графа, який складається з точок (вершин), що відображають основні елементи ситуації, та лінії (ребра), які з'єднують пари цих вершин та відображають зв'язки між ними.

Граф, або неорієнтований граф, G − це впорядкована пара $G = (V, S)$, для якої виконуються такі умови:

V − множина вершин або вузлів,

S − множина пар (у випадку неорієнтованого графа − невпорядкованих) вершин, які називають ребрами.

Визначення найменшої домінуючої множини графа (найменшої зовнішньої стійкості графа) дозволяє знайти об'єкти, які можуть бути використаними як складське приміщення [1].

Найменшою домінуючою множиною графа називається множина $R \subseteq V$, яка містить мінімальну кількість елементів і задовольняє умову

$$(\forall v_j \in V - R)(\exists v_j \in R)(s_{ij} = 1). \tag{1}$$

Граф $G = (V, S)$, надається множиною вершин $V = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ і матрицею суміжності $S = \left[S_{ij}\right]$ порядку n, де

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ та } v_j - \text{з'єднані ребром;} \\ 0 - \text{у противному разі.} \end{cases} \tag{2}$$

Цілочислові змінні − x_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, **де**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } v_i \text{ входить у шукану множину;} \\ 0 - \text{у противному разі.} \end{cases} \tag{3}$$

Цільова функція має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to min. \tag{4}$$

Обмеження:

1. Кожна вершина графа, що не входить у домінуючу множину, повинна бути видимою із його вершини хоча б один раз:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik}.x_{ik} \geq 1; \;\; k=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(5)}$$

2. Область допустимих значень:

$$0 \leq x_{il} \leq 1, \;\; i=\overline{1,n}, \;\; j=\overline{1,n}. \qquad (6)$$

Для вибору оптимального розміщення складського приміщення в межах уже існуючої торговельної мережі (рис.1), подамо її у вигляді графа.

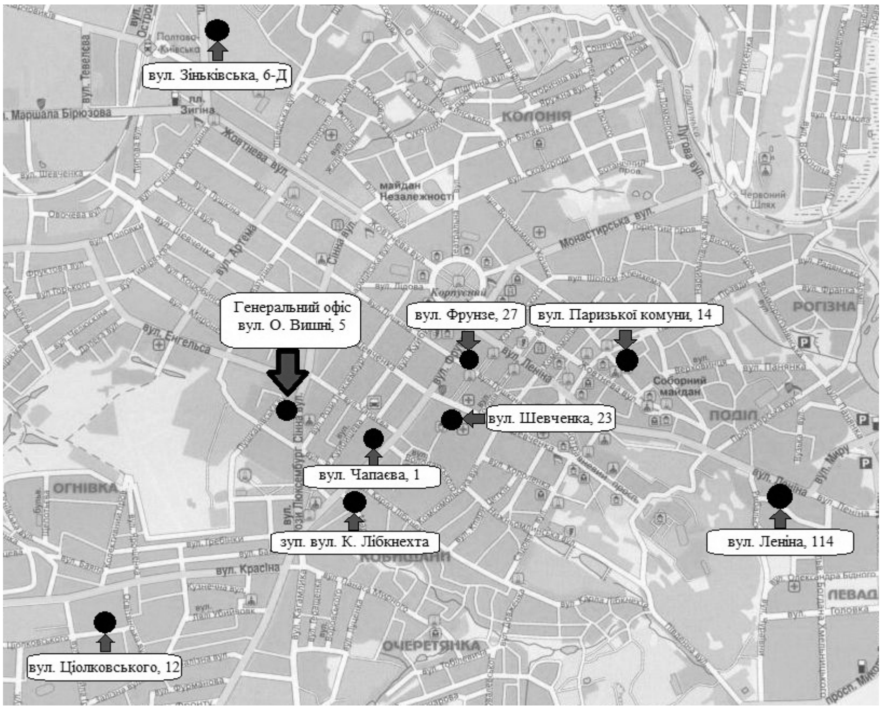

Рис. 1. Об'єкти торговельної мережі

Відповідно з'єднавши об'єкти торговельної мережі, отримаємо неорієнтований граф. Слід зазначити, що кожна пара об'єктів не є з'єднаними виключно однією вулицею, щоб дістатися того чи іншого пункту необхідно проїхати відповідний маршрут, що і з'єднує вершини графа. Для маршрутів було обрано мінімальні відстані між точками.

Отже, вершинами графа є торговельні об'єкти мережі приватного підприємства «Торговий дім «Моринський» у місті Полтава, а ребрами − маршрути (рис.2).

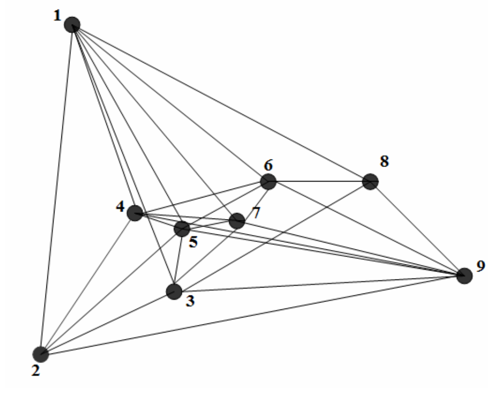

Рис. 2. Граф торговельної мережі

Зображений граф є повним, тому що всі 9 точок попарно з'єднані між собою, та мають прямий доступ одна до одної.

За результатами застосування алгоритму 1 (визначення найменшої домінуючої множини графа), об'єкт, розміщений у точці 1 (вул. Зіньківська, 6-Д), є найменшою домінуючою множиною та може контролювати райони функціонування інших точок. У цій точці можна розмістити складське приміщення (рис.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		вул. Зіньківська, 6-Д	вул. Ціолковського, 12	вул. К. Лібкнехта	вул. О. Вишні, 5	вул. Чапаєва, 1	вул. Фрунзе, 27	вул. Шевченка, 23	вул. П. Коммуни, 14	вул. Леніна, 114		Змінні Xi
2	вул. Зіньківська, 6-Д	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1		1
3	вул. Ціолковського, 1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1		0
4	вул. К. Лібкнехта	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1		0
5	вул. О. Вишні, 5	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1		0
6	вул. Чапаєва, 1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1		0
7	вул. Фрунзе, 27	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1		0
8	вул. Шевченка, 23	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1		0
9	вул. П. Коммуни, 14	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1		0
10	вул. Леніна, 114	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**		0
11		Загальне бачення графа										ЦФ
12		1	1	1	1	1	1	1	1	1		1

Рис. 3. Знаходження найменшої домінуючої множини точок графа

Для підтвердження чи спростування результатів проведено додаткове дослідження.

Оскільки ця мережа торговельна, то вагомим етапом для поліпшення її функціонування є розрахунок відстаней маршрутів, саме вони дозволять повністю дослідити існуючу мережу та виробити подальші рекомендації щодо оптимального розміщення торгових об'єктів. Цю вимогу можна задовольнити за допомогою обчислення мінімальних відстаней та маршрутів за алгоритмом Флойда [2].

У початковій матриці ваг $c_{ii} = 0$ для всіх $i = 1,2,3,...,n$ і $c_{ij} = \infty$, якщо у графі відсутня дуга (x_i, x_j).

Крок 1. Присвоюємо початкові значення $k = 0$.

Крок 2. $k = k + 1$.

Крок 3. Для усіх $i \neq k$, таких, що $c_{ik} \neq \infty$, і для всіх $j \neq k$, таких, що $c_{kj} \neq \infty$, вводимо операцію

$$c_{ij} = min[c_{ij}, (c_{ik} + c_{kj})] . \quad (7)$$

Крок 4. Якщо $c_{ii} < 0$, то в графі G існує цикл від'ємної ваги, що містить вершину x_i і розв'язку немає. *Закінчення.*

Якщо $c_{ii} \geq 0$ і $k = n$, то отримано розв'язок. Матриця $[c_{ij}]$ дає довжину всіх найкоротших шляхів. *Закінчення.*

Якщо $c_{ii} \geq 0$, але $k < n$, то повернутися до кроку 2 [2].

Найкоротші ж шляхи можна знайти за заданими довжинами за допомогою рекурсивної процедури. При цьому, як до повернення до вагової матриці C, зберігається та оновлюється друга $(n \times n)$ матриця $\Theta = [\theta_{ij}]$. Елемент θ_{ij} вказує вершину, що є попередньою вершині x_j у найкоротшому шляху від x_i до x_j.

Відповідно до формули (7) на кроці 3 алгоритм оновлення матриці має такий вигляд:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \theta_{k,j}, \text{ якщо } (c_{ik} + c_{kj}) < c_{ij}, \text{ що визначається у} \\ \text{квадратних дужках формули } (7) \\ \text{не змінюється }, \text{ якщо } c_{ij} \le (c_{ik} + c_{kj}) \,. \end{cases} \tag{8}$$

У кінці алгоритму 2 (визначення мінімальних відстаней та маршрутів між об'єктами), найкоротші шляхи отримано безпосередньо із завершальної матриці Θ. Цей метод можна використовувати як до невід'ємних, так і до будь-яких вагових матриць.

Застосувавши значення відстаней між об'єктами торговельної мережі приватного підприємства «Торговий дім «Моринський» та сформувавши матрицю маршрутів (рис. 4), визначимо перевірку всіх елементів матриці за допомогою трикутного оператора на можливість їх поліпшення.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5	6	7	8	9
1) вул. Зіньківська, 6-Д	0	5	5	3	3	3	3	4	5		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2) вул. Ціолковського, 12	5	0	3	3	3	3	3	4	5		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3) вул. К. Лібкнехта	5	3	0	2	2	2	2	2	3		3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4) вул. О. Вишні, 5	3	3	2	0	1	2	2	3	4		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5) вул. Чапаєва, 1	3	3	2	1	0	1	1	2	3	k=0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6) вул. Фрунзе, 27	3	3	2	2	1	0	1	1	2		6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7) вул. Шевченка, 23	3	3	2	2	1	1	0	2	2		7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8) вул. П. Коммуни, 14	4	4	2	3	2	1	2	0	2		8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9) вул. Леніна, 114	5	5	3	4	3	2	2	2	0		9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Рис. 4. Початкові дані для знаходження центра графа

Матриця маршрутів залишається незмінною, тому що проміжні пункти відсутні та точки з'єднані. Перевірка елементів матриці є ітераційним процесом. Виконуючи останню ітерацію, визначимо дані для знаходження центра графа − вершини, максимальна відстань між якою і будь-якою іншою вершиною є найменшою з усіх можливих (рис. 5).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		max		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1) вул. Зіньківська, 6-Д	0	5	5	3	3	3	3	4	5		5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2) вул. Ціолковського, 12	5	0	3	3	3	3	3	4	5		5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3) вул. К. Лібкнехта	5	3	0	2	2	2	2	2	3		5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4) вул. О. Вишні, 5	3	3	2	0	1	2	2	3	4		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5) вул. Чапаєва, 1	3	3	2	1	0	1	1	2	3	k=9	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6) вул. Фрунзе, 27	3	3	2	2	1	0	1	1	2		3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7) вул. Шевченка, 23	3	3	2	2	1	1	0	2	2		3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8) вул. П. Коммуни, 14	4	4	2	3	2	1	2	0	2		4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9) вул. Леніна, 114	5	5	3	4	3	2	2	2	0		5	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Рис. 5. Обчислення найменших відстаней графа

За результатами розрахунків центром графа можуть бути три торговельні об'єкти, що розміщені по вулицях: Чапаєва, 1, Фрунзе, 27 та Шевченка, 23, тому що вони знаходяться на мінімальній відстані від інших об'єктів.

У випадку розміщення складу потрібно звернути увагу на географічне розміщення торговельних точок. Об'єкти по вул. Чапаєва, 1 та Шевченка, 23 розміщено в середовищі скупчень торговельних підприємств, тому орендна плата буде вищою, ніж на вул. Фрунзе, 27. Також треба врахувати доступність та зручність доставок до складських приміщень.

Оскільки мережа торговельних точок не є досить великою, то для її функціонування достатньо буде 1-го складу.

Для подальшого дослідження застосовано алгоритм 3 (знаходження медіани графа).

Медіана графа – така вершина *x*, сумарна відстань від якої до всіх інших вершин графа мінімальна. Сумарна відстань від вершини до всіх інших вершин – *CBB(i)* визначається співвідношенням $CBB(i) = \Sigma c_{i,j}$ – сумарна відстань від вершини *i* до всіх *j* .

$$CBB(x) = min\,\{CBB(i)\}. \tag{9}$$

Зауважимо, що сума значень елементів i-го рядка матриці C^N відстаней вершин – вершина дорівнює сумі відстаней від вершини до всіх інших вершин графа, тобто дорівнює $CBB(i)$. Отже, медіана відповідає будь-якому рядку матриці C^N, для якої сума значень елементів мінімальна. Елементи матриці C^N можуть бути розраховані за допомогою алгоритму Флойда.

Алгоритм пошуку медіани:

Крок 1. Знаходимо C_0 – матрицю, елементами якої є $c_{i,j}$ – довжини найкоротших дуг.

Крок 2. Шукаємо C^N – матрицю довжин найкоротших шляхів між усіма вершинами графа за Флойдом.

Крок 3. Визначаємо $CBB\ (i)$.

Крок 4. З усіх $CBB\ (i)$ вибираємо найменше значення, відповідна вершина і буде медіаною.[3]

За алгоритмом Флойда попередньо було розраховано (рис. 5) мінімальні відстані між усіма точками графа, тому для знаходження медіани потрібно знайти лише сумарні відстані по кожному об’єкту та обрати з них мінімальний показник, що відповідно і є медіаною графа (рис. 6).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		CBB
1) вул. Зіньківська, 6-Д	0	5	5	3	3	3	3	4	5		31
2) вул. Ціолковського, 12	5	0	3	3	3	3	3	4	5		29
3) вул. К. Лібкнехта	5	3	0	2	2	2	2	2	3		21
4) вул. О. Вишні, 5	3	3	2	0	1	2	2	3	4		20
5) вул. Чапаєва, 1	3	3	2	1	0	1	1	2	3	k=9	16
6) вул. Фрунзе, 27	3	3	2	2	1	0	1	1	2		15
7) вул. Шевченка, 23	3	3	2	2	1	1	0	2	2		16
8) вул. П. Коммуни, 14	4	4	2	3	2	1	2	0	2		20
9) вул. Леніна, 114	5	5	3	4	3	2	2	2	0		26

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Рис. 6. Медіана графа

Медіаною графа є така вершина x_i, для якої $CBB(x) = min\{CBB(i)\}$. Для торгової мережі приватного підприємства об’єкт за адресою вул. Фрунзе, 27 має мінімальне значення $CBB\ (6) = 15$ (рис. 7).

Таким чином, об’єкт по вул. Фрунзе, 27 має перевагу над попередньо розглянутими торговельними точками, тому що він має оптимальне розміщення стосовно торговельних об’єктів мережі.

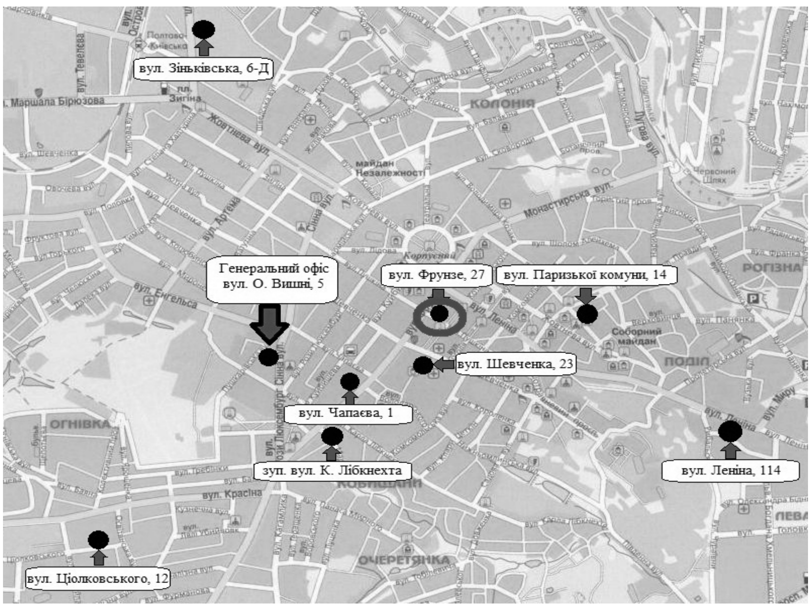

Рисунок 7. Медіана графа

Висновки та перспективи подальших наукових розробок у цьому напрямі. Проаналізовано результати дослідження за трьома алгоритмами: метод найменшої домінуючої множини графа, мінімальних відстаней і маршрутів між об'єктами та медіани графа.

Рекомендовано для розміщення складського приміщення використовувати торговий об'єкт за адресою: вул. Фрунзе, 27.

Перевага таких алгоритмів полягає в тому, що вони можуть використовуватися для будь-яких мереж: лікарень, пожежних, поліцейських відділків, аптек та магазинів різного профілю.

Визначення графа є настільки загальним, що цим терміном можна описувати безліч подій та об'єктів повсякденного життя. Високий рівень абстракції й узагальнення дозволяє використовувати типові алгоритми теорії графів для вирішення зовнішньо несхожих задач у транспортних і комп'ютерних мережах, будівельному проектуванні, молекулярному моделюванні тощо.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. − М.: Наука, 1987. − 384 с.
2. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. − М.: Мир, 1978. − 432 с.
3. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. / Э. Майника: пер. с англ. − М.: Мир, 1981. − 323 с.
4. Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. − М.: Физматлит, 1997. − 368 с.
5. Домнин, Л. Н. Элементы теории графов: учеб. пособие / Л.Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та., 2007. − 144 с.
6. Уилсон, Р. Введение в теорию графов / Р.Уилсон. − М.: Мир, 1977. − 208 с.
7. Дистель, Р. Теория графов / Р. Дистель. − М.: Изд-во Инст-та математики, 2002. − 336 с.
8. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари: пер. с англ. − М.: Едиториал УРСС, 2003. − 296 с.

УДК 519.171

Климко Олена Генріхівна, старший викладач кафедри економічної кібернетики. **Вольна Марія Сергіївна**, студентка. Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка. **Удосконалення функціонування торговельної мережі за допомогою теорії графів**. Застосовано апарат теорії графів для поліпшення функціонування торговельної мережі. Визначено найменшу домінуючу множину, мінімальні відстані та маршрути за алгоритмом Флойда, центр графа. Розроблено рекомендації щодо розміщення загального складу торговельної мережі.

Ключові слова: граф, центр графа, радіус графа, дуга, орієнтований граф, теорія графів, алгоритм Флойда, мережа, шлях, найкоротші відстані, матриця, рекурсивна процедура.

УДК 519.171

Климко Елена Генриховна, старший преподаватель кафедры экономической кібернетики. **Вольная Мария Сергеевна**, студентка. Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка. **Усовершенствование функционирования торговой сети при помощи теории графов**. Применен аппарат теории графов для улучшения функционирования торговой сети. Определено наименьшее доминирующее множество, минимальные расстояния и маршруты при помощи алгоритма Флойда, центр графа. Разработаны рекомендации по размещению общего склада торговой сети.

Ключевые слова: граф, центр графа, радиус графа, дуга, ориентированный граф, теория графов, алгоритм Флойда, сеть, путь, кратчайшее расстояние, матрица, рекурсивная процедура.

UDC 519.171

Klymko Helena, a senior teacher of the department of economic cybernetics. **Volna Maria**, a student. Poltava national technical Yuri Kondratyuk university. **The improvement of the trading network using graph theory**. Apparatus used graph theory to improve the functioning of the trading network. Defined minimum dominating set, minimum distances and routes using Floyd algorithm, the center of the graph. Developed recommendation on placing of a general store retail chain.

Keywords: graph, the center of the graph, the graph radius, arc, orientirovanniy graph, graph theory, Floyd's algorithm, the network path, the shortest distance matrix, a recursive procedure.