

УДК: 685.34:65.012.2

С.В. Беляєва

## ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ЗАМІНИ ВИРОБНИЧОГО УСТАТКУВАННЯ

Проаналізовані умови, за яких приймаються рішення про використання методу динамічного програмування. Сформульовані функціональні обмеження та критерії оптимальності заміни устаткування в цілочисельній економіко-математичній моделі задачі.

The article contains an analysis of conditions, when decisions about the dynamic programming methods are adopted. The functional limitations and criteria of the optimal equipment replacement problems in the integer economic-mathematical model task are formulated.

Ключові слова: заміна устаткування, оптимізація, побудова ЕМ моделі, прибуток, нове обладнання, оптимальний варіант.

Важливе значення для ефективного використання виробничого устаткування має заміна його в оптимальні терміни, які забезпечують мінімізацію сумарних капітальних та експлуатаційних витрат. Якщо проводити заміну устаткування раніше оптимального терміну, то одержимо економію експлуатаційних витрат, але більшою мірою виступуть капітальні витрати. При збільшенні терміну роботи устаткування його експлуатаційні характеристики погіршуються і відповідно зростають витрати на підтримку його в потрібному стані. Тому при заміні устаткування після оптимального терміну більшою мірою збільшуються експлуатаційні витрати.

Поставлена задача належить до одного з класів задач дослідження операцій. Сутністю задачі є визначення термінів заміни обладнання на нове, за яких сумарні експлуатаційні та капітальні витрати будуть мінімальними. Розв'язанням цієї проблеми займалися як зарубіжні, так і вітчизняні науковці з початку 60-х років минулого століття.

Ця проблема привертала увагу багатьох видатних математиків та економістів. Зокрема, Е. Грант вирішив задачу заміни обладнання за умови, що величина відсотку на капітал залишається постійною, а витрати на експлуатацію обладнання не зменшуються [5]. В. Тер-

борг розробив модель заміни, яка дозволяє визначити швидкість старіння обладнання [5]. Р. Беллман запропонував використати для вирішення задачі заміни метод функціональних рівнянь теорії динамічного програмування. Л. Гудман запропонував методику вимірювання тривалості служби вузлів [7].

Перелік усіх робіт зарубіжних авторів та їх розробок стосовно моделювання задачі заміни обладнання наведено в роботі [5].

Серед вітчизняних науковців вирішенню цієї проблеми присвячені праці Зайченко Ю.П. [4], Іспіряна Г.П. [6], Федоренка І.К. [4], Рожка В.Д. [1].

Методичні підходи до моделювання задачі заміни обладнання з використанням методів лінійного програмування запропоновані в роботі [1].

Для визначення оптимального терміну заміни пропонуються методи динамічного програмування, методи теорії відновлення та інші [2, 5].

Метою статті є аналіз результатів вирішення задачі методом динамічного програмування та розробка умов, за яких приймається рішення про використання цього методу. Представлена також цілочисельна ЕМ модель, яка забезпечує максимізацію сумарного прибутку за рахунок вибору оптимальних варіантів заміни устаткування.

Розглянемо методику оптимізації заміни устаткування на основі динамічного програмування та визначимо умови, за яких приймається та чи інша стратегія оптимізації. Вирішення цієї задачі передбачає поетапну оптимізацію: дослідження останнього етапу та його умовна оптимізація, на основі цих розрахунків визначається оптимальний стан для попереднього етапу.

Планується заміна однотипного устаткування в потоці підприємства легкої промисловості на  $T$  років. Для заміни устаткування підприємство на перший рік планує витратити грошові кошти в сумі  $Q$ . Встановлені витрати на заміну одиниці старого устаткування більш ефективним в сумі  $C$ . Прибуток від заміни одиниці устаткування складає величину  $\square$ . Передбачається, що заміна устаткування на другий, третій та останній рік буде проводитися за рахунок прибутку від функціонування нового устаткування.

В задачі необхідно визначити величину прибутку, який потрібно використати для заміни устаткування в наступні роки, щоб одержати максимальний додатковий прибуток за всі роки.

Приймемо позначення:  $t$  – індекс року;  $K_t$  – кількість одиниць нового устаткування, яке буде введено в експлуатацію в  $t$ -му році;  $(1-d_t)$  – частка прибутку, яка залишається на кінець  $t$ -го року.

Тоді невикористана сума прибутку після  $t$ -го року складає:

$$Rt = pK_t (1-d_t) \quad (1)$$

За  $T$  років цей прибуток складе суму  $P$ , яку необхідно максимізувати:

$$P = p \sum_{t=1}^{T-1} K_t (1-d_t) + pK_T \rightarrow \max. \quad (2)$$

Розрахуємо та проаналізуємо використання сумарного прибутку за три роки:

$$P_3 = pK_1 (1-d_1) + pK_2 (1-d_2) + pK_3. \quad (3)$$

Кількість нового обладнання, яке буде встановлене в першому році, складе:

$$K_1 = \frac{Q}{C}. \quad (4)$$

Визначимо кількість одиниць нового обладнання в другому році:

$$K_2 = \frac{\pi K_1 d_1}{C} + K_1 = K_1 \left( \frac{\pi}{C} d_1 + 1 \right), \quad (5)$$

де  $\square K_1 d_1$  – прибуток, який використовується для заміни устаткування в другому році.

В третьому році кількість одиниць нового устаткування складе:

$$K_3 = K_2 + \frac{\pi K_2 d_2}{C} = K_2 \left( \frac{\pi}{C} d_2 + 1 \right), \quad (6)$$

де  $\square K_2 d_2$  – прибуток, який використовується для заміни устаткування в третьому році.

Проаналізуємо умови, за яких приймається рішення про використання прибутку, одержаного в результаті заміни устаткування.

Сумарний прибуток за два роки складе:

$$P_2 = P_1 + pK_2(1 - d_2). \quad (7)$$

Сумарний прибуток за три роки:

$$P_3 = P_2 + pK_3. \quad (8)$$

Підставимо значення  $P_2$  та  $K_3$  із виразів відповідно (7) та (6):

$$\begin{aligned} P_3 &= P_1 + pK_2(1 - d_2) + pK_2 \left( \frac{\pi}{C} d_2 + 1 \right) = P_1 + pK_2 - pK_2 d_2 + \frac{\pi^2 K_2}{C} d_2 + pK_2 = \\ &= P_1 + 2pK_2 - K_2 d_2 \left( p - \frac{\pi^2}{C} \right). \end{aligned}$$

Отже,  $P_3$  приймає значення:

$$P_3 = P_1 + 2pK_2 - K_2 d_2 p \left( 1 - \frac{\pi}{C} \right). \quad (9)$$

Висновок: сумарний прибуток у третьому році може бути максимальним, якщо  $\square C$  і  $d_2 = 1$ .

Тоді вираз  $1 - \frac{\pi}{C}$  буде від'ємним і величина  $K_2 d_2 p \left( 1 - \frac{\pi}{C} \right)$  – позитивна. Якщо ж  $\square C$ , то остання величина прийме від'ємне значення і  $d_2 = 0$ , тобто у другому році не ефективно використовувати прибуток для заміни обладнання.

Тепер, на другому етапі, проаналізуємо, за яких умов ефективно використовувати прибуток, одержаний після першого року.

За умови, якщо  $\square C$ , прибуток за три роки складе:

$$P_3 = P_1 + 2pK_2. \quad (10)$$

Підставимо значення  $P_1$  та  $K_2$  із виразів відповідно (4) та (5):

$$\begin{aligned} P_3 &= pK_1(1 - d_1) + 2pK_1 \left( \frac{\pi}{C} d_1 + 1 \right) = pK_1 - pK_1 d_1 + \frac{2\pi^2 K_1 d_1}{C} + 2pK_1 = \\ &= 3pK_1 + K_1 d_1 \left( 2\frac{\pi^2}{C} - p \right); \quad (11) \\ P_3 &= 3pK_1 \left[ p \left( \frac{2\pi}{C} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Висновок: сумарний прибуток у третьому році буде, якщо  $p > \frac{C}{2}$  і  $d_1 = 1$ .

Якщо  $p \leq \frac{C}{2}$ , то не ефективно використовувати прибуток, одержаний від заміни обладнання в першому році.

Недоліком наведеної методики є те, що не враховується можлива зміна величин прибутку  $\square$  та витрат на заміну обладнання в різні роки. Окрім того, методика передбачає лише два варіанти рішення: використати прибуток, одержаний від заміни обладнання в  $t$ -й рік, у повному обсязі, або зовсім його не використовувати в наступні роки.

Нами розроблена цілочислова EM модель заміни устаткування, яка забезпечує використання як власних коштів, так і залучених з інших джерел.

Постановка цієї задачі наступна. Планується заміна однотипного устаткування в потоці на декілька років ( $T$ ). Кількість устаткування, яке планується замінити, складає  $N$  одиниць. Для заміни устаткування підприємство планує використати кошти з фонду розвитку, прибуток, одержаний від його заміни, та залучити кошти з інших джерел.

Передбачаються госпрозрахункові відносини між підприємством та підрозділом з надання інвестиційних коштів та використання прибутку, одержаного від заміни устаткування.

Розробляється множина варіантів заміни устаткування в кожний період (рік). Кількість варіантів заміни дорівнює кількості одиниць устаткування  $N$ , тобто кожний наступний варіант передбачає збільшення нового устаткування на одиницю. По кожному з варіантів відома кількість нового обладнання та діючого (старого), сумарні витрати на заміну та на експлуатацію старого устаткування, сумарний прибуток від використання устаткування.

У задачі необхідно визначити оптимальний варіант заміни за кожний період, використання коштів з різних джерел на заміну обладнання, за яких максимізується сумарний прибуток.

Для побудови EM моделі приймемо позначення:  $\mu$  – індекс варіанту заміни устаткування,  $\mu = \overline{1, M}$ ;  $t$  – індекс інтервалу (проміжку) часу, на початку якого проводиться заміна устаткування,  $t = \overline{1, T}$ ;  $i$  – індекс різновиду продукції, яка виготовляється в потоці, де замінюється устаткування,  $i = \overline{1, I}$ .  $P_{\mu t}$  –  $\mu$ -й варіант заміни устаткування в

періоді  $t$ ;  $X_{\mu t}$  – інтенсивність використання варіанту  $P_{\mu t}$ ,  $X_{\mu t} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ;  $P_t^{\ddot{a}}$  – діючий варіант

використання устаткування без його заміни в періоді  $t$ ;  $\tilde{O}_t^{\ddot{a}}$  – інтенсивність використання

варіанту  $P_t^{\ddot{a}}$ ;  $\tilde{O}_t^{\ddot{a}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ;  $K_{\mu t}^i$  – кількість нового устаткування за варіантом  $P_{\mu t}$ ;  $K_{\mu t}^{\ddot{a}}$  – кількість

діючого (старого) устаткування за варіантом  $P_{\mu t}$ ;  $N$  – загальна кількість одиниць устаткування, яке експлуатується в потоці; варіанти заміни  $P_{1t}, P_{2t}, P_{3t}, P_{4t}, \dots, P_{Mt}$  мають кількість старого устаткування відповідно  $(N-1), (N-2), (N-3), (N-4), \dots$ ;  $C_{\mu t}$  – сумарні витрати на заміну устаткування та витрати, пов'язані з експлуатацією діючого обладнання за варіантом  $P_{\mu t}$ ;  $C_t^{\ddot{a}}$  – сумарні експлуатаційні витрати для діючого варіанту використання устаткування;  $\square_{\mu t}$  – сумарний прибуток від використання нового та старого устаткування за варіантом  $P_{\mu t}$ ;  $\pi_t^{\ddot{a}}$  – сумарний прибуток від використання варіанту  $P_{\mu t}$ ;  $B_t$  – запланований обсяг випуску продукції усіх різновидів в періоді  $t$ ;  $b_{\mu t}$  – обсяг випуску продукції за варіантом  $P_{\mu t}$ . Тоді:

$$b_{\mu t} = \sum_{i=1}^I \alpha_{i\mu}^{\ddot{a}} K_{\mu t}^{\ddot{a}} + \sum_{i=1}^I \alpha_{i\mu}^i K_{\mu t}^i$$

де  $\alpha_{i\mu}^{\ddot{a}}$ ,  $\alpha_{i\mu}^i$  – випуск  $i$ -ої продукції відповідно на одному діючому та новому устаткуванні;  $b_t^{\ddot{a}}$  – обсяг випуску продукції за варіантом  $P_t^{\ddot{a}}$ ;  $Q_t$  – власні інвестиційні кош-

ти із фонду розвитку підприємства, які заплановані для заміни устаткування в періоді  $t$ ; вони передаються відповідному підрозділу з урахуванням одержання дивідендів від використання грошей в обороті;  $E_1$  – коефіцієнт дисконтування в періоді  $t$ .

Тоді:

$$\vartheta_t = \frac{1}{1 + \lambda_t},$$

$\beta_t$  – відсоткова ставка дивідендів від використання коштів на одиночному часовому інтервалі  $t$ ;  $\gamma_t$  – додаткові витрати на залучення інвестицій з інших джерел;  $Z_t$  – невідома величина, яка дорівнює інвестиційним коштам із фонду розвитку підприємства для заміни устаткування в періоді  $t$ .

ЕМ модель задачі має вигляд

$$1. \sum_{\mu=1}^M X_{\mu t} + X_t^o = 1, \quad t = \overline{1, T}. \quad (12)$$

$$2. Z_t + W_t \leq Q_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad (13)$$

де  $W_t$  – невикористаний обсяг інвестиційних коштів з фонду розвитку підприємства в періоді  $t$ .

$$3. \sum_{\mu=1}^M \pi_{\mu} X_{\mu t} + \pi_t^o X_t^o - Y_t + V_t = 0, \quad t = \overline{1, T}, \quad (14)$$

де  $Y_t$  – обсяг прибутку, який одержаний за всіма варіантами заміни в період  $t$  і направляється на нове устаткування в періоді  $t+1$ ;  $V_t$  – обсяг прибутку, який залишається після періоду  $t$ .

$$4. \sum_{\mu=1}^M C_{\mu} X_{\mu t} = Z_t + Y_{t-1} + \Psi_t, \quad (15)$$

$$\sum_{\mu=1}^M C_{\mu} X_{\mu t} - Z_t - Y_{t-1} - \Psi_t = 0, \quad t = \overline{1, T},$$

де  $Y_{t-1}$  – прибуток, одержаний від заміни обладнання за попередній період ( $t-1$ );  $\Psi_t$  – інвестиційні кошти, залучені для заміни обладнання з альтернативних джерел.

$$5. \sum_{\mu=1}^M b_{\mu} X_{\mu t} + \varphi_t - u_t = B_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad (16)$$

де  $I_t$  – дефіцит продукції в періоді  $t$ ;

$3t$  – надвиробництво продукції в періоді  $t$ .

$$6. L = \sum_{\mu=1}^M \sum_{t=1}^T p_{\mu t} X_{\mu t} + \sum_{t=1}^T \pi_t^o X_t^o + \sum_{t=1}^T (1 - \vartheta_t) Z_t + \sum_{t=1}^T (1 - \vartheta_t) Y_t - \sum_{t=1}^T \delta_t \Psi_t - \sum_{t=1}^T l_t \varphi_t - \sum_{t=1}^T m_t \theta_t \rightarrow \max. \quad (17)$$

де  $3t$  – коефіцієнт дисконтування;  $\gamma_t$  – додаткові витрати на залучення інвестицій із інших джерел;  $l_t$  – штрафні санкції в зв'язку з недопоставкою продукції споживачам;  $m_t$  – додаткові витрати на утримання запасів одиниці продукції чи її уцінку.

$$7. X_{\mu t} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}; \quad X_t^o = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \quad (18)$$

$$8. W_t \geq 0; Z_t \geq 0; Y_t \geq 0; \vartheta_t \geq 0; \Psi_t \geq 0; u_t \geq 0. \quad (19)$$

Ці рівняння відображають відповідність наступним умовам:

1. У кожному періоді часу  $t$  в оптимальний план може увійти лише один варіант заміни чи залишиться діючий варіант (без заміни устаткування).

2. Інвестиційні кошти з фонду розвитку підприємства, які спрямовуються на заміну устаткування у  $t$ -ий період, не повинні перевищувати заплановану величину  $Q_r$ .

3. Сумарний прибуток, одержаний у результаті експлуатації нового та старого устаткування в  $t$ -ий період, може бути використаний на заміну устаткування в наступному періоді.

4. Сумарні витрати на заміну обладнання в  $t$ -ий період повинні бути рівними інвестиційним коштам із фонду розвитку, частині прибутку, одержаного від заміни обладнання в попередньому періоді, та інвестиційним коштам з альтернативних джерел.

5. Сумарний випуск продукції в  $t$ -ий період на діючому та новому обладнанні повинен дорівнювати установленому обсягу виробництва цієї продукції з урахуванням можливого надвиробництва чи дефіциту її з відповідними втратами прибутку.

6. Цільова функція.

7. Умова цілочисельності.

8. Умова невід'ємності змінних.

Отже, в роботі рекомендовані 2 методи оптимізації процесів заміни устаткування. Перший — динамічного програмування, другий — цілочислового програмування.

1-й метод має обмеження в можливих варіантах рішень.

2-й метод забезпечує одержання оптимального плану з урахуванням усіх чинників.

1. *Беляєва С.В., Рожок В.Д.* Економіко-математичне моделювання задач заміни устаткування // Вісник ХНУ. — 2010. — №3 (Т.2). — С. 170–173; 2. Дослідження операцій / О.О. Карагодова, В.Р. Кігель. — К.: Центр навч. л-ри, 2007; 3. Дослідження операцій в економіці. Підручник за ред. І.К.Федоренко, О.І. Черняка. — К.: Знання, 2007. — 558 с.; 4. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій. — К.: ЗАТ «Віпол», 2001; 5. Исследование операций / под ред. Дж. Мудера, С. Элмаграби. Т. 2. — М.: Мир, 1981; 6. *Испирян Г.П.* Математические методы и модели в планировании и управлении в легкой промышленности / Г.П. Испирян, В.Д. Рожок. — К.: Вища школа, 1978; 7. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд. иностр. лит, 1960.