УДК 336.763

Ю.М. Осадчий

ВПЛИВ ПОЧАТКОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ НА ОЦІНКИ РИЗИКУ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМУ ПЛАНУВАННІ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

У статті сформульовані та вирішені завдання впливу параметрів, що враховуються, на моделі оптимального планування портфеля цінних паперів, завдання визначення прибутковості портфеля, при якій ризик мінімальний, і завдання визначення найбільшої прибутковості портфеля при обмеженому ризику.

It is formulated and decided the task of the influencing of the taken into account parameters in the models of the optimum planning of securities brief-case, the task of definition of brief-case profitableness, which a risk is minimum at, and the task of most profitableness of brief-case at a limited risk.

Ключові слова: модель оптимального планування, портфель цінних паперів, прибутковість портфеля, ризики.

Питання оптимального планування портфеля цінних паперів неодноразово розглядалися в літературі. Інвестор може здійснювати як безризикові вкладення в цінні папери, дохід від яких заздалегідь визначений, так і в цінні папери, дохід від яких, з одного боку, може перевищити дохід від безризикових вкладень, але, з іншого, існує ризик отримання доходів менших, ніж за безризикових вкладеннях [1; 2].

Завдання оптимального планування структури портфеля цінних паперів є завданням нелінійного програмування, що містить функцію мети і обмеження. Постають задачі мінімізації функцій ризику, які розглядають суму добутків часток цінних паперів на варіації і коваріації дохідностей паперів, що набувають або корінь квадратний із вказаної суми, або середній квадрат приростів прибутковості портфеля [3; 4].

У літературі ці питання розглядали такі вчені, як: Бродунов А.Н., Гаврилюк С.І., О'Брайен Дж., Половнікова В.А., Янковий О.Г. Зокрема С.І. Гаврилюк [5] та С.М. Еш [6] досліджували методологію формування портфеля цінних паперів. Дж. О'Брайен [7] та А.Н. Бродунов [8] розглядали фундаментальні питання ринку цінніх паперів. Також у працях науковців приведені залежності для оцінок значень середньої прибутковості паперу, дисперсії і варіації її прибутковості, часто званої просто ризиком, коваріації дохідностей паперів різних видів. Визначена структура портфеля цінних паперів у вигляді часток коштів, що вкладаються у придбання паперів кожного виду, при цьому сума часток дорівнює одиниці. Визначена прибутковість портфеля як сума добутків середніх дохідностей паперів на відповідні частки їх в портфелі [4]. Приведені приклади оцінок значень функцій ризику (ризики портфелів).

У наукових дослідженнях відсутній математичний аналіз впливу кількісних значень і переліку параметрів моделей, що враховуються, на оцінки ризиків різних оптимальних портфелів. Такий аналіз складає основний зміст даної статті. Крім того, поставлені і вирішені два нові завдання — завдання визначення прибутковості портфеля, при якій ризик мінімальний, а також оцінки ризику, при якій прибутковість портфеля максимальна. За основу взята модель Марковіца у формі, представленій в (2). У статтях, що використовують модель Марковіца, немає єдиної термінології, тому будемо користуватися основними термінами також з (2).

Математичну модель представимо у вигляді такого завдання нелінійного програмування:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}x_i x_j \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} D_i x_i = D, \\ x_i \ge 0, i = 1,2\ldots,n. \end{cases} , \qquad (1)$$

де $\sigma_{i,j}$ — варіації ($i=j$) або коваріації ($i \neq j$) дохідностей паперів; x_i, x_j — частки коштів для придбання паперів (частки паперів); D_i — середня прибутковість і-го паперу; D — прибутковість портфеля.

Модель (1) є завданням знаходження умовного екстремуму. Функція мети цього завдання – квадратична форма, внаслідок чого рішення задачі єдине і знаходиться на перетині гіперплоскостей, відповідних обмежень. При цьому друге обмеження може бути присутнім або відсутнім. У літературі зазвичай не приводять обмежень на позитивність компонент-вектора (плану) X, але при рішенні задачі за допомогою комп'ютера їх обов'язково враховують, що може призвести до вироджених планів, що містять нульові значення компонент X.

Виконаємо аналіз впливу переліку і числових значень параметрів моделі, що враховуються, на оцінки ризику.

Для цього розглянемо модель портфеля з двома паперами і відсутністю обмеження на бажану прибутковість портфеля:

$$\begin{cases} \sigma_{11} x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Використовуючи навіть таку просту модель, як наслідок отримаємо результати необхідні для вирішення поставлених завдань. Застосувавши метод множників Лагранжа, складемо систему рівнянь, яка в матричному вигляді має вираз:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1 & 2\sigma_{12} & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Із системи рівнянь (3) маємо формули для обчислення значень компонент-часток паперів оптимального портфеля:

$$x_1 = \frac{\sigma_{2} - \sigma_{2}}{^{2}\sigma_{2} - \sigma_{1} - \sigma_{2}}, \quad x_2 = \frac{\sigma_{2} - \sigma_{1}}{^{2}\sigma_{2} - \sigma_{1} - \sigma_{2}}$$

Для попередньої оцінки ризику зазвичай розглядають випадок відсутності коваріації (σ_{12}= 0, коваріація виключена з переліку параметрів моделі, що враховуються). Дамо оцінку впливу коваріації дохідностей паперів на значення функції ризику *R*. У табл. 1 представлені значення ризику та компонент плану у функції значень коваріації. Набуті значення σ_{11}=0,1, σ_{22}=0,2.

Таблиця 1.

Залежність ризику та компонент плану від коваріації дохідностей паперів (авторська розробка)

σ_{12}	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
x_1	0,667	0,692	0,727	0,778	0,857	1
x_2	0,333	0,308	0,273	0,222	0,143	0
R	0,067	0,075	0,084	0,091	0,097	0,1

Аналізуючи результати, представлені в табл. 1, варто відзначити, що при $\sigma_{12} = 0{,}1 = \sigma_{11}$. (меншому з σ_{ii}) план X вироджений: $x_2 = 0$. Розрахунки показують, що при значенні коваріації більшому, ніж менша з варіацій дохідностей паперів, план є неприпустимим (рішення задачі містить негативну компоненту *X*). Ризик *R* є монотонно зростаючою нелінійною функцією коваріації. З виразу функції мети виходить зростання ризику при збільшенні коваріації, але не простежується нелінійність цієї залежності. Нелінійність полягає в тому, що від значення σ_{12} залежить не тільки останнє додатнє функції мети, але і значення x_i, що входить у функцію мети в інших ступенях як добуток.

Введемо ще один параметр – прибутковість портфеля цінних паперів *D*. У модель (2) додамо обмеження:

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 = D.$$

У табл. 2 представлена залежність ризику від коваріації дохідностей паперів і прибутковості портфеля.

Таблиця 2.

Залежність ризику від коваріації дохідностей паперів та дохідності портфеля (авторська розробка)

D \ σ_{12}	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
0,12	0,069	0,076	0,084	0,091	0,099	0,106
0,14	0,0745	0,085	0,095	0,105	0,115	0,125
0,16	0,119	0,126	0,134	0,141	0,149	0,156

Аналіз змісту табл. 2 показує, що при постійному значенні *D* прирости *R* практично постійні, *R* є нелінійною функцією *D*. Для представлення *R(D)* складемо докладнішу таблицю, наприклад, для σ_{12}= *0,06*. У табл. 3 приведені також значення чутливості ризику по прибутковості ($\Delta R/\Delta D$), яка також нелінійно залежить від D. Прирости ΔD та ΔR дорівнюють різницям їх наступного та попереднього значень.

Таблиця 3.

Залежність ризику від прибутковості портфеля (авторська розробка)

D	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,18
R	0,091	0,095	0,105	0,12	0,141	0.2

З отриманих результатів можна зробити висновок, що ризик портфеля є зростаючою функцією кількості параметрів моделі, що враховуються, та істотно нелінійною зростаючою функцією їх значень.

Перейдемо до рішення другої поставленої задачі. Модель (1) містить прибутковість портфеля D. Значення компонент вектора X залежать від значень D. Визначимо на допустимому плані $x_i \geq 0$ значення D, при якому ризик $R(D)$ має найменше значення. Розглянемо портфель, що містить два папери. Розв'язавши систему рівнянь Лагранжа щодо компонент-вектора X, і підставивши їх аналітичні вирази у функцію ризику, узявши від виразу $R(D)$ похідну по D і прирівнявши її нулю, отримаємо формулу для обчислення значення D, при якому значення R мінімальне:

$$D = \frac{\sigma_{11} D_2 + \sigma_{22} D_1 - 2\sigma_{12}(D_1 + D_2)}{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}} \quad (4)$$

Зокрема, при $\sigma_{12} = 0$ отримаємо:

$$D = \frac{\sigma_{11} D_2 + \sigma_{22} D_1}{\sigma_{11} + \sigma_{22}}$$

Якщо при цьому $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, то $D = (D_1 + D_2)/2$.

Прибутковість портфеля як функція параметрів моделі (2) розривна при

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12} = 0$$

Виходячи з того, що $D \succ 0$, випливає, що чисельник і знаменник (4) мають бути одного знаку. Можна показати, що для забезпечення допустимого плану необхідне виконання двох обмежень:

$$\sigma_{12} \leq \frac{\sigma_{11} D_2 + \sigma_{22} D_1}{D_1 + D_2} \quad (5)$$

$$\sigma_{12} \leq \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (6)$$

При цьому значення прибутковості має бути у середині інтервалу (D_1, D_2).

Проаналізуємо вплив варіацій і коваріації дохідностей на значення D, при якому ризик мінімальний.

Спочатку покладемо $\sigma_{12} = 0$. Табулюємо D як функцію значень σ_{11} і σ_{22} при $= 0{,}1$ $D_2 = 0{,}2$ (табл. 4).

Таблиця 4.

Залежність прибутковості портфеля від варіацій дохідностей паперів (авторська розробка)

σ_{22} \ σ_{11}	0,06	0,08	0,1	0,15	0,18	0,2
0,06	0,15	0,157	0,163	0,171	0,178	0,177
0,08	0,143	0,15	0,156	0,165	0,169	0,171
0,1	0,138	0,144	0,15	0,16	0,164	0,167
0,15	0,129	0,135	0,14	0,15	0,155	0,157
0,18	0,125	0,131	0,136	0,145	0,15	0,153
0,2	0,123	0,129	0,133	0,143	0,147	0,15

Дані табл. 4 дозволяють визначити значення мінімального ризику, відповідного певній прибутковості портфеля.

Розглянемо, що при дохідностях портфеля, відмінних від представлених у табл. 4, ризик збільшується. Задаючись значеннями варіацій, коваріацій і дохідностей, міняючи значення D, розв'яжемо задачу мінімізації ризику, визначаючи значення компонент плану x_1 і x_2. Далі, підставивши їх у вираз функції ризику $R(x_1,x_2)$, табулюємо $R(D)$. З табл. 4 випливає, що при $\sigma_1 = 0{,}1$, $\sigma_2 = 0{,}2$ ризик портфеля мінімальний при прибутковості $D = 0{,}133$. У табл. 5 представлена залежність $R(D)$, з якої виходить, що дійсно ризик при $D = 0{,}133$ має найменше значення $R_{\min} = 0{,}067$.

Таблиця 5.

Залежність ризику і компонент плану від прибутковості портфеля (авторська розробка)

D	0,1	0,12	0,133	0,14	0,15	0,18	0,2
x_1	1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,2	0
x_2	0	0,2	0,33	0,4	0,5	0,8	1
R	0,1	0,072	**0,067**	0,068	0,88	0,132	0,2

Розглянемо також ненульове значення коваріації $\sigma_{12} = 0{,}015$. У табл. 6 представлена залежність прибутковості портфеля від варіацій дохідностей двох паперів.

Таблиця 6.

Залежність прибутковості портфеля від варіацій дохідностей паперів при їх ненульовій коваріації (авторська розробка)

σ_{22} \ σ_{11}	0,06	0,08	0,1	0,15	0,18	0,2
0,06	0,1	0,118	0,131	0,15	0,157	0,161
0,08	0,1	0,115	0,127	0,145	0,152	0,156
0,1	0,1	0,113	0,124	0,141	0,148	0,152
0,15	0,1	0,11	0,118	0,133	0,14	0,144
0,18	0,1	0,109	0,116	0,13	0,136	0,14
0,2	0,1	0,106	**0,131**	0,137	0,142	0,148

Аналізуючи дані табл. 6, можемо підсумувати, що при $\sigma_{11}= 0,015, =0,1$ і $\sigma_{22}= 0,2$ мінімальний ризик відповідає значенню $D = 0,131$. У табл. 7 представлена залежність $R (D)$, з якої видно, що значенню $D = 0,131$ дійсно відповідає мінімальне значення $R_{min} = 0,073$. Збільшення коваріації дохідностей паперів призвело до збільшення ризику.

Таблиця 7.

Залежність ризику та компонент плану від прибутковості портфеля (авторська розробка)

D	0,115	0,12	0,125	0,131	0,14	0,145
x_1	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,55
x_2	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,45
R	0,081	0,077	0,074	0,073	0,075	0,78

Покажемо, що залежність ризику від коваріацій є нелінійною функцією, опуклою вниз. Варто відзначити, що виконання умов (5, 6) є необхідним, але недостатнім для існування допустимого розв'язання задачі мінімізації ризику портфеля. Наприклад, при вказаних значеннях варіацій, дохідностей паперів і значеннях $D = 0,08$ $\sigma_{12} = 0,05$ розрахунковий план $x_1= 1,2, x_2= -0,2$ є неприпустимим.

Проведемо аналогічні дослідження для портфеля, що містить три цінні папери з метою визначення прибутковості портфеля, при якій ризик має найменше значення. Вищезгадані дослідження, засновані на класичних методах аналізу функцій, можливі. Але найпростіше використовувати функцію «Пошук вирішення» пакету Excel. У табл. 8 представлена початкова таблиця для пошуку значення D для забезпечення $R_{\min}$.

Таблиця 8.

Початкова таблиця для визначення прибутковості портфеля, при якій ризик мінімальний (авторська розробка)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{23}	D_1	D_2	D_3	D	x_1	x_2	x_3
2	0,1	0,15	0,2	0	0	0	0,1	0,12	0,18				

При цьому, в осередку $A3:= D2*A2+E2*B2+F2*C2$ (ліва частина одного з обмежень завдання математичного програмування), в $B3:= A2+B2+C2$ (ліва частина іншого обмеження), в $A4:=h2*a2$^$2+i2*b2$^$2+j2*c2$^$2+k2*a2*b2+l2*a2*c2+m2*b2*c2$ (вираз функції ризику). Реалізація функції «Пошук рішення» загальновідома. Необхідно також додати: $A3=G2$ (значенню D, що задається), $B3=1$ (сума компонент вектора X дорівнює одиниці), $K2 \geq 0, L2 \geq 0, M \geq 20$. Реалізація завдання з початковою табл. 8 дозволяє також визначити компоненти плану.

У табл. 9 представлена залежність ризику від дохідностей портфеля для значень параметрів, вказаних у табл. 8. Як бачимо, значенню $D = 0,12$ відповідає найменший ризик $R = 0,047$.

Таблиця 9.

Залежність ризику від дохідностей портфеля з трьома паперами (авторська розробка)

D	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17
R	0,056	0,047	0,048	0,057	0,076	0,104	-

Якщо взяти $D = 0{,}17$, то це призведе до неприпустимого плану (негативної компоненті X) і неіснуючому на безлічі позитивних чисел значенню ризику (відмічено знаком -).

Задамо $D_1 = 0{,}18$, $D_2 = 0{,}12$, $D_3 = 0{,}1$, зберігши колишні значення інших параметрів моделі. При цьому, найменшому значенню варіації прибутковості паперів першого вигляду відповідає найбільше значення її прибутковості. Залежність ризику від прибутковості портфеля в цьому випадку представлена в табл. 10. Зміни співвідношень значень параметрів призвели до зсуву точки мінімуму ризику.

Таблиця 10.

Залежність ризику від прибутковості при найбільшій прибутковості паперу, відповідній найменшій варіації (авторська розробка)

D	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17
R	0,088	0,066	0,053	0,047	0,048	0,057	0,074

Можна показати, що компоненти плану X є лінійними функціями прибутковості портфеля, а ризик є її квадратичною функцією. Функція однієї змінної набуває найменшого значення або в точці мінімуму, що знаходиться у середині інтервалу її визначення, або на кінці цього інтервалу. До такого результату може призвести ненульове значення коваріації дохідностей паперів. У табл. 11 наведена залежність ризику від прибутковості портфеля при значеннях параметрів $D_1 = 0{,}1$, $D_2 = 0{,}12$, $D_3 = 0{,}18$, $\sigma_{12} = 0{,}1$, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

Таблиця 11.

Залежність ризику від прибутковості портфеля при ненульовій коваріації (авторська розробка)

D	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16
R	-	0,067	0,073	0,085	-

Ненульове значення призвело до того, що ризик мінімальний при $D = 0{,}13$ на лівому кінці інтервалу допустимих значень D. Крім того, бачимо малий діапазон проибутковостей, при яких значення ризику може бути оцінено.

Перейдемо до рішення третього поставленого завдання — визначення найбільшого значення прибутковості портфеля D при обмеженому значенні функції ризику R. За портфеля, що містить три цінні папери, математична модель завдання має вигляд:

$$\begin{cases} D = D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 + 2\sigma_{13} x_1 x_3 + 2\sigma_{23} x_2 x_3 \le R. \end{cases}$$

Розв’яжемо задачу за допомогою функції «Пошук рішення». Початкова таблиця для вирішення цього завдання така ж, як табл. 8, з такою відмінністю: у осередку *J1* присутнє позначення ризику *R*, в осередку *J2* задають його значення. У осередку *A3:=a2+в2+c2* (ліва частина першого обмеження), в осередку *A4:=2*H2*A2^2+ +2*I2*B2^2+2*J2*C2^2+2*K2*A2*B2+2*L2*A2*C2+2*M2*B2*C2* (ліва частина другого обмеження). В осередку *A5:=d2*a2+e2*b2+f2*c2* (функція мети — прибутковість портфеля). При розв’язанні задачі додати: *A3J2* ≤ (допустимий ризик), *A3=1* (сума компонент плану X), $A2, B2, C2 \ge 0$. У табл. 12 представлені залежності максимальної прибутковості, ризику портфеля і компонент плану від допустимго ризику при значеннях параметрів: $= \sigma_{11}\ 0,1, = \sigma_{22}\ 0,15, = \sigma_{33}\ 0,2, = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$

Таблиця 12.

Залежності максимальної прибутковості, ризику портфеля і компонент плану від допустимого ризику (авторська розробка)

$R_{доп}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1	0,05
x_1	0	0	0	0,0726	0,1761	0,3575	-
x_2	0	0	0,1486	0,2587	0,2728	0,2947	-
x_3	1	1	0,8514	0,6687	0,5511	0,3478	-
D_{max}	0,18	0,18	0,1714	0,1587	0,1495	0,1337	-
R	0,4	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1	-

Дані табл. 12 свідчать, що, по-перше, зменшення допустимого ризику веде до зменшення прибутковості портфеля; по-друге, при великих допустимих ризиках до вироджених планів; по-третє, при малих допустимих ризиках до вітсутності рішення завдання (Excel дає повідомлення «Поиск не может найти решения») ризик може бути менше допустимого.

Виконаємо подібне дослідження при $D_1 = 0,18, D_3 = 0,1,$ і попередніх значеннях решти параметрів. Результати представлені в табл. 13.

Таблиця 13.

Залежності характеристик портфеля і компонент плану від допустимого ризику при $D_1 =$ 0,18 (авторська розробка)

$R_{доп}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1	0,05
x_1	1	1	1	1	0,847	0,6024	-
x_2	0	0	0	0	0,1473	0,2489	-
x_3	0	0	0	0	0,006	0,1488	-
D_{max}	0,18	0,18	0,18	0,18	0,1707	0,1532	-
R	0,2	0,2	0,2	0,2	0,15	0,1	-

Порівнюючи результати, представлені в табл. 12 і 13, можемо констатувати, що у випадку, коли найбільшій дохідності паперу відповідає її найменша варіація, а найменшій дохідності — найбільша варіація, численні випадки вироджених планів, ризики часто рівні допустимим, а малий допустимий ризик призводить до недопустимого плану — відсутності розв'язку задачі.

Простежимо вплив коваріацій на найбільше значення прибутковості портфеля у функції допустимого ризику. У табл. 14 представлені результати розрахунків при $\sigma_{12} = 0,1,\ \sigma_{13} = 0,12,\ \sigma_{23} = 0,14$ і значеннях решти параметрів, що і для табл. 13.

Таблиця 14.

Залежності максимальної прибутковості, ризику портфеля і компонент плану від допустимого ризику при ненульових коваріаціях (авторська розробка)

$R_{доп}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15
x_1	0	0	0,196	0,29	-
x_2	0	0	0,2114	0,2438	-
x_3	1	1	0.769	0,4662	-
D_{max}	0,18	0,18	0,166	0,1417	-
R	0,4	0,4	0,3	0,2	-

Порівняння табл. 12 і 14 показує, що ненульові значення коваріацій негативно впливають на найбільшу прибутковість портфеля, призводять до ризиків, рівних допустимим, а при малих допустимих ризиках розв'язання задачі оптимального планування портфеля не існує. Якщо за тих же параметрів, що для табл. 14, покласти $\sigma_{13} = 0$, то при допустимому ризику, рівному 0,145, розв'язання задачі існує, ризик дорівнює допустимому, а найбільша прибутковість дорівнює 0,136.

Отже, у роботі подані результати вирішення поставлених завдань. Запропоновані та використані залежності і процедури розрахунків кількісних оцінок впливу початкової інформації на ризики при оптимальному плануванні портфеля цінних паперів. Сформульовано і вирішено завдання визначення прибутковості портфеля, при якій ризик мінімальний. Визначена найбільша прибутковості портфеля при обмеженому ризику. Представлені складені автором таблиці, що дозволяють з отриманих чисельних кількісних оцінок зробити якісні висновки про вплив початкової інформації на ризики при оптимальному плануванні портфеля цінних паперів.

1. *Шарп У.* Инвестиции / У. Шарп, Р. Александер, Дж. Бейли. — М., ИНФРА-М, 1977. — 1004 с.; 2. *Жуков Е.Ф.* Рынок ценных бумаг / Е.Ф. Жуков. — М.: ЮНИТИ, 2009. — 567 с.; 3. *Янковой А.Г.* Оценка основных характеристик портфеля ценных бумаг. — Фондовий ринок №18, 1998. — С. 25—27.; 4. *Половникова В.А.* Финансовая математика / В.А. Половникова, А.И. Пилипенко.— М.: Вузовский ученик, 2010. — 368 с.; 5. *Гаврилюк С.І.* Формування портфеля цінних паперів банків / С.І. Гаврилюк // Економіка і управління. — 2012. — № 1. — С. 121—127; 6. *Еш С.М.* Фінансовий ринок / С.М. Еш. — К.: Центр учбової літератури, 2011. — 528 с.; 7. *О'Брайен Дж.* Финансовый анализ и торговля ценными бумагами / Дж. О'Брайен, С. Шривастава. — Дело Лтд, 1995. — 276 с.; 8. *Бродунов А.Н.* Рынок ценных бумаг / А.Н. Бродунов. — НИЭМП, 2010. — 264 с.