

ОДНОЧАСНЕ ОПТИМАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ ОБСЯГІВ ВИРОБНИЦТВА І ВИКОРИСТАННЯ РЕСУРСІВ

У статті запропоновано модель одночасного планування обсягів виробництва і розподілу ресурсів з метою максимізації прибутку. Розглянуто приклади детермінованих і стохастичних завдань.

A model of simultaneous scheduling of production and allocation of resources in order to maximize profits. We consider examples of deterministic and stochastic problems.

Ключові слова: планування виробництва, розподіл ресурсів, прибуток, оптимізація.

Key words: scheduling of production, allocation of resources, profit, optimization.

Відомі два основні типи завдань оптимального планування виробництва товарів або послуг. Завдання першого типу – це завдання максимізації прибутку при обмеженнях на вартості ресурсів (матеріально-технічних, трудових, енергоресурсів). Ліміти на кожний із ресурсів визначені або директивами, або статистичним аналізом задовільних результатів виробництва в минулому [1]. Завдання другого типу – це завдання мінімізації сукупних виробничих витрат при обмеженнях на обсяги виробництва товарів або послуг [2]. Розв'язок завдання першого типу не забезпечує мінімальних виробничих витрат, другого типу – максимізації прибутку [3].

Постановка і розв'язок завдання одночасного оптимального планування обсягів виробництва й використання ресурсів не відомі.

У статті поставлене завдання розробки математичної моделі максимізації прибутку підприємства при обмеженні тільки сукупного обсягу витрат. Результатами використання цієї моделі є обсяги виробництва кожного з товарів (послуг) і частки сукупного ресурсу підприємства, які можуть бути використані для оплати кожного з ресурсів. Показано, що розв'язок такого завдання призводить до збільшення прибутку порівняно з розв'язком завдання максимізації прибутку при обмеженнях на кожний із ресурсів. Досліджено також відповідне стохастичне завдання.

У якості базової прийнята модель завдання максимізації прибутку при обмеженнях на кожний із ресурсів. Функція мети цієї моделі й запропонованої моделі однакові і являють собою суму добутків питомих прибутків на кількість вироблених товарів (послуг). Ліві частини першої групи обмежень також однакові й містять суми добутків коефіцієнтів витрат на планові обсяги виробництва. Правими частинами цієї групи обмежень базової моделі є обмеження на оплату кожного з ресурсів, а в запропонованій моделі – добутки невідомих коефіцієнтів – часток сукупного ресурсу – на його величину. Крім того, запропонована модель містить ще одне обмеження у вигляді суми невідомих коефіцієнтів, рівній одиниці. Таким чином, запропонована модель має такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_i) = \sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^m a_j x_i \leq k_j b, \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} k_j = 1, \\ x_i \geq 0, \\ x_k \geq 0. \end{array} \right. , \quad (1)$$

де F – функція мети – прибуток; C_i – питомі прибутки; $i=1.2\dots n$ – номер продукту; n – кількість продуктів; x_i – плановий обсяг (кількість) i -го продукту; a_{ji} – коефіцієнти витрат j -го ресурсу для виробництва одиниці i -го продукту; $j=1.2\dots m$ – номер ресурсу; m – кількість ресурсів; k_j – частка сукупного ресурсу для оплати j -го ресурсу; b – сукупний ресурс, який має підприємство для забезпечення продуктів, що виробляються, у планових обсягах.

Розглянемо перший приклад. Підприємство робить три види вин: десертні, аперитиви, сухі. Значення коефіцієнтів витрат і питомих прибутків наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Ресурси \ Продукт	Десертні	Аперитиви	Сухі
Матеріали	6,71	5,64	3,3
Працевитрати	4,88	4,21	3,04
Енерговитрати	0,425	0,365	0,316
Питомі прибутки	4,89	4,16	2,52

Модель одночасного оптимального планування обсягів виробництв і часток ресурсу для оплати кожного із трьох ресурсів при ресурсі підприємства 13040 грош. од. має такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4,9 x_1 + 4,6 x_2 + 2,2 x_3 \rightarrow \max, \\ 6,7 x_1 + 5,6 x_2 + 3,3 x_3 - 13040 k_1 \leq 0, \\ 4,8 x_1 + 4,2 x_2 + 3,0 x_3 - 13040 k_2 \leq 0, \\ 0,425 x_1 + 0,365 x_2 + 0,316 x_3 - 13040 k_3 \leq 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Для розв'язку завдання використана програма «Пошук розв'язку» пакета Excel [4].

Результати розв'язку такі. Планові обсяги виробництва: десертних вин $x_1 = 6953,233 \approx 6953$ тис. од. (тис. пляшок), аперитивів $x_2 = 4587,069 \approx 4587$ тис. од., сухих вин $x_3 = 0$. Частки на оплату ресурсів: $k_1 = 0,556191 \approx 55,62$ %, $k_2 = 0,408308 \approx 40,83$ %, $k_3 = 0,0355 = 3,55$ %.

У грошовому вираженні: з 13040 [грош. од.] ресурсу на оплату матеріалів заплановано витратити 7453, на оплату праці 5324,2, енерговитрати 262,8 [грош. од.]. Плановий прибуток становитиме 5308,349 \approx 5308,35 [грош. од.].

Раніше це підприємство планувало витрати у такий спосіб: 55 % на оплату матеріалів, працевитрати – 35 %, енерговитрати – 10 %. При таких частках із 13040 [грош. од.] на оплату матеріалів необхідно було запланувати 7172, на оплату праці 4564, енерговитрати 1304 [грош. од.]. У такому випадку система обмежень базової моделі максимізації прибутку має вигляд:

$$\begin{cases} 6,7 x_1 + 5,4 x_2 + 3,3 x_3 \leq 7172, \\ 4,8 x_1 + 4,2 x_2 + 3,0 x_3 \leq 4564, \\ 0,425 x_1 + 0,365 x_2 + 0,316 x_3 \leq 1304, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Результати такі. Планові обсяги виробництва: десертних вин $x_1 = 9352,459 \approx 9353$ тис. од. (тис. пляшок), аперитивів $x_2 = 0$, сухих вин $x_3 = 0$. Плановий прибуток становитиме 4573,35 [грош. од.]. Це значення прибутку на 735 [грош. од.], або на 5,63 % менше, ніж при пропонованому одночасному плануванні обсягів виробництв і розподілу ресурсів.

Запропоновану модель можна використовувати й у випадку обмежень знизу на обсяги виробництв. Наприклад, якщо в моделі (2) замість обмеження $x_3 \geq 0$ введене обмеження $x_3 \geq 4000$ (підприємство бажає зберегти цех із виробництва сухих вин), плановий прибуток становитиме 5232,6 грош. од., тобто на 75,75 грош. од., або на 0,595 % менше, ніж за відсутності обмеження знизу на виробництво сухих вин.

Розглянемо другий приклад. Судноремонтне підприємство має у своєму розпорядженні ресурс 780000 [грош. од.] і планує робити ремонт малотоннажних, середньотоннажних і високотоннажних суден. Для виконання ремонтних робіт будуть потрібні такі ресурси: матеріали, трудові ресурси, енергоресурси, амортизація устаткування. Коефіцієнти витрат і питомих прибутків призводять до такої моделі одночасного оптимального планування обсягів робіт і розподілу ресурсів:

$$\begin{cases} 116x_1 + 152x_2 + 189x_3 \rightarrow \max, \\ 203x_1 + 310x_2 + 391x_3 - 780000k_1 \leq 0, \\ 161x_1 + 220x_2 + 280x_3 - 780000k_2 \leq 0, \\ 321x_1 + 464x_2 + 488x_3 - 780000k_3 \leq 0, \\ 4,5x_1 + 4,5x_2 + 4,5x_3 - 780000k_4 \leq 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Результати розв'язку завдання (4) такі. Обсяги робіт: ремонт високотоннажних суден $x_1 = 26246$, $x_2 = 0$, ремонт малотоннажних суден $x_3 = 49201$ тис. тонн. Наявний ресурс підприємства необхідно розподілити у такий спосіб: на оплату матеріалів 31,49 % (245622 [грош. од.]), на оплату праці 23,08 % (180024), енерговитратно 41,58 % (324324), амортизаційні витрати 3,85 % (30030 [грош. од.]). Плановий прибуток становитиме 123435,25 [грош. од.].

Раніше підприємство в середньому планувало 40 % ресурсу на оплату матеріалів, 20 % — на оплату праці, 35 % — на оплату енергоресурсів і 5 % — на амортизацію устаткування. При таких даних система обмежень базового завдання має вигляд:

$$\begin{cases} 203x_1 + 310x_2 + 391x_3 \leq 312000, \\ 161x_1 + 220x_2 + 280x_3 \leq 156000, \\ 321x_1 + 464x_2 + 488x_3 \leq 273000, \\ 4,5x_1 + 4,5x_2 + 4,5x_3 \leq 39000. \end{cases} \quad (5)$$

Результати розв'язку завдання (5) такі. Обсяги робіт: $x_1 = 27581$, $x_2 = 0$, $x_3 = 39128$ тис. тонн. Прибуток 10594,6 грош. од., на 1840,5 грош. од. або на 2,36 % менше, ніж при пропонованому одночасному плануванні. Будь-який розподіл сукупного ресурсу, що відрізняється від отриманого при одночасному плануванні обсягів виробництва й розподілу ресурсів, не є оптимальним і дає менший прибуток.

Запропонована модель (1) має ще одну вагому особливість, яка виявляється при порівнянні результатів розв'язку детермінованого й стохастичного завдань із однаковими коефіцієнтами витрат і питомих прибутків. Повернемося до першого прикладу. Завдання (2), (3) являють собою детерміновані моделі завдань лінійного програмування. У випадку періодичних часткових вступів коштів від інвесторів ресурс, який буде мати підприємство, через дію випадкових факторів може виявитися випадковою величиною.

Система обмежень стохастичного завдання, відповідного до завдання (2), має вигляд:

$$\begin{cases} P(6,7x_1 + 5,6x_2 + 3,3x_3 \leq b_1) \geq P_\delta, \\ P(4,8x_1 + 4,2x_2 + 3,0x_3 \leq b_2) \geq P_\delta, \\ P(0,425x_1 + 0,365x_2 + 0,316x_3 \leq b_3) \geq P_\delta. \end{cases} \quad (6)$$

У системі обмежень (6) P_δ – припустима ймовірність події, що полягає в тому, що підприємство буде мати сукупний ресурс, менший ніж прийнятий при розв'язку детермінованого завдання. Стохастичному завданню з обмеженнями (6) відповідає детерміноване завдання з обмеженнями (7).

$$\begin{cases} 6,7x_1 + 5,6x_2 + 3,3x_3 \leq b_1, \\ 4,8x_1 + 4,2x_2 + 3,0x_3 \leq b_2, \\ 0,425x_1 + 0,365x_2 + 0,316x_3 \leq b_3. \end{cases} \quad (7)$$

Візьмемо, що ресурс підприємства є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом, що має математичне очікування m і дисперсію δ . Математичними очікуваннями сум, що виділені для оплати кожного з виробничих ресурсів, є праві частини обмежень у системі (3). Нехай ймовірність припустима $P_\delta = 0,9$, а середньквдратичне відхилення становлять $\delta = 0,1$ від математичного очікування. Для обчислення значення b скористаємося формулою (5)

$$P = 0,5 - \hat{O}\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) = P_\delta,$$

з якої впливає $\hat{O}(z) = P_\delta - 0,5 = 0,4$,
де значення $z = 1,28$.

Нижнє значення ресурсу підприємства в стохастичному завданні:

$$b = m - \delta \cdot m = 13040 - 1,28 \cdot 13040 = 11370,9.$$

Розподіливши його, як і раніше (відповідно 55 %, 35% і 10 %), одержимо обмеження $b_1 = 6254$, $b_2 = 3979$, $b_3 = 1137,1$. Розв'язавши базове завдання із цими

обмеженнями, одержимо значення математичного очікування прибутку, рівне 39871,54 грош. од., яке на 5862 грош. од. менше, ніж у результаті розв'язку базового детермінованого завдання.

Система обмежень стохастичного завдання одночасного планування обсягів виробництва й розподілу ресурсів подібна системі (2). Але останні доданки в лівих частинах будуть мати вигляд: $(b_k), j = 1, 2, 3$.

У цьому випадку математичне очікування прибутку, отримане в результаті розв'язку відповідного завдання математичного програмування, становить 44707, 34 грош. од. Це значення, по-перше, на 4376, 15 грош. од. менше, ніж обчислене при розв'язку детермінованого завдання одночасної оптимізації, по-друге, менше, ніж при розв'язку базового завдання.

Таким чином, одночасне оптимальне планування обсягів виробництва і розподіл ресурсу підприємства для оплати його виробничих ресурсів дає прибуток, що перевищує його значення при плануванні обсягів і обмеженнях на оплату кожного з ресурсів.

Одночасне оптимальне планування обсягів виробництва і розподіл ресурсу дає менші втрати прибутку при випадковій величині ресурсу, порівняно із плануванням обсягів при обмеженнях на кожний із виробничих ресурсів.

1. *Трояновский В.М.* Математическое моделирование в менеджменте / В.М. Трояновский. — М.: Русская деловая литература, 1995. — 234 с.; 2. *Баркалов С.А.* Оптимизационные модели инвестиций на предприятии / С.А. Баркалов, О.Н. Бакунец, И.В. Гуреева. — М.: ИПУ РАН, 2002. — 68 с.; 3. *Григорьев В.П.* Модель оптимального распределения ресурсов в производство / В.П. Григорьев, В.Н. Калюта, К.А. Киселев // Известия Томского политехнического института. — 2005. — Вып. 5. — С. 67–72; 4. *Долженков В.А.* Практическая работа в Microsoft Excel / В.А. Долженков, Ю.В. Колесников, В.И. Рыжков. — СПб.: БХВ Санкт-Петербург, 1998. — 272 с.; 5. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — М.: Высшая школа, 2000. — 479 с.