МЕТОДОЛОГІЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

УДК 519.222

ВРАХУВАННЯ ПАРНОЇ КОРЕЛЯЦІЇ МІЖ ВИПАДКОВИМИ ПРОЦЕСАМИ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

Чичулін В.П., к.т.н.
Чичуліна К.В., к.т.н.
E-mail: Chichulinak@rambler.ru
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

В статті обґрунтовано загальнотеоретичні передумови та приведений алгоритм появи або відсутності певних економічних явищ. Отримана залежність, що надає можливість розрахунку ймовірності настання події в економічній системі послідовно з'єднаних елементів з урахуванням міри кореляційного зв'язку. Представлена можливість визначення та оцінки ступеня залежності пари економічних показників (випадкових величин). В статті проведений аналіз існуючих коефіцієнтів кореляції та узагальненої коваріації, визначені їх переваги та недоліки. Шляхом перетворень, отриманий модифікований вираз, що надає змогу ліквідувати від'ємну область при побудові залежності коефіцієнту узагальненої коваріації від коефіцієнту кореляції. Запропонована ступенева функція визначення ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох послідовно з'єднаних елементів з урахуванням коефіцієнту парної кореляції. Приведена формула для розрахунку ймовірності відсутності певної події (явища) економічної системи двох послідовно з'єднаних елементів (які мають однакові ймовірності відсутності події) з урахуванням коефіцієнту узагальненої коваріації

Ключові слова: коефіцієнт кореляції, економічний аналіз, випадкова величина, імовірність, система

UDC 519.222

CONSIDERING PAIR CORRELATION BETWEEN RANDOM PROCESSES IN THE ECONOMIC ANALYSIS

Chichulin V.P., PhD in Engineering
Chichulina K.V., PhD in Engineering
E-mail: Chichulinak@rambler.ru
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

In the article general theoretic pre-conditions and algorithm of appearance or absence of the certain economic phenomena have been proved. The dependence which provides the possibility to work out the probability of series of events which are to come in consecutive order in an economic system which takes into account rating of this correlation, has been obtained. Also, the possibility to determination and estimating of the degree of dependence of pair of economic indicators (random sizes) has been presented. In the article there has been performed the analysis of the existing coefficients of correlation and generalized covariance; there have also been defined their advantages and disadvantages. The modified expression which enables to eliminate the negative area while constructing the generalized covariance coefficient dependency on the correlation coefficient by transformation has been obtained. The sedate function to determine the probability of the absent phenomena in economic system with taking into account the paired correlation coefficient has been obtained. The formula to calculate the probability of the absent phenomena in economic system with in two consistently liked elements with taking into account the generalized coefficient is given

Keywords: coefficient of correlation, economic analysis, random size, probability, system

Актуальність проблеми. Застосування в економічному аналізі кореляційних методів згідно [4] надає можливість з практичної точки зору детально досліджувати взаємозв’язки економічних явищ і процесів, визначати вплив факторів на результати господарської діяльності та резерви підвищення ефективності виробництва (наприклад, за рахунок кореляційного аналізу між рівнем продуктивності праці та озброєністю її основними засобами, собівартістю і випуском продукції, тощо). Тому, на сучасному етапі пошук нових спрощених форм врахування кореляції між певними випадковими подіями (явищами) економічних систем є досить актуальне питання.

Аналіз останніх наукових досліджень. В працях Вентцель Е.С. [2], Кудзіса А.П. [3], Матвеєвої С.П. [4], С.Ф. Пічугіна [6] представлені шляхи врахування коефіцієнту кореляції при визначенні ймовірностей настання (відсутності) певних подій. Розглядаючи іноземні джерела присвячені питанням структурної надійності, а також питанням врахування кореляційних залежностей в визначенні «слабких ланок» систем, можна виділити роботи Dan M. Frangopol. [9], Ditlevsen O. [10], Hitoshi Furuta [11]. Але не вирішеними питаннями все ж залишаються застосування структурної надійності, саме в економічному аналізі, з метою дослідження кореляційних зв’язків між випадковими явищами.

Мета роботи: запропонувати математичний механізм отримання ймовірності появи (відсутності) подій з урахуванням коефіцієнту парної кореляції між випадковими процесами в економічному аналізі; отримати нову форму визначення ймовірності відсутності економічного явища системи двох послідовно з’єднаних елементів з урахуванням коефіцієнту узагальненої коваріації.

Викладення основного матеріалу дослідження. В економічному аналізі існує можливість отримання ряду показників економічної системи подій через призму економіко-математичної моделі [1], яка має вектор дослідження окремих частин системи та їх функцій. Широкий спектр цих складових (подій) потребує досить складної статистичної обробки з урахуванням саме кореляційного взаємозв'язку.

Розглянемо ряд існуючих гіпотез, щодо врахування кореляційного зв'язку між елементами економічної системи при визначенні ймовірності появи (відсутності) події. В [2] визначено, що врахування коефіцієнту кореляції є доцільним саме в діапазоні від 0 до 1. Граничний рівень коефіцієнту кореляції згідно методу PNET [10] досить високий (0,7), отже, застосування його при великому розкиді економічних показників є неможливим. Враховуючи вище викладене, актуальним напрямком є отримання оптимальної форми врахування парного кореляційного зв'язку в розрахунках ймовірності появи (відсутності) настання певної економічної події (явища).

Для певної економічної системи з послідовним з'єднанням елементів ймовірність появи (P_n) або відсутності (Q_n) економічної події (явища) розраховується за формулами (1 – 2):

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} P_i = \prod_{i=1}^{n} (1 - Q_i) \tag{1}$$

$$Q_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - Q_i) \tag{2}$$

Надалі при визначенні ймовірності появи (відсутності) економічних подій з урахуванням міри взаємозв'язку, коефіцієнт кореляції буде мати вигляд [7]:

$$r_{ij} = \frac{\mathrm{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{M[(x_i - m_{xi})(x_j - m_{xj})]}{\sigma_i \sigma_j} \tag{3}$$

де m_{xi}, m_{xj} – математичне очікування координати x_i і відповідно x_j;
σ_i, σ_j – стандарт координати x_i і відповідно x_j;
$cov(x_i, x_j)$ – математичне очікування добутку центрованих координат x_i, x_j.

При умові абсолютної залежності складових економічної системи (r_{ij} = 1), елементи такої структурної форми об'єднуються в один з максимальною ймовірністю того, що подія не відбудеться Q_{max}. При умові незалежності елементів економічної системи (r_{ij} = 0), ймовірність відсутності появи пари подій (явищ) визначається наступним чином:

$$Q^{н}_{s\ ij} = 1 - P^{н}_{s\ ij} = 1 - P_i \cdot P_j = 1 - (1 - Q_i) \cdot (1 - Q_j) \qquad (4)$$

При (r_{ij} = |1|) існує функціональний зв'язок, отже зміни пари економічних подій (явищ) можна описати лінійною функцією. Спираючись на [2], коефіцієнт кореляції характеризує виключно лінійну залежність. Отже, надалі врахування парного коефіцієнту кореляції r_{ij} в діапазоні від 0 до 1 при розрахунку ймовірності відсутності настання економічної події (явища) незалежних та залежних послідовно з'єднаних ряду подій будемо проводити в лінійній постановці.

Розрахуємо ймовірність залежних між собою пари послідовно з'єднаних подій ($Q_s^{з}$) економічної системи за наступними формулами [8]:

а) при умові пари однакових ймовірностей Q_i та Q_j:

$$Q_s^{з} = Q_s^{н} - r_{ij}\left(Q_s^{н} - Q_i\right) \qquad (5)$$

б) при умові пари різних ймовірностей Q_i та Q_j:

$$Q_s^{з} = Q_s^{н} - r_{ij}\left(Q_s^{н} - Q_{max}\right) \qquad (6)$$

де Q_i та Q_j – ймовірність того, що економічна подія (явище) не відбудеться *i-го* або *j-го* елементу;

$Q_s^{н}$ – ймовірність системи двох незалежних елементів

Q_{max} – максимальна ймовірність між *i-м* та *j-м* елементами.

Якщо розглядати нормальний закон розподілення (найчастіше застосовується у статистиці) композиційної функції [3], що характеризує випадкове функціонування елементів економічної системи була запропонована формула розрахунку коефіцієнту узагальненої коваріації:

$$\rho = \rho_{mt}\left\{2 - \left[\rho_{mt} + \frac{(1 - \rho_{mt})(3 - lg\, n)}{1 - 0.1\rho_{mt}^{\ 2}(3 - lg\, n)^2}\right]\right\} \qquad (7)$$

В формулі (7) середнє значення коефіцієнту узагальненої коваріації:

$$\rho_{mt} = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i \le j} r_{i,j} \qquad (8)$$

де n – кількість розрахункових точок, випадкової функції;

r_{ij} – коефіцієнти кореляції між *i*-ю і *j*-ю точкою, випадкової функції.

Застосовуючи приведену нижче формулу (9) [7] в економічному аналізі існує можливість знаходження кількості коефіцієнтів кореляції

r_{ij}, тобто кількість k поєднань з n різних елементів економічної системи з подальшим утворенням $k!$ перестановок. Отже отримане число буде в $k!$ раз менше числа k перестановок з n елементів:

$$C(n,k)=\frac{p(n,k)}{k!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (9)$$

Відмітимо, що незалежно від кількості точок, випадкової функції при умові однакового коефіцієнту кореляції $\rho_{mt}= r_{ij}$.

З метою графічного зображення залежності коефіцієнту узагальненої коваріації ρ від коефіцієнту кореляції r_{ij} (0…1) (рис. 1, а) задамо наступні параметри: кількість точок, випадкової функції n(2….10); k-поєднання (елементи без врахування порядку) k=2 при будь-якому n (за умови однакового парного коефіцієнту кореляції).

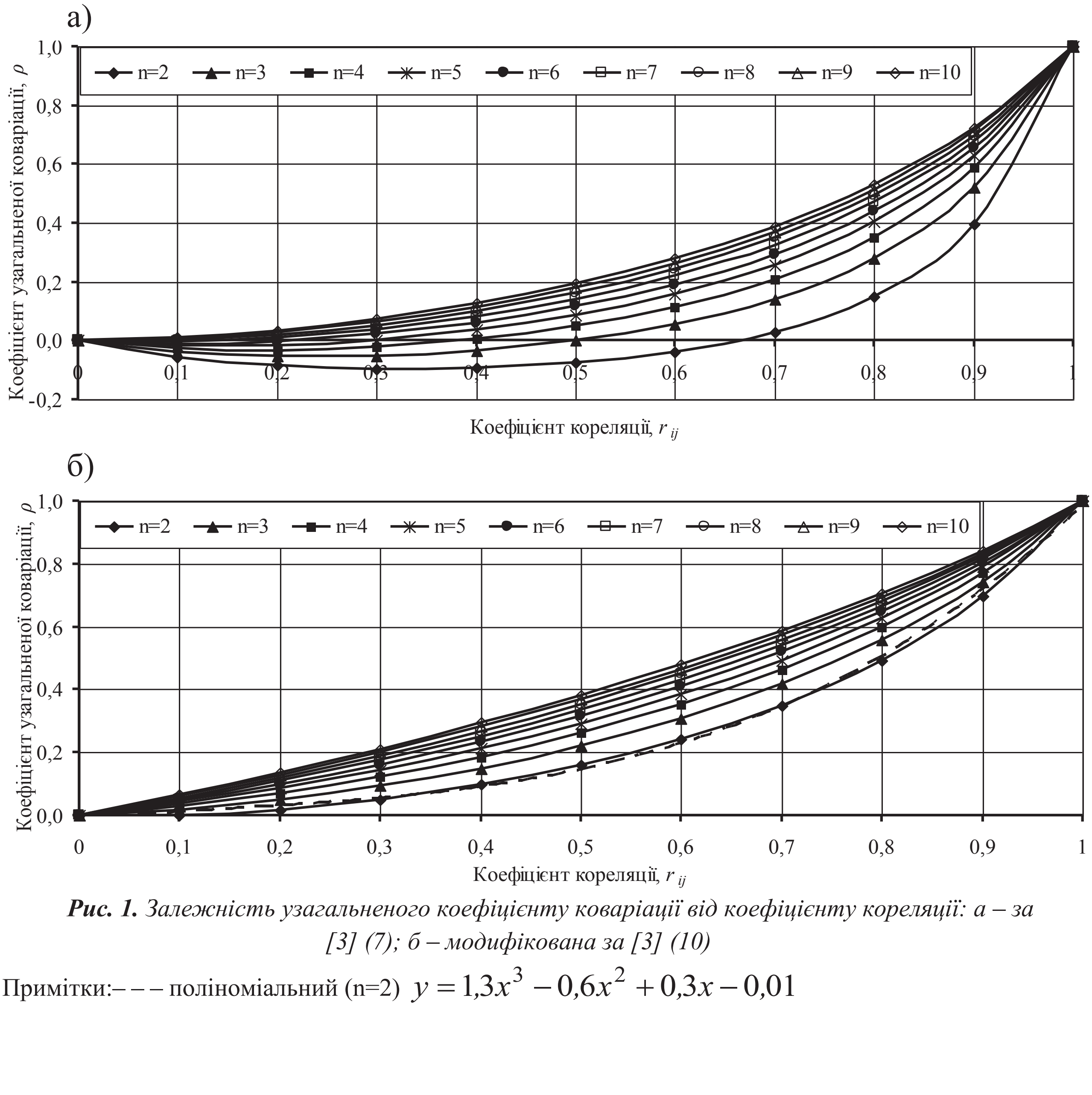

Рис. 1. *Залежність узагальненого коефіцієнту коваріації від коефіцієнту кореляції: а – за [3] (7); б – модифікована за [3] (10)*

Примітки:– – – поліноміальний (n=2) $y=1{,}3x^3-0{,}6x^2+0{,}3x-0{,}01$

Розглядаючи коефіцієнт узагальненої коваріації (7) з подальшим використанням його в виразі (10), виникають питання, щодо обумовлення появи логарифмічної залежності і від'ємної області у більшості зміни коефіцієнту кореляції (суперечить зауваженню автора про додатне значення коефіцієнту узагальненої коваріації [3]). Зауважимо, що від'ємна ділянка зменшується зі збільшенням кількості точок випадкової функції. Існує імовірність того, автор мав на увазі певну межу коефіцієнту парної кореляції (додатні значення області), вище якого елементи вважаються, як один механізм, а нижче можна вважати елементи статистично незалежними відповідно методу розрахунку PNET [10]. Значення граничного коефіцієнту кореляції частіше за все залежить від кількості елементів, що розглядаються і приймається рівним від 0,7 до 1. Таким чином коефіцієнт кореляції та відповідно узагальненої коваріації набуває нелінійного вигляду, що суперечить [2]. Необхідно відмітити, що деякі джерела обґрунтовують нелінійність коефіцієнту кореляції [5], тобто наявність між двома явищами залежності, яка виражається у вигляді квазілінійної функції. Але в такій постановці коефіцієнт кореляції застосовується саме в економічному аналізі.

Для модифікації виразу (7) можливим кроком є приведення його до вигляду (10). Приведене рівняння надає змоги ліквідувати від'ємну область при побудові залежності коефіцієнту узагальненої коваріації ρ від коефіцієнту кореляції r_{ij} (рис. 1, б).

$$\rho = \rho_{mt}\left\{2 - \left[\rho_{mt} + \frac{(1-\rho_{mt})(2{,}4 - lg\, n)}{1 - 0.1\rho_{mt}^{\ 2}(2{,}4 - lg\, n)^2}\right]\right\} \tag{10}$$

Для n=2 розрахункових перерізів (рис. 1, б), була побудована лінія тренда (поліном третього ступеня) з його рівнянням, за допомогою якого можна надалі визначати значення коефіцієнту узагальненої коваріації без ускладнень.

За [3] існує можливість розрахунку ймовірності появи певної події економічної системи з врахуванням кореляційного зв'язку для послідовно з'єднаних елементів:

$$P_s = \rho P_{i\,min} + (1-\rho)\prod_{i=1}^{n} P_i \tag{11}$$

де $P_{i,min}$ – мінімальна імовірність появи певної події економічної системи; P_i – ймовірність появи i-ої події економічної системи.

Спираючись на (11) запишемо вираз для розрахунку ймовірності відсутності певної події (явища) економічної системи двох послідовно з'єднаних елементів (які мають однакові ймовірності відсутності події) з урахуванням коефіцієнту узагальненої коваріації з подальшим відображенням:

$$Q_s^з = 1 - \left(\rho(1 - Q_i) + (1 - \rho)(1 - Q_i)^2\right) \tag{12}$$

Якщо перетворити функцію (6) близькою до лінійної при умові $\rho_{mt} = r_{ij}$, можна отримати наступний вираз коефіцієнту узагальненої коваріації двох елементів економічної системи, для яких враховується міра взаємозв'язку:

$$\rho = r_{ij}\left\{2 - \left[r_{ij} + \frac{(1 - r_{ij})(2 - log_2 n)}{1 - 0{,}1 \cdot r_{ij}^{\ 2}(2 - log_2 n)^2}\right]\right\} \tag{13}$$

Підставляючи в (13) $n = 2$, отримаємо логарифмічну функцію:

$$\rho = r_{ij}\left\{2 - \left[r_{ij} + \frac{(1 - r_{ij})}{1 - 0{,}1 r_{ij}^{\ 2}}\right]\right\} \tag{14}$$

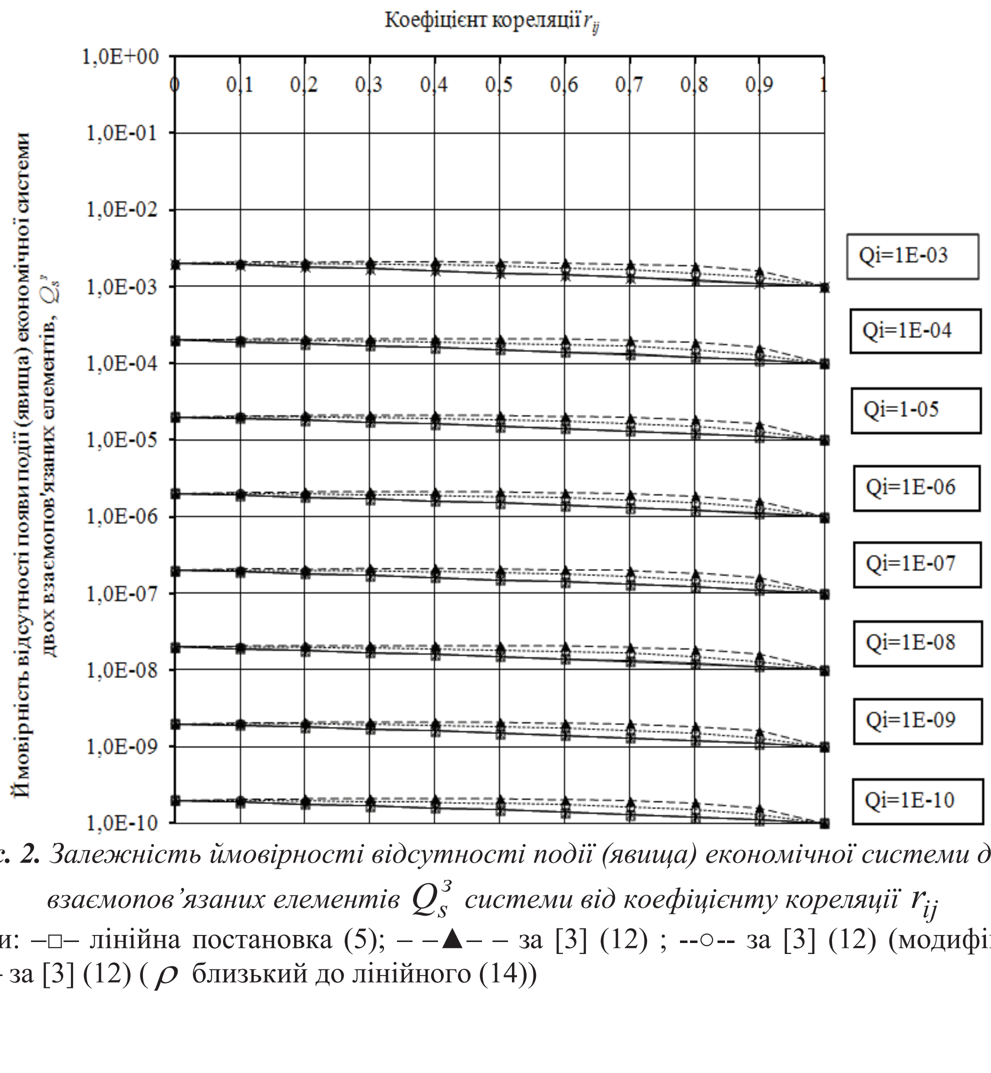

Рис. 2. *Залежність ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох взаємопов'язаних елементів* $Q_s^з$ *системи від коефіцієнту кореляції* r_{ij}

Примітки: –□– лінійна постановка (5); – –▲– – за [3] (12) ; --○-- за [3] (12) (модифікація ρ (10));–х– за [3] (12) (ρ близький до лінійного (14))

Запропонована залежність (14) при знаходженні ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох взаємопов'язаних елементів $Q_s^з$ (11) від чисельного значення коефіцієнту кореляції r_{ij} в діапазоні заданих значень ймовірності відсутності події (явища) Q_i або Q_j від 1E-03 до 1E-10 (рис. 2) наблизиться до лінійного закону.

а) б)

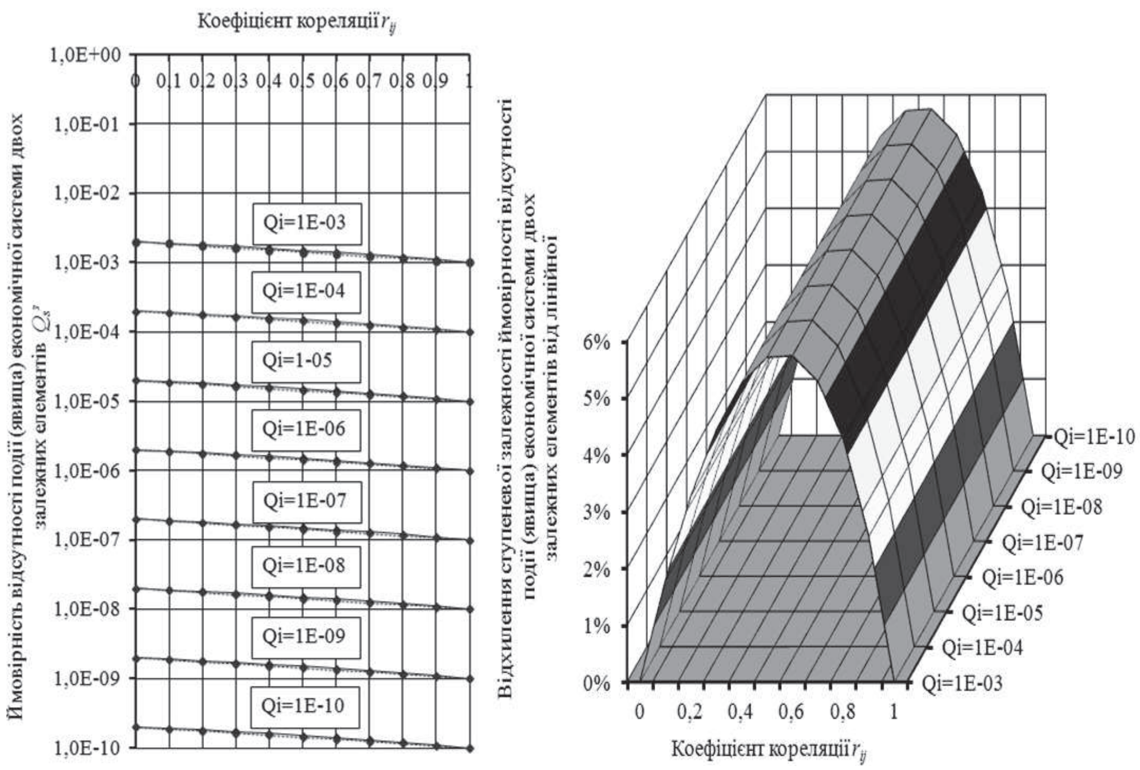

***Рис. 3.** а) залежність ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох взаємопов'язаних елементів $Q_s^з$ від коефіцієнту кореляції r_{ij} (— лінійна постановка; ---- ступенева постановка); б) відхилення ступеневої функції ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох взаємопов'язаних елементів в залежності від лінійної функції та імовірності відмови Q_i*

Залежність (12) прийме логічно обумовлену форму, що враховує кореляційний зв'язок між двома точками, випадкової функції. Треба відмітити, що вона повинна бути пропорційна до будь-якого коефіцієнту кореляції (від 0 до 1). Коефіцієнт узагальненої коваріації отримується близьким до коефіцієнту кореляції двох точок, випадкової функції у випадку з однаковими ймовірностями відсутності події (явища) Q_i. Також була запропонована ступенева функція визначення для послідовно з'єднаних елементів ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох елементів з урахуванням коефіцієнту парної кореляції r_{ij} (рис. 3, а) для тих же передумов [2], які були приведені для лінійної постановки:

$$Q_s^з = Q_s^н \cdot \left(\frac{Q_i}{Q_s^н} \right)^{r_{ij}} \tag{15}$$

Провівши дослідження відповідних залежностей, можна відмітити, що відхилення імовірності відмови системи двох взаємопов'язаних елементів $Q_s^з$ за (15), в порівнянні з (5) сягають до 5,75% при $r_{ij} = 0{,}6$ з подальшим зменшенням відсотків похибки (рис. 3, б). Аналізуючи різницю приведених величин, можна спостерігати тенденцію збільшення її чисельного значення до межі коефіцієнту кореляції $r_{ij} = 0{,}5$.

Висновки. В економічному аналізі виявлена можливість подання економічних систем подій (явищ) у вигляді структури з послідовним з'єднанням елементів. Проведене дослідження існуючих підходів визначення ймовірності відсутності певної події економічної системи залежних елементів. Представлена модифікована форма розрахунку ймовірності відсутності події (явища) економічної системи з урахування коефіцієнту парної кореляції. Отриманий математичний механізм визначення коефіцієнту узагальненої коваріації двох елементів економічної системи. В ході проведеного аналізу запропонована ступенева функція визначення ймовірності відсутності події (явища) економічної системи двох послідовно з'єднаних елементів з урахуванням коефіцієнту парної кореляції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576с.: ил.
3. Кудзис А.П. Оценка надежности железобетонных конструкций. – Вильнюс: Мокслас, 1985. – 156 с.
4. Купалова Г.І. Теорія економічного аналізу: навч. посіб. / Г.І. Купалова. – К.: Знання, 2008. – 639 с.
5. Матвеева С.П. Теория вероятностей и элементы математической статистики / С.П. Матвеева. – М.: Воениздат, 1980. – 399 с.
6. Пичугин С.Ф. Врахування кореляційного зв'язку між елементами в оцінках надійності будівельних конструкцій / С.П. Пічугін, К.В. Чичуліна // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – Вип. 74: В 2-х кн.: Книга 1. – К.: ДП НДІБК, 2011. – С. 386 – 394.

7. Сигорский В.П. Математический аппарат інженера / В.П. Сигорский. – К.: Техника, 1977. – 766 с.
8. Чичуліна К.В. Кореляційний зв'язок в економіко-математичних моделях // Наукові праці Полтавської державної аграрної академії. Вип.1(4) – Т. 3. – Полтава:ПДАА. –2012. – С. 250 – 255.
9. Dan M. Frangopol. Reliability and optimization of structural systems: assessment, design, and life-cycle performance : proceedings of the thirteenth IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems Kobe, Japan, October 11-14 2006 // Dan M. Frangopol, Mitsuo Kawatani , Chul-Woo Kim. Taylor & Francis, 2007 – 269p.
10. Ditlevsen O., Madsen H.O. Structural reliability methods // Department of mechanical engineering. Technical University of Denmark maritime engineering. 2003. – 323 p.
11. Hitoshi Furuta. Reliability and optimization of structural systems: proceedings of the 10th IFIP WG7.5 Working Conference on Reliability and optimization of structural systems, Osaka, Japan, 25-27 March 2002 / H. Furuta, M. Sakano. Taylor & Francis, 2003 – 276p.