

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕВЕРОЯТНОСТЕЙ

Посвящается Любознательным,
Старательным, Настойчивым.

Expansion of range [0,1] of values quantitative description (numerical measure) of random events is examined based on concept "incredibility".

Интуитивный подход к описанию понятия "невероятность"

В жизни *homo sapiens* иногда (а может – и чаще!?) происходят события (явления), относительно которых мы воскликнем: "Это просто невероятно!". "Невероятные события" естественно отнести (при выполнении определенного комплекса условий) к категории случайных событий – событий, которые изучаются в теории вероятностей (ТВ). Возникает вопрос: как оценить (описать) количественно степень невероятности наступления того или иного события.

Вероятность $P(S)$ (случайного) события S в ТВ определяется как числовая функция от события, область значений которой – промежуток $[0,1] \subset R$, то есть $E(P) = [0,1]$. Точки 0, 1 соответствуют вероятности предельных случаев стохастических событий – невозможного ($S = \emptyset$) и достоверного ($S = \Omega$).

Событие S является элементом алгебры событий A_S (или σ -алгебры – A_σ) как множества событий, состоящего из замкнутой относительно теоретико-множественных операций (\cup, \cap, \setminus) системы подмножеств пространства элементарных событий (исходов) $\Omega = \{\omega\}$ [1]. Впрочем, согласно теореме о продолжении вероятности [2], можно считать, что A_S является борелевской алгеброй, и в дальнейшем рассматривать алгебру A_σ .

Числовую функцию $\bar{P}(S)$, определенную на системе событий A_σ , с областью значений $E(\bar{P}) = R \setminus [0,1]$, назовем **невероятностью события** S . При этом будем различать **отрицательную** $\bar{P}^-(S)$ и **положительную** $\bar{P}^+(S)$ **невероятности** со значениями соответственно на бесконечных интервалах $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, то есть $E(\bar{P}^-) = (-\infty, 0)$, $E(\bar{P}^+) = (1, +\infty)$, а $E(\bar{P}) = E(\bar{P}^-) \cup E(\bar{P}^+)$:

$$\bar{P}(S) = \bar{P}^\mp(S) = \begin{cases} \bar{P}^-(S) \in (-\infty, 0) \\ \bar{P}^+(S) \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Точки 0, 1 – вероятности событий \emptyset , Ω – рассматриваются как **предельные значения невероятностей** $\bar{P}^-(S)$, $\bar{P}^+(S)$ соответственно слева от нуля и справа от единицы; предельными значениями невероятностей являются также несобственные числа $-\infty, +\infty$. Области значений функций $\bar{P}^-(S)$, $P(S)$, $\bar{P}^+(S)$ изображены на рис. 1.

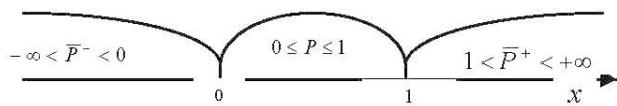


Рис 1. Области значений вероятности ($P(S)$), отрицательной и положительной невероятностей ($\bar{P}^-(S)$, $\bar{P}^+(S)$)

Изображенные области (см. рис. 1) разбивают множество действительных чисел на три качественные градации: "быть отрицательным" (0), "принадлежать отрезку $[0,1]$ " (1), "быть положительным, большим единицы" (2). Такому разбиению числовой оси отвечает трехзначный предикат

$$\Pi_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in E(\bar{P}^-) \\ 1, & \text{если } x \in E(P) \\ 2, & \text{если } x \in E(\bar{P}^+) \end{cases}$$

который позволяет соответствующие участки числовой оси описать уравнениями:

$$(-\infty, 0) : u^- = |y - \Pi_3(x)| = 0,$$

$$[0, 1] : u = |y + 1 - \Pi_3(x)| = 0,$$

$$(1, +\infty) : u^+ = |y + 2 - \Pi_3(x)| = 0.$$

Аналогично тому, как математическое понятие "множество" не следует идентифицировать с обыденным представлением о множестве, как о большом количестве, так и математическое понятие "невероятность" – с обыденным представлением о невозможном как очень большом, значительном, чрезвычайном. Согласно приведенным выше определениям (пока не строгим) в предельных случаях (когда $S = \emptyset$ или $S = \Omega$) невероятности \bar{P}^- , \bar{P}^+ могут принимать, как и вероятности, значения 0, 1.

С учетом этого достоверное в теоретико-вероятностном смысле событие естественно истолковать как **невозможное событие** в смысле невозможности. Действительно (рассуждая на уровне житейской логики), если создана система условий, при каждой реализации которой событие неизбежно наступает, то ничего невозможного в происходящем нет.

Невозможное в теоретико-вероятностном смысле событие следует истолковывать как достоверное событие в смысле невозможности. Действительно, если событие заведомо не может произойти при выполнении данной системы условий, то его наступление воистину невозможно! В дальнейшем событие $S = \Omega$ будем называть **достоверным по вероятности**, или **невозможным по невозможности**, а событие $S = \emptyset$ – **невозможным по вероятности**, или **достоверным по невозможности**.

Следует различать также семантику предложений:

"Числовая мера (количественная характеристика) степени возможности наступления события S – $P(S)$ ".

"Количественная характеристика степени возможности не наступления события S – $\bar{P}(S)$ ".

"Числовая мера степени невозможности наступления события S – $\bar{P}(S)$ ".

"Количественная характеристика степени невозможности не наступления события S – $\bar{P}(\bar{S})$ ".

где \bar{S} – событие, противоположное событию S .

Аксиоматический подход к созданию теории невероятностей

Учение о невероятностях – своеобразный "антимир" по отношению к ТВ – можно строить, не зависимо от ТВ, выбрав некоторую полную (или не полную), независимую и непротиворечивую систему аксиом. Однако, учитывая уже разработанный аппарат ТВ, мы будем рассматривать невероятность во взаимосвязи с вероятностью, конструируя функции, отображающие $E(P)$ на $E(\bar{P})$: если положить $P(S) = p$, то отрицательная и положительная невероятности представляются как функции от вероятности p :

$$\bar{P}^-(S) = \varphi^-(p), \bar{P}^+(S) = \varphi^+(p); p \in [0, 1].$$

Другими словами, $\bar{P}^-(S), \bar{P}^+(S)$ являются композициями отображений φ^- и P, φ^+ и P :

$$\bar{P}^-(S) = \varphi^-(P(S)), \bar{P}^+(S) = \varphi^+(P(S)) \quad \forall S \in A_S.$$

Это означает, что в качестве аксиом теории невероятностей (ТН) следует принять аксиомы ТВ [1], [2], [3]; если изучать модели случайных явлений, которые ограничиваются рассмотрением алгебры событий A_S , то их четыре, в противном случае – при переходе к σ -алгебре – пять.

Аналогично тому, как в ТВ постулируются существование вероятностей и их свойства, приведем перечень аксиом, определяющих невероятности случайных событий:

Аксиома 1. Множество случайных событий S является σ -алгеброй.

Аксиома 2. Каждому событию S отвечает число $P(S) = p$, принимающее значение из $[0, 1]$ и называемое вероятностью события S .

Аксиома 3. Вероятность пространства элементарных событий Ω равна единице: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 4 (аксиома конечной аддитивности). Если события S и T несовместны, то есть множества S и T не пересекаются, то $P(S \cup T) = P(S) + P(T)$.

Аксиома 5 (аксиома непрерывности). Для всякой монотонной последовательности событий $S_n, n = 1, 2, \dots$, имеет место равенство:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n).$$

Аксиома 6. $\forall S \notin \{\emptyset, \Omega\}$ каждой вероятности $P(S) = p$ по законам φ^- и φ^+ отвечают два числа: $p^- = \varphi^-(p) < 0$ и $p^+ = \varphi^+(p) > 1$, которые удовлетворяют соотношению $p^- + p^+ = 1$ и называются соответственно **отрицательной и положительной невероятностями**, при этом: $\varphi^-(1) = 0, \varphi^+(1) = 1, \varphi^\mp(0) = \mp\infty$.

Значения невероятностей $\varphi^-(1), \varphi^+(0)$ постулируются в согласии с аксиомой непрерывности. Пусть

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \Omega, \text{ то есть}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \Omega, \quad S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \dots \quad \text{и}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset, \text{ то есть } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \emptyset.$$

Тогда

$$P^\mp(S) = \varphi^\mp(P(S)) \Rightarrow P^\mp(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n) = \varphi^\mp(\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n)) \Rightarrow \begin{cases} P^\mp(\Omega) = \varphi^\mp(1) \\ P^\mp(\emptyset) = \varphi^\mp(0) \end{cases}.$$

Четверку $\{\Omega, A_S, P, \bar{P}\}$, включающую в себя поле вероятностей [3], назовем **объединенным пространством вероятностей и невероятностей**, или **полем В-Н**.

Если вместо A_S рассматривается борелевская алгебра (σ -алгебра), то соответствующее пространство называется борелевским.

Система аксиом 1 – 6: **независима**, так как независимы аксиомы 1 – 5, а аксиома 6 не может быть получена как следствие остальных аксиом, поскольку ими не постулируются функции от вероятности;

непротиворечива, так как непротиворечивы аксиомы ТВ, а аксиома 6 внутренне не противоречива: отрицательная и положительная невероятности события однозначно определяются его вероятностью;

полной не является: в разных вопросах ТВ рассматриваются различные пространства вероятностей, которые порождают, в свою очередь, различные поля В-Н.

Невероятности результатов операций над событиями не постулируются. В противном случае система аксиом стала бы противоречивой: при различном выборе функций $\varphi^-(p)$ и $\varphi^+(p)$ невероятность результата одной и той же операции была бы разной.

Каждое вероятностное пространство (определенное классической схемой, геометрическими вероятностями, дискретное и абсолютно непрерывное вероятностные пространства) порождает соответствующее поле В-Н.

В случае строгой монотонности функций $\varphi^-(p)$ и $\varphi^+(p)$ возможно представление вероятности через положительную и отрицательную невероятности: $p = \psi^-(p^-)$, $p = \psi^+(p^+)$, где ψ^-, ψ^+ – идентификаторы функций, обратных по отношению к функциям φ^- и φ^+ соответственно.

Другую теорию получим, если в качестве множества значений невероятностей взять всю числовую ось $R = (-\infty, +\infty)$ и ввести в рассмотрение функции $\bar{P}^-(S), \bar{P}^+(S)$ с областями значений соответственно $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ и общим предельным значением – точкой 0. В этом случае для некоторых событий положительные невероятности, как и вероятности, будут принадлежать сегменту $[0, 1] = E(P) \cap E(\bar{P})$. В аксиоме 6 следует условие $p^- + p^+ = 1$ заменить условием $p^- + p^+ = 0$.

Некоторые парадигмы невероятностей

Приведенное выше нестрогое определение невероятности $\bar{P}(S)$ события S и аксиома 6 "умалчивают" о том, какой вид имеет (или должна иметь) числовая функция, названная невероятностью события. Это обстоятельство обеспечивает "необычный простор" для создания разнообразных теорий,

отвечающих запросам практики или ожидающих своего применения в будущем.

Как и в изложенном выше, для краткости записей в дальнейшем положим: $\bar{P}^-(S) = p^-$, $\bar{P}^+(S) = p^+$, $P(S) = p$, и приведем некоторые парадигмы формализованного представления положительной и отрицательной невероятностей (греч. *paradeigma* – пример, образец):

1⁰. Гиперболические невероятности:

$$p^+ = \frac{1}{p}, \quad p^- = \frac{p-1}{p}. \quad (1)$$

2⁰. Тригонометрические невероятности:

$$p^+ = 1 + k \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} p, \quad p^- = -k \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} p, \quad (2)$$

k – параметр ($k > 0$).

3⁰. Логарифмические невероятности:

$$p^+ = 1 - k \cdot \ln p, \quad p^- = k \cdot \ln p, \quad k \text{ – параметр} \quad (k > 0). \quad (3)$$

4⁰. Экспоненциальные невероятности:

$$p^+ = \exp\left(\frac{1}{p}-1\right), \quad p^- = 1 - \exp\left(\frac{1}{p}-1\right). \quad (4)$$

5⁰. Линейные релятивистские невероятности:

$$p^+ = (1 - c_\infty)p + c_\infty, \quad p^- = -(1 - c_\infty)p + (1 - c_\infty), \quad (5)$$

где $c_\infty = \text{const}$ – релятивистская бесконечность, равная наибольшему значению невероятности ($c_\infty > 0$);

$[-c_\infty, +c_\infty]$ – релятивистская числовая ось [4]; [5].

Релятивизм (лат. *relativus* – относительный) – направление в теории познания, которое исходит из того факта, что человек на той или иной ступени своего развития не может получить исчерпывающее и абсолютно верное знание как об всей действительности в целом, так и о конкретном предмете исследования [6].

В частности, перешедшая в арифметику аксиома Архимеда для отрезков, выглядит так: если даны величины a и b , $0 < a < b$, то всегда можно найти такое целое число n , что $an > b$. Из этой аксиомы вытекает представление о неограниченности числовой оси. Альтернативной аксиоме Архимеда является релятивистская аксиома о существовании наибольшего числа, которое выше обозначено через c_∞ . Можно привести примеры различных реальных ситуаций, в которых такое число можно указать:

в социологических исследованиях принять c_∞ , равным количеству всех жителей планеты;

в банковском деле, в финансовых исследованиях, можно взять c_∞ равным сумме всех выпущенных денег, выраженной в копейках;

в специальной теории относительности c_∞ – это скорость света.

Анализируя соотношения (1) – (5), убеждаемся, что для всех парадигм невероятностей величины p^+ , p^- обладают свойством: $p^- + p^+ = 1$, то есть удовлетворяют аксиоме 6.

Из соотношений (1) – (5) легко получить выражения вероятности событий через их положительные и отрицательные невероятности. В формулах (3) логарифмы можно брать по любому допустимому основанию.

На рис. 2 изображен схематический чертеж, отражающий характер поведения невероятностей (1^0 – 4^0) событий в зависимости от вероятности их наступления, а на рис. 3 – графики линейных релятивистских невероятностей.

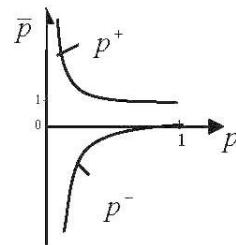


Рис. 2. Схематичний графік невероятностей p^+ , p^-

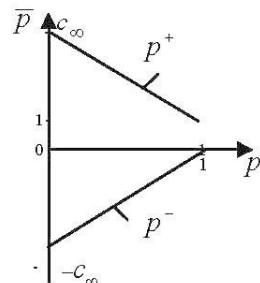


Рис. 3. Графік лінійних релятивистських невероятностей

Естественно возникает вопрос, а зачем еще эти невероятности – отрицательная и положительная – если уже есть вероятность? Тем более что невероятности выражаются через нее: $\bar{P}^-(S) = \varphi^-(P(S))$, $\bar{P}^+(S) = \varphi^+(P(S))$. Рассуждая подобным образом относительно множества функций, приходим к следующему: а зачем нужен ctgx и гиперболические функции вообще, если есть tgx и, соответственно, экспонента e^x , через которые они выражаются? Для развития теоретической математики введение специальных символов для функций tgx , ctgx , thx и многих других вообще не обязательно: их можно опустить, не изменив множества элементарных функций. Однако легко представить, какие трудности возникли бы в прикладной математике, если бы для числовых функций, являющихся важными характеристиками различных явлений и процессов, не были введены соответствующие символы.

Предлагаемое "расширение" числовой меры стохастических событий невероятностями дает возможность учесть (помимо вероятности) две качественные градации ("быть отрицательным" (0), "быть положительным, большим единицы" (2), см. рис. 1) количественных характеристик реальных процессов. Так, применяя теоретико-вероятностные методы

(в статистических исследованиях) к прогнозированию, целесообразно различать изменение изучаемого фактора в сторону его уменьшения или увеличения, привлекая соответственно $\Phi^-(p)$ или $\Phi^+(p)$; например, изучая изменение курса гривны (пусть – по отношению к доллару) или объема выпускаемой продукции (или прибыли) предприятия.

В качестве примера рассмотрим "внедрение" невероятностей в теорию связи (со статистической мерой информации).

Мера информации и логарифмические невероятности

Как известно [7], основной характеристикой сообщения в теории связи является количество информации I , а его доля (часть), приходящаяся на один элемент сообщения, называется энтропией H :

$$I = n \cdot \log m, \quad H = \frac{I}{n} = \log m, \quad (6)$$

где m – мощность алфавита (число букв алфавита $x_i, i = 1, m$), каждая из которых может служить элементом сообщения;

n – длина сообщения;
логарифм m чаще всего берется по основанию 2 или $e = 2, 7\dots$.

Если каждая из букв алфавита появляется в сообщении с различной вероятностью $p_i, i = 1, m$, то величины I и H подсчитываются по формулам Шеннона:

$$I = -n \sum_{i=1}^m p_i \log p_i, \quad H = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i = \sum_{i=1}^m p_i \log \frac{1}{p_i}. \quad (7)$$

Величину $\log \frac{1}{p_i}$ называют частной энтропией $H_i = \log \frac{1}{p_i}$,

характеризующей информативность буквы x_i алфавита, тогда H – среднее значение частных энтропий. Произведение $p_i H_i = -p_i \log p_i$ отражает вклад буквы x_i в энтропию H .

Выберем в логарифмических невероятностях (см. (3)) параметр k равным длине сообщения n , а основание логарифма – равным двум, тогда соответствующие соотношения примут вид:

$$p_i^+ = 1 - n \cdot \log p_i, \quad p_i^- = n \cdot \log p_i = -n \cdot \log \frac{1}{p_i} \quad (8)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Если для информации в соответствии с отрицательной и положительной невероятностями ввести две качественные градации: "быть переданной" (1), "быть принятой" (2), то, сопоставляя (7) и (8), получаем:

$$I^- = nH = -\sum_{i=1}^m p_i p_i^- \quad \text{– количество переданной информации;}$$

$$I^+ = \sum_{i=1}^m p_i p_i^+ - 1 \quad \text{– количество принятой информации.}$$

Величины I^- и I^+ равны между собой как количества информации, но их аналитическое (символьное) представление отражает соответственно, о какой информации идет речь – переданной или принятой.

Представим вклад буквы x_i в энтропию H через p_i^- :

$$p_i H_i = -p_i \log p_i \Rightarrow |p_i^-| = n \cdot \log p_i$$

$$p_i^- = e^{\frac{p_i^-}{n}} \Rightarrow p_i H_i = -\frac{p_i^-}{n} \cdot e^{\frac{p_i^-}{n}}.$$

Анализ показывает, что при $p_i^- = 0$ функция $p_i H_i$ равна нулю, затем возрастает до своего максимума и при уменьшении p_i^- до $-\infty$ стремится к нулю. Точка максимума $p_i^- = -n$, а максимум равен $1/e$. Таким образом, отрицательная невероятность p_i^- , численно равная длине сообщения n , взятой со знаком минус, определяет максимальный вклад в энтропию буквы x_i . Это можно истолковать как **информационный смысл отрицательной логарифмической невероятности**.

В дальнейшем предстоит долгая (и наверно нелегкая) работа, связанная с исследованием законов распределения невероятностей, их числовых характеристик, предельных теорем и многоного другого.

В независимости от того, найдет ли предложенный подход к количественной характеристике случайных событий дальнейшее развитие (в теоретическом плане и в приложениях) или не найдет, изложенный материал, без сомнения, полезен с познавательной точки зрения, особенно для студентов-любознательных – будущих ученых – у которых еще не успели сформироваться догматические установки.

Литература: 1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с. 2. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978. – 224 с. 3. Королюк В. С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скородод, А. Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с. 4. Ращевский П. К. Одномате натурального ряда // Усп. мат. наук. – 1973. – Т. XXVIII. Вып. 4 (172). – С. 243 – 246. 5. Рвачев В. Л. Релятивистский взгляд на развитие конструктивных средств математики. Препринт № 337, Ин-т проблем машиностроения АН УССР. – Харьков, 1990. – 44 с. 6. Краткий словарь по философии / Под. общ. ред. И. В. Блауберга, И. В. Пантини. – 4-е изд. – М.: Политиздат, 1982. – 432 с. 7. Яглом А. М. Вероятность и информация / А. М. Яглом, И. М. Яглом. – М.: Физматгиз, 1963. – 540 с.

Стаття надійшла до редакції
16.04.2009 р.

