

## **SIMULATION DE PROCESSUS LOGISTIQUES DANS LES SYSTEMES DE PRODUCTION FLEXIBLES**

***M. Rummyantsev***

L'article est consacré à l'étude de quatre modèles du système de production flexible organisé sur la base de la théorie des files d'attente où le système de production flexible lui-même est représenté comme un système monocanal des files d'attente avec le renouvellement du réglage et la perte des commandes. On suppose qu'à l'entrée tous les quatre modèles de système de fabrication flexible reçoivent des commandes dont le flux de Poisson est de  $\lambda > 0$  par unité de temps. Le traitement des commandes s'effectue suivant l'ordre de leur arrivée, et le temps de traitement des commandes est conforme à la loi exponentielle de la répartition dans le paramètre de  $\mu > 0$ . L'appareil a une particularité qui consiste en ce qu'après le traitement de toutes les commandes qui se trouvent dans le système il nécessite un réajustement pour adapter l'équipement de production à l'exécution d'une nouvelle série de commandes. La durée supposée du réajustement pour tous les modèles a une valeur de distribution exponentielle dont le paramètre est de  $\nu > 0$ . Il est supposé que les commandes qui arrivent dans le système lors de la commutation se trouvent perdues.

Les caractéristiques trouvées pour les systèmes en question sont utilisées pour définir les paramètres de base du fonctionnement d'un système, à savoir : la probabilité du réajustement de l'équipement, la probabilité du refus de service et la durée moyenne d'une file d'attente. Ces caractéristiques peuvent être utilisées pour résoudre le problème du contrôle optimal des systèmes de fabrication flexibles.

*Mots-clés:* Système de production flexible, appareil, tourner le flux d'entrée, le temps de traitement des commandes, le temps de changement, des performances optimales.

.....

## **МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ГНУЧКИХ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМАХ**

***Румянцев М. В.***

Розглянуто чотири моделі гнучкої виробничої системи, побудованої на основі теорії черг, у якій саму гнучку виробничу систему подано у вигляді одноканальної системи масового обслуговування з переналагодженням і втратою вимог. Передбачено, що на вхід усіх чотирьох моделей гнучкої виробничої системи надходить пуассонівський потік інтенсивності  $\lambda > 0$  замовлень на одиницю часу. Оброблення замовлень відбувається в порядку їхнього надходження, причому час оброблення підпорядковано закону експоненціального розподілу з параметром  $\mu > 0$ . Прилад має особливість, яка полягає в тому, що після закінчення оброблення всіх замовлень, що знаходяться в системі, для відновлення роботи йому потрібне переналагодження, спрямоване на підготовку обладнання на випуск нової партії замовлень. Для всіх моделей передбачено, що тривалість переналагодження має експоненціальний розподіл із параметром  $\nu > 0$  і вимоги, що надходять до системи, під час переналагодження втрачаються.

Для описаних систем знайдено характеристики, які використовують для визначення таких основних параметрів функціонування системи, а саме: імовірності знаходження

обладнання на переналагодженні, імовірності отримання відмови в обслуговуванні та середньої довжини черги. Ці характеристики може бути використано у процесі вирішення питання про оптимальне управління гнучкими виробничими системами.

*Ключові слова:* гнучка виробнича система, прилад, черга, вхідний потік, час оброблення замовлення, час переналагодження, оптимальні характеристики.

.....

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГИБКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

*Румянцев Н. В.*

Рассмотрены четыре модели гибкой производственной системы, построенной на основе теории очередей, в которой сама гибкая производственная система представляется в виде одноканальной системы массового обслуживания с переналадкой и потерей требований. Предполагается, что на вход всех четырех моделей гибкой производственной системы поступает пуассоновский поток интенсивности  $\lambda > 0$  заказов в единицу времени. Обработка заказов происходит в порядке их поступления, причем время обработки подчиняется закону экспоненциального распределения с параметром  $\mu > 0$ . Прибор обладает особенностью, состоящей в том, что после окончания обработки всех заказов, находящихся в системе, для возобновления работы ему нужна переналадка, направленная на подготовку оборудования на выпуск новой партии заказов. Для всех моделей предполагается, что длительность переналадки имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\nu > 0$  и требования, поступающие в систему, во время переналадки теряются.

Для описанных систем найдены характеристики, которые используются для определения следующих основных параметров функционирования системы, а именно: вероятности нахождения оборудования на переналадке, вероятности получения отказа в обслуживании и средней длины очереди. Эти характеристики могут быть использованы при решении вопроса об оптимальном управлении гибкими производственными системами.

*Ключевые слова:* гибкая производственная система, прибор, очередь, входной поток, время обработки заказа, время переналадки, оптимальные характеристики.

.....

## SIMULATION OF LOGISTICS PROCESSES IN FLEXIBLE MANUFACTURING SYSTEMS

*M. Rumyantsev*

Four models of a flexible production system built on the basis of the queuing theory have been considered, this theory presenting the flexible production system itself as a single-channel queuing system with changeover and loss of requirements. It is assumed that the input of all four models of the flexible manufacturing system receives a Poisson flow of orders at a rate of  $\lambda > 0$  per unit of time. The order processing takes place in the order they are received, and the order processing time obeys the exponential distribution law with the parameter  $\mu > 0$ . The device has a feature consisting in the fact that having processed all the orders available in the system, in order to resume work, it needs readjustment aiming to prepare the equipment for completing a new batch of orders. For all models, it is assumed that the duration of the changeover has an exponential distribution with the parameter  $\nu > 0$ .

For the systems described, characteristics have been found which are used to determine the system operation basic parameters, namely the probability of equipment being on changeover, the

probability of receiving a denial for service and the average queue length. These characteristics can be used in solving the problem of optimal control of flexible manufacturing systems.

**Keywords:** flexible manufacturing system, appliance, turn, the input flow, the order processing time, changeover time, optimal characteristics.

La viabilité de l'entreprise dépend en grande partie de sa politique de l'assortiment et les capacités varient considérablement de produits à libération sans préjudice du développement de l'entreprise. Jusqu'aux années 1970, la flexibilité de la commercialisation a été fournie par l'établissement d'entrepôts d'un grand stock de produits finis. La modification de la gamme de produits dans les conditions de fonctionnement des grandes entreprises était une affaire assez compliquée parce que cela exigeait beaucoup de temps et d'argent pour le remplacement, l'installation et la mise en service de nouvelles machines et équipements [1; 2].

Après l'apparition de la méthode logistique, l'accent de la création de stocks de produits finis transféré au stockage de capacité, à savoir: on propose la transition vers la mise en place et l'organisation de la production en fonction du type de l'entreprise flexible et systèmes logistiques (EFSL) [1; 2], qui sont capables de réagir rapidement aux conditions changeantes du marché. Sous la flexibilité de l'entreprise on comprend sa capacité à changer d'un état de travail fonctionnel à l'autre, avec les coûts et les pertes minimales [3], voilà pourquoi la réduction de coût de production est réalisée non pas par l'augmentation traditionnelle des volumes de production, mais à la suite de la logistique du processus de production, d'alignement et la synchronisation de tous les flux de matières [4]. Le travail EFSL se passe sous l'influence de facteurs externes et internes. Les facteurs externes peuvent inclure: la fabrication de la nouvelle gamme de produits, conformément à la demande du marché; des changements de volume de la production, et donc de taille des parties de lancement; la violation du rythme de l'approvisionnement, y compris le non respect des délais de livraison d'ébauches; les modifications structurelles, ce qui implique la nécessité de la remise au point et de recyclage de la production. Parmi les facteurs des troubles internes qui provoquent la violation du processus de production on peut nommer l'échec et la rupture de l'équipement principal; la rupture de l'outil de coupe et l'autre support; le défaut lors de la fabrication du produit; les interruptions et les écarts dans le personnel de production [5].

Ainsi, afin de minimiser l'impact des facteurs ci-dessus, nous avons besoin de connaître les caractéristiques numériques de la base du fonctionnement du EFSL. Les questions de description numérique des systèmes de fabrication flexibles ont été étudiées dans le travail [6] pour les différents comportements d'un système flexible avant le dispositif de commutation et après son achèvement. Notons que dans ces travaux l'EFSL a été présentée sous forme de système d'une file d'attente à canal unique avec le réajustement de l'appareil, qui vient

- a) après avoir entré les demandes dans le système libre;
- b) après le traitement de toutes les demandes des clients,

et on a supposé que les demandes entrées dans le système pendant de le réajustement de l'appareil ne sont pas perdues, et une fois le réajustement fini, elles sont immédiatement prises en service.

Dans cet article, nous étudions le cas où les demandes reçues par le système au cours de réajustement de l'appareil sont perdues.

**Schema 1.** Dans cette section, nous étudions le premier cas, à savoir: réajustement de l'appareil a lieu après l'arrivée de la demande dans un système libre et les demandes entrées pendant le réajustement de l'appareil sont perdues [7; 8]. Décrivons en détail les travaux de l'EFSL, sur l'hypothèse que les défaillances et les pannes du matériel comme des outils primaires et auxiliaires pendant le fonctionnement ne se produisent pas, à savoir, le canal est totalement fiable.

Le fonctionnement de EFSL peut être représenté par file d'attente à canal unique à l'entrée de laquelle arrive le flux de loi de Poisson de l'intensité  $\lambda > 0$ . Le service des clients se produit dans l'ordre de réception, et la durée de service a la loi de la distribution exponentielle de paramètre  $\mu > 0$ . L'appareil de service a le trait qui consistant du fait qu'après le service des clients qui sont dans le système, il va dans l'état de repos, que nous appelons l'état "libre-non prêt". Le premier client entré dans le système est perdu, mais cette perte provoque un réajustement de l'appareil ou une commutation ou une réadaptation de l'appareil de service, dont la durée a la loi exponentielle de paramètre  $\nu > 0$ . Toutes les demandes reçues au cours du réajustement de l'appareil de service sont perdues. Après avoir fini le réajustement, l'appareil va dans un état de repos, que nous appelons l'état "libre-prêt" et maintenant il est prêt à servir les demandes. Maintenant les demandes entrées dans le système sont servies dans l'ordre où elles sont reçues. Le système de service décrit est un modèle d'un grand nombre de systèmes réels: les télécommunications, la production des processus de transport, de stockage et de distribution de la production.

Pour résoudre le système décrit ci-dessus, étudions un processus aléatoire de Markov  $\xi(t)$ , l'espace de phase duquelle a la forme  $E = \{(0,0), 0, 0^*, 1, 2, 3, \dots\}$  et de l'état

- $(0, 0)$  – signifie que l'appareil est "libre-non prêt";
- $0^*$  – signifie que l'appareil est en réajustement;
- $0$  – signifie que l'appareil est libre et prêt au service ("libre-prêt");
- $k(k \geq 1)$  – cela signifie que dans le système il y a k clients et de plus un client est en service, et  $(k - 1)$  clients est en attente.

Graph marquant l'état de processus  $\xi(t)$  est présenté sur la Fig. 1:

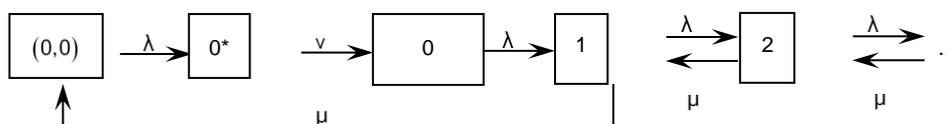


Fig. 1. Graph d'états, décrit le fonctionnement du système avec réajustement de l'appareil au début du cycle de production et clients perdus [The state graph describing functioning of the system with vacation at the beginning of the production cycle and the loss of orders]

Soit  $P_{00} = P\{\xi(t) = (0,0)\}$ ,  $P_0 = P\{\xi(t) = 0^*\}$ ,  $P_k = P\{\xi(t) = k\}$ ,  $k \geq 0$  – probabilités stationnaires des états du système. Alors, sur la base de graph marqués d'états de processus on peut facilement mettre en place un système d'équations pour les probabilités stationnaires des états du système, qui a la forme'

$$\begin{cases} -\lambda P_{00} + \mu P_1 = 0, \\ -\nu P_0 + \lambda P_{00} = 0, \\ -\lambda P_0 + \nu P_0^* = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

En résolvant le système (1), nous constatons que les probabilités d'état sont égaux aux valeurs suivantes

$$P_{00} = P_0, \quad P_0^* = \delta P_0, \quad P_k = \rho^k P_0, \quad k \geq 0, \quad (2)$$

où  $\rho = \lambda/\mu$ ,  $\delta = \lambda/\nu$ .

Probabilité  $P_0$  se trouve de la condition de normalisation

$$P_{00} + P_0^* + \sum_{k \geq 0} P_k = 1. \quad (3)$$

Après la substitution dans (3) expressions (2), nous constatons que

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1+(1+\delta)(1-\rho)}. \quad (4)$$

Maintenant, nous pouvons définir les caractéristiques agrandi du système logistique flexibles qui sont utilisés dans l'analyse quantitative de l'efficacité du fonctionnement du système.

1) La probabilité pour que l'appareil soit dans un état de réadaptation, est égale à

$$P_0^* = \frac{\delta(1-\rho)}{1+(1+\delta)(1-\rho)}. \quad (5)$$

2) La probabilité pour que l'appareil soit "libre-non prêt"  $P_{00}$  est égal à (4), a la probabilité pour que l'appareil soit occupé de service des clients est

$$P_{\text{occup}} = \sum_{k \geq 1} P_k = \frac{\rho P_0}{1-\rho} = \frac{\rho}{1+(1+\delta)(1-\rho)}. \quad (6)$$

**Remarque.** Les formules (2), (4) – (6) sont applicables lorsque le temps de réadaptation (commutation)  $\frac{1}{\nu} > 0$ .

Ces formules ne sont pas applicables lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ , i.e. lorsque le temps de commutation est très petit ou absente. Dans ce cas, il faut utiliser les formules classiques d'Erlang [9].

**Remarque 1.** Si l'on suppose qu'il y a une limite de file d'attente, i.e. supposons que la longueur de file d'attente ne

dépasse pas  $n$ , dans ce cas, les formules (2) prendront les formes de

$$P_{00} = P_0, \quad P_0^* = \delta P_0, \quad P_k = \rho^k P_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Substituant (7) dans la condition de normalisation (3), nous trouvons la valeur de  $P_0$ :

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1} + (1+\delta)(1-\rho)}. \quad (8)$$

Donc, la probabilité que l'appareil produit la réadaptation, est

$$P_0^* = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1} + (1+\delta)(1-\rho)}. \quad (9)$$

La probabilité que l'appareil est "libre-pas prêt" est aussi égal à (8), et la probabilité que l'appareil est occupés de service des clients est

$$P_{\text{occup}} = \sum_{k=1}^n P_k = \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho^{n+1} + (1+\delta)(1-\rho)}. \quad (10)$$

**Remarque 2.** Pour construction un système de gestion optimale avec réadaptation (ce qui concerne du choix des variables  $\lambda$ ,  $\nu$  dans le cas de construction de fonction de dépenses) on peut utiliser ces formules (4), (5), (6) ou (8), (9), (10).

**Schema 2.** Etudions maintenant le cas où l'appareil de traitement possède une caractéristique consistant dans le fait que, après de service des clients qui se trouvent dans le système, il va immédiatement en réajustement de l'appareil [7; 10]. Les clients entrant dans le système lors du réajustement de l'appareil, sont perdues. Toutes les autres hypothèses qui ont eu lieu dans le schéma 1 sont également valables ici. Après la fin du réajustement de l'appareil, l'appareil passe à l'état qui sera appelé "libre – prêt", restant dans lequel il est en mesure de services des clients entrantes. Toutes les autres hypothèses qui ont eu lieu dans le schéma 1 sont également valables ici.

Pour résoudre le problème décrit ci-dessus, envisageons un processus de Markov aléatoire  $\xi(t)$ , l'espace de phase duquelle a la forme de  $E_1 = \{0^*, 0, 1, 2, \dots\}$ , où l'état du processus est caractérisé par:

- (0, 0) – signifie que l'appareil est "libre-non prêt";
- $0^*$  – signifie que l'appareil est en réajustement;
- 0 – signifie que l'appareil est libre et prêt au service ("libre-prêt");
- $k(k \geq 1)$  – cela signifie que dans le système il y a  $k$  clients et de plus un client est en train d'être servi, et  $(k - 1)$  clients sont en attente.

Pour simplifier la fabrication des équations de Kolmogorov décrivant la dépendance des probabilités d'un processus aléatoire  $\xi(t)$  d'état définies sur l'espace de phase du  $E$  donnons le Graph marquant l'états de processus  $\xi(t)$  (Fig. 2).

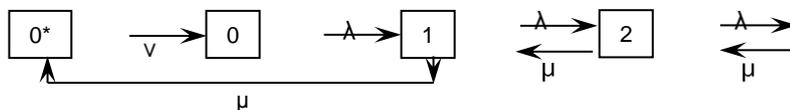


Fig. 2. Graph d'états, décrit le fonctionnement du système avec réajustement de l'appareil à la fin du cycle de production et clients perdus  
 [The state graph describing functioning of the system with the vacation at the end of the period of employment and the loss of orders]

Finalement nous avons

$$\begin{cases} -vP_0 + \mu P_1 = 0, \\ -\lambda P_0 + vP_0 = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0, k \geq 1. \end{cases} \quad (11)$$

En résolvant le système (11), nous trouvons que les formules sont presque égaux aux formules d'Erlang [9]:

$$P_0 = \delta P_0, \quad P_k = \rho^k P_0, \quad k \geq 1. \quad (12)$$

Probabilité  $P_0$  se trouve dans la condition de normalisation

$$P_0 + P_0 + P_1 + \dots = 1.$$

Après substitution des expressions (12), nous constatons que dans la condition de normalisation, on aura que

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1+\delta(1-\rho)}, \quad (13)$$

à condition que  $\rho < 1$ .

Maintenant, en remplaçant (13) dans (12), nous trouvons que

$$P_k = \frac{\rho^k (1-\rho)}{1+\delta(1-\rho)}, \quad k \geq 1. \quad (14)$$

**Remarque.** En supposant que le temps de changement tend vers zéro, ce qui est équivalent à  $\delta \rightarrow \infty$  alors à partir de la formule (13), on constate que

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ P_k = \rho^k (1-\rho), \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Donc, nous voyons que la formule (15) coïncide avec des formules Erlang [9] pour le système de file d'attente à canal unique.

Pour décrire et analyser le système de production flexible il est nécessaire de calculer ses caractéristiques de base:

1) la probabilité de refus de service des clients dans un système flexible est déterminée par la probabilité pour qu'il soit en état de changement. Ainsi, la probabilité de refus  $P_{ref}$  est

$$P_{ref}^{(1)} = P_0^* = \delta P_0 = \frac{\delta(1-\rho)}{1+\delta(1-\rho)};$$

2) la capacité d'accès relative du système est  $1 - P_{ref}$

$$\Pi_{rel}^{(1)} = 1 - P_{ref} = 1 - P_0^* = 1 - \delta P_0 = \frac{1}{1+\delta(1-\rho)};$$

3) la capacité d'accès absolue du système A est égale au nombre moyen de clients traitées par unité de temps et est

$$A^{(1)} = \lambda \Pi_{rel} = \lambda (1 - \delta P_0) = \frac{\lambda}{1+\delta(1-\rho)};$$

4) la caractéristique du système assez importante est la longueur moyenne de file d'attente  $\bar{q}^{(1)}$ . Dans notre cas, elle est calculée selon la formule

$$\bar{q}^{(1)} = 0 \times (P_0 + P_0 + P_1) + P_2 + 2P_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho^2 P_0}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{(1+\delta(1-\rho))(1-\rho)};$$

5) le temps d'attente moyen dans la file d'attente  $\bar{t}_{att}$  coïncide avec le temps d'attente moyen dans le système M/M/1 et est égal à

$$\bar{t}_{att}^{(1)} = \frac{\bar{q}}{\lambda} = \frac{\rho^2 P_0}{\lambda (1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{\lambda (1-\rho) [1+\delta(1-\rho)]};$$

6) la caractéristique importante à considérer lors de la détermination de la qualité du travail d'un système de production flexible, est le taux d'emploi, qui dans ce cas est tout simplement la probabilité du système de l'emploi  $K_{taux}$  et est calculé comme

$$K_{taux} = P_1 + P_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k P_0 = \frac{\rho P_0}{1-\rho} = \frac{\rho}{1+\delta(1-\rho)}.$$

Donc, en conclusion remarquons que, pour caractériser le travail du système de l'entreprise flexible on a encore besoin de connaître les trois caractéristiques principales qui influence le travaille efficace de l'entreprise:

– la probabilité de réajustement de l'appareil, qui détermine le temps moyen pendant lequel le système flexible produit un réajustement de l'appareil, à savoir si le temps  $t$  – c'est le temps de fonctionnement du système, alors à l'état du réajustement de l'appareil elle se trouve au moyenne  $t \times P_0$  temps, à savoir

$$t \times P_0 = \frac{t\delta(1-\rho)}{1+\delta(1-\rho)};$$

– la probabilité d'indisponibilité du système  $P_0$ , ce qui signifie que pendant la période du temps  $t \times P_0$  c'est-à-dire pendant un certain temps

$$t \times P_0 = \frac{t(1-\rho)}{1+\delta(1-\rho)}$$

le système flexible est libre;

– la probabilité que le système est occupé  $P_{occ}$  qui détermine le temps moyen pendant lequel le système flexible marche se calcule d'après la formule suivante :

$$t \times P_{occ} = \frac{t\rho}{1+\delta(1+\rho)}.$$

Si nous supposons que le nombre de commandes ou soi-disant le portefeuille dynamique de commandes dans un système flexible est limité par le nombre  $m$  qui sont dans le système, alors nous pouvons facilement trouver les probabilités des états de l'entreprise flexible (EF) décrits par la file d'attente limitée. Dans ce cas, nous constatons aisément que

$$P_0 = \delta P_0, \quad P_k = \rho^k P_0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

Probabilité  $P_0$  se trouve de la condition de normalisation qui a l'aire:

$$P_0 + P_0 + P_1 + \dots + P_m = 1.$$

et qui nous donne que

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1}} \quad (17)$$

A la condition de l'expression obtenue (17) la probabilité  $P_{0^*}$  est égal à

$$P_{0^*} = \frac{\delta(1-\rho)}{1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1}} \quad (18)$$

Il convient de noter que dans les relations (17) et (18)  $\rho$  est une valeur de la charge du canal et elle peut prendre une valeur arbitraire, c'est-à-dire  $\rho > 0$ .

Calculons les caractéristiques principales des EF avec un portefeuille dynamique limitée des commandes.

1) La probabilité de refus de service est égale à la somme des probabilités  $P_{0^*}$  et  $P_m$

$$P_{ref}^{(2)} = \frac{(1-\rho)(\delta + \rho^m)}{1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1}};$$

2) La capacité d'accès relative de ce système est égal à

$$\Pi_{rel}^{(2)} = 1 - P_{отк}^{(2)} = \frac{1-\rho^m}{1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1}};$$

3) la capacité d'accès absolue du système A est égale au nombre moyen de clients traitées par unité de temps et est

$$A^{(2)} = \lambda(1 - P_{ref}^{(2)}) = \frac{\lambda(1-\rho^m)}{1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1}};$$

4) la longueur moyenne de file d'attente  $\bar{q}^{(2)}$  se calcule d'après la formule

$$\bar{q}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m-1} k P_{k+1} = \frac{\rho^2(1+\rho^{m-1}(m\rho - m - \rho))}{(1-\rho)(1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1})};$$

5) le temps moyen d'attente dans la file d'attente  $\bar{t}_{att}^{(2)}$

$$\bar{t}_{att}^{(2)} = \frac{\bar{q}^{(2)}}{\lambda} = \frac{\rho^2[1+\rho^{m-1}(m\rho - m - \rho)]}{\lambda(1-\rho)(1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1})};$$

6) la probabilité que le système est occupé  $F_{occ}^{(2)}$  détermine par

$$P_{occ}^{(2)} = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^m \rho^k P_0 = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} P_0 = \frac{1-\rho^{m+1}}{1+\delta(1-\rho)-\rho^{m+1}}.$$

**Schema 3.** Ainsi, dans les schémas précédents ont été considérés le système de la EFSL avec un réajustement de l'appareil au début d'un cycle de production et à la fin [7; 8; 10]. Etudions le cas où on peut optimiser le début du réajustement de l'appareil en lui donnant un peu de retard, étant donné les caractéristiques du flux d'entrée [11].

Comme précédemment, EFSL peut être représenté par une file d'attente à canal unique à l'entrée de laquelle arrive le flux de loi de Poisson de l'intensité  $\lambda > 0$ . Le service des clients se produit dans l'ordre de réception, et la durée de service a loi de la distribution exponentielle de paramètre  $\mu > 0$ . L'appareil de service a le trait qui consistant du fait que, après le service des clients qui sont dans le système, il va dans l'état de repos, que nous appelons l'état "libre-non prêt".

Le réajustement de l'appareil peut être commencé par la règle suivante: soit dans le temps aléatoire  $\eta$ , ayant la loi exponentielle de paramètre  $\theta > 0$ , à condition que pendant ce temps le client n'entre pas dans le système soit quand le client est le premier à entrer dans le système. La durée du réajustement de l'appareil a la loi exponentielle de paramètre  $\nu > 0$ . Les clients entrés dans le système pendant le réajustement de l'appareil sont perdus. Après avoir fini le réajustement de l'appareil d'appareil de service va dans un état de repos, que nous appelons l'état "libre-prêt" et maintenant il est prêt à servir les demandes. Finalement on peut dire que le promenad commence dans le temps est égal à  $\min\{\eta, z_i\}$ , ou  $z_i$  – le temps entre des clients successives. EFSL decrivé peut être avoir les états suivants:

- 0 – signifie que l'appareil est "libre-non prêt";
- $(0^*, 0)$  – l'appareil effectue un réajustement de l'appareil lorsque le système n'a pas reçu de client;
- $(0^*, 1)$  – l'appareil effectue réajustement de l'appareil après le client entrés;
- $(1, 0)$  – l'appareil est "libre-prêt";
- $(1, k)$  – cela signifie que dans le système il y a k clients et de plus un client est en service, et  $(k - 1)$  clients est en attente.

Soit  $\xi(t)$  – un processus aléatoire, caractérisés des états du système définies sur l'espace de phase du  $E = \{0, (0, 0^*), (0^*, 1), (1, k) : k \geq 0\}$ . Soit  $P_0 = P\{\xi(t) = 0\}$ ,  $P_{0^*0} = P\{\xi(t) = 0^*\}$ ,  $P_{0^*1} = P\{\xi(t) = (0^*, 1)\}$ ,  $P_{1k} = P\{\xi(t) = (1, k)\}$ ,  $k = 0$  – probabilités stationnaires des états du système. Le Graph marque d'états de processus  $\xi(t)$  a l'aire (Fig. 3).

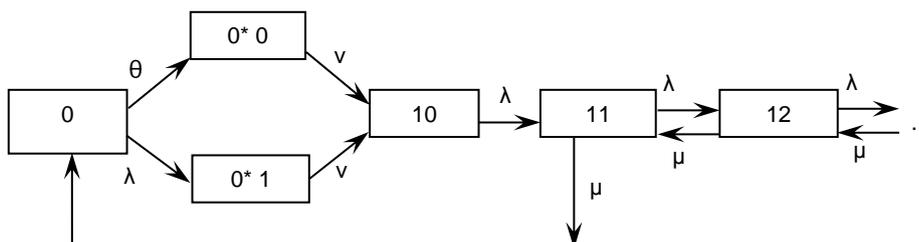


Fig. 3. Graph marquant d'états de processus avec réajustement de l'appareil combiné [The state graph describing the functioning of the system combined with vacation]

Pour déterminer les probabilités d'états stationnaires du système on aura le système d'équations suivante:

$$\begin{cases} -(\lambda + \theta)P_0 + \mu P_{11} = 0, \\ -vP_{00} + \theta P_0 = 0, \\ -vP_{01} + \lambda P_0 = 0, \\ -\lambda P_{10} + v(P_{00} + P_{01}) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_{11} + \lambda P_{10} + \mu P_{12} = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_{1k} + \lambda P_{1k-1} + \mu P_{1k+1} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases} \quad (19)$$

Pour résoudre le système d'équations (19) introduisons la fonction engendré  $a(z) = \sum_{k \geq 1} P_{1k} z^k$ . Alors, en multipliant deux derniers équations par  $z$  à la puissance respective trouvons que

$$(\rho z^2 - z(1 + \rho) + 1)a(z) = zP_{11} - \rho z^2 P_{10}. \quad (20)$$

De même la solution des trois premières équations donne les résultats suivants:

$$P_{00} = \frac{\beta}{\varphi} P_0, \quad (21)$$

$$P_{01} = \frac{\rho}{\varphi} P_0, \quad (22)$$

$$P_{10} = \frac{\rho + \beta}{\rho} P_0, \quad (23)$$

$$P_{11} = (\rho + \beta) P_0, \quad (24)$$

où  $\varphi = \frac{v}{\mu}$ ,  $\beta = \frac{\theta}{\mu}$ .

Compte tenu les expressions (23) et (24), la fonction génératrice (20) prend la forme:

$$a(z) = \frac{(\rho + \beta)zP_0}{1 - \rho z} = (\rho + \beta)z \left[ 1 + \rho z + (\rho z)^2 + \dots \right] P_0, \quad (25)$$

Ainsi à partir la formule (25) nous obtenons le résultat suivant

$$P_{1k} = (\rho + \beta) \times \rho^{k-1} P_0, \quad k \geq 1. \quad (26)$$

**Remarque.** Le résultat (25) peut être obtenu en faisant remarquer que, puisque de l'état (1.1) le graph du système peut représenter le processus de naissance et de mort, voilà pourquoi nous pouvons utiliser les formules suivantes pour trouver les probabilités stationnaires, à savoir:

$$P_{12} = \rho P_{11}, \quad P_{13} = \rho P_{12} = \rho^2 P_{11}, \dots, P_{1k} = \rho^{k-1} P_{11}.$$

La probabilité  $P_0$  est obtenue de la condition de normalisation  $P_0 + P_{00} + P_{01} + P_{10} + a(1) = 1$ . Mais, comme

$$a(1) = \frac{(\rho + \beta)P_0}{1 - \rho} \quad (27)$$

alors en substituant le (27) dans la condition de normalisation, on obtient que

$$P_0 = \frac{\rho \varphi (1 - \rho)}{\varphi (\rho + \beta) + \rho (1 - \rho) (\rho + \beta + \varphi)}. \quad (28)$$

**Remarque.** Une condition nécessaire à l'existence d'une distribution de probabilité stationnaire est l'exécution des conditions  $\rho < 1$ ,  $v > 0$ .

Notons à la suite l'interprétation organisationnelle et économique des résultats obtenus, à savoir:

a) probabilité  $P_0$  peut être interprétée comme la partie du temps pendant laquelle EFSL est à l'état OFF, i.e. sans dépenses des coûts matériels;

b) probabilité  $P_0^* = P_{00} + P_{01} = \frac{\rho + \beta}{\varphi} P_0$  est la partie du temps pendant laquelle EFSL se trouve à l'état de réajustement de l'appareil. A ce temps, le système dépense quelques ressources pour sa mise en œuvre. Soit  $C_2$  – les coûts de EFSL par unité de temps pour mener le réajustement de l'appareil.

c) probabilité  $P_{10}$  peut être interprété comme la partie du temps pendant lequel EFSL ne marche pas mais dépense quelques ressources pour se tenir en œuvre. Soit  $C_3$  – les coûts de EFSL par unité de temps pour le tenir en œuvre;

d) valeur  $a(1)$  caractérise probabilité pour que le canal est occupé par le service. Soit  $C_4$  – les coûts de EFSL par unité de temps pour le tenir en œuvre;

e) valeur  $P_{00} + P_{01} = \frac{\rho + \beta}{j} P_0 = P_{ref}$  définit la probabilité du refus des clients;

f) valeur  $\lambda(1 - P_{отк})$  définit la capacité d'accès absolue du système ou le nombre moyen de clients traitées par unité de temps. Soit  $C_4$  – le bénéfice de EFSL obtenu par unité de clients servis.

Alors, la stratégie de l'organisation de EFSL devrait viser à maximiser les revenus générés obtenus par de service du clients par unité de temps:

$$L(\rho, \delta, \beta, C_1, C_2, C_3, C_4) = \lambda C_4 (1 - P_{ref}) - C_1 P_0^* - C_2 P_{10} - C_3 a(1) \Rightarrow \max. \quad (29)$$

Pour maximiser (29) il faut minimiser le fonctionnel

$$L_1(\rho, \delta, \beta, C_1, C_2, C_3, C_4) = \lambda C_4 P_{ref} + C_1 P_0^* + C_2 P_{10} + C_3 a(1) \Rightarrow \min. \quad (30)$$

Transformons l'expression (30). Il est facile de montrer que la probabilité  $P_0$  peut être transformée en forme suivante

$$P_0 = \frac{\rho \varphi (1 - \rho)}{a + b \beta}, \quad (31)$$

où  $a = \rho \varphi + \rho(1 - \rho)(\rho + \varphi)$ ,  $b = \rho(1 - \rho) + \varphi$ .

Après la substitution des expressions (3), (4), (9), (13) dans (12), celui-là prend l'aire

$$L_1(\rho, \delta, \beta, C_1, C_2, C_3, C_4) = \frac{\left( \frac{C_1 + \lambda C_4}{\varphi} + \frac{C_2}{\rho} + \frac{C_3}{1 - \rho} \right) \times \rho \varphi (1 - \rho) (\rho + \beta)}{a + b \beta}. \quad (32)$$

ou

$$L_1(\rho, \delta, \beta, C_1, C_2, C_3, C_4) = A \frac{\lambda + \theta}{a\mu + b\theta} = \frac{A}{b} \left( 1 - \frac{b^{-1}a\mu - \lambda}{\theta + b^{-1}a\mu} \right), \quad (33)$$

où

$$A = \left( \frac{C_1 + \lambda C_4}{\varphi} + \frac{C_2}{\rho} + \frac{C_3}{1 - \rho} \right) \rho \varphi (1 - \rho).$$

Etudions l'expression (33). Nous avons deux cas:

1) si  $b^{-1}a\mu - \lambda > 0$ , alors l'expression (33), comme la fonction de  $\theta$  prend la valeur minimale si  $\theta = 0$ . Cela signifie que le temps  $\eta$  est égal à l'infini ( $\infty$ ). Ceci à son tour signifie

que le réajustement de l'appareil commence au début du cycle de production.

2) si  $b^{-1}a\mu - \lambda < 0$ , alors l'expression (33), comme la fonction de  $\theta$  prend la valeur maximale si  $\theta = \infty$ . Cela signifie que le temps  $\eta$  est égal à zéro. Ceci à son tour signifie que le réajustement de l'appareil commence à la fin du cycle de production;

De même, transformons d'une certaine manière l'expression (32), nous pouvons déterminer la valeur optimale de la charge  $\rho$  à laquelle le revenu sera maximal.

**Schema 4.** En conclusion, examinons le modèle de réajustement de l'appareil, dans lequel celui-ci commence dans un certain temps aléatoire après la fin du cycle de production [12]. Les clients entrés dans le système avant et pendant le réajustement de l'appareil sont perdus.

Notons que le délai de réajustement de l'appareil peut être causée par de nombreux facteurs par exemple tels que la nouvelle entité doit être fournie à l'entreprise à la fois pour faire les réajustement de l'appareils et pour poursuivre le processus. Dans ce scénario, les économies se passent en raison du fait que l'équipe effectuant des travaux de réparation peut passer en sous-traitance.

Comme il a été noté précédemment, EFSL peut être représenté par file d'attente à canal unique à l'entrée de laquelle arrive le flux de loi de Poisson de l'intensité  $\lambda > 0$ . Le service des clients se produisent dans l'ordre de réception, et

la durée de service a la loi de distribution exponentielle de paramètre  $\mu > 0$ . L'appareil de service a une particularité qui consiste en ce qu'après le traitement des demandes des clients qui sont dans le système, il passe l'état de repos que nous allons appeler l'état " libre – non prêt " via

le temps aléatoire  $\eta$ , ayant la loi exponentielle de paramètre  $\theta > 0$ , l'appareil commence son réajustement. La durée du réajustement de l'appareil a aussi la loi exponentielle ayant le paramètre  $v > 0$ . Les demandes des clients entrées dans le système pendant le temps  $\eta$  et le réajustement de l'appareil sont perdues.

Après avoir fini le réajustement de l'appareil d'appareil de service va dans un état, que nous appelons l'état "libre-prêt" et maintenant il est prêt à servir les demandes.

Le processus aléatoire de Markov  $\xi(t)$  décrit le système à l'état:

- 0 – signifie que l'appareil est "libre-non prêt";
- $0^*$  – signifie que l'appareil est en réajustement de l'appareil;
- (1, 0) – signifie que l'appareil est libre et prêt au service ("libre-prêt");
- (1, k) – cela signifie que dans le système il y a k clients et de plus un client est en service, et (k - 1) clients est en attente (k > 1).

Le Graph marqués d'états de processus  $\xi(t)$  a l'aire (Fig. 4).

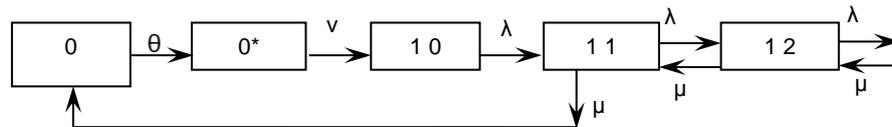


Fig. 4 Graph marqués d'états de processus avec réajustement de l'appareil retardé [The graph of the system states with delayed changeover of the device and loss of orders]

Notons les probabilités stationnaires de processus aléatoire  $\xi(t)$  par

$$P_0 = P\{\xi(t) = 0\}, P_{0^*} = P\{\xi(t) = 0^*\}, P_{1k} = P\{\xi(t) = (1, k)\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Alors, pour déterminer les probabilités stationnaires d'états du système on aura le système des équations algébriques suivantes:

$$\begin{cases} -\theta P_0 + \mu P_{11} = 0, \\ -v P_{0^*} + \theta P_0 = 0, \\ -\lambda P_{10} + v P_{0^*} = 0, \\ -(\lambda + \mu) P_{11} + \lambda P_{10} + \mu P_{12} = 0, \\ -(\lambda + \mu) P_{1k} + \lambda P_{1k-1} + \mu P_{1k+1} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases} \quad (34)$$

Pour résoudre le système (34) introduisons la fonction engendrée  $a(z) = \sum_{k \geq 1} P_{1k} z^k$ . Alors, en multipliant deux derniers équations par  $z$  à la puissance respective et sommées nous trouvons que

$$(\rho z^2 - z(1 + \rho) + 1)a(z) = z P_{11} - \rho z^2 P_{10}, \quad (35)$$

où  $\rho = \lambda / \mu$ .

Des trois premières équations du système (34) on aura que:

$$P_{10} = \frac{\beta}{\rho} P_0, \quad (36)$$

$$P_{11} = \beta P_0, \quad (37)$$

$$P_{0^*} = \frac{\beta}{\varphi} P_0. \quad (38)$$

Compte tenu des expressions (36) et (37) nous constatons que la relation (35) prend la forme:

$$a(z) = \frac{\beta z P_0}{1 - \rho z} = [1 + \rho z + (\rho z)^2 + \dots] \beta z P_0, \quad (39)$$

où  $\rho < 1$ .

De (39), nous trouvons que

$$P_{1k} = \beta \rho^{k-1} P_0, \quad k \geq 1. \quad (40)$$

La probabilité  $P_0$  est obtenue de la condition de normalisation, qui a la forme:

$$P_0 + P_{0^*} + P_{10} + a(1) = 1. \quad (41)$$

En vertu du fait que

$$a(1) = \frac{\beta P_0}{1 - \rho} \quad (42)$$

la condition de normalisation (41) a la forme

$$P_0 + \frac{\beta}{\varphi} P_0 + \frac{\beta}{\rho} P_0 + \frac{\beta P_0}{1 - \rho} = 1,$$

d'où il résulte que

$$P_0 = \frac{\rho\varphi(1-\rho)}{\beta\varphi + \rho(1-\rho)(\beta + \varphi)}. \quad (43)$$

Ainsi, nous avons trouvé les probabilités d'états du système décrit ci-dessus.

En se basant sur des caractéristiques trouvées on peut construire les indicateurs qui permettent de calculer des paramètres optimaux des systèmes flexibles, considérés comme files d'attente.

**Références:** 1. Николайчук В. Е. Теория и практика управления материальными потоками (логистическая концепция) : монография / В. Е. Николайчук, В. Г. Кузнецов. – Донецк : ДонГУ, КИТИС, 1999. – 413 с. 2. Модели и методы теории логистики : учеб. пособ. / под ред. В. С. Лукинского. – СПб. : Питер, 2003. – 175 с. 3. Комплексные оценки в системе рейтингового управления предприятием / А. П. Белый, Ю. Г. Лысенко, А. А. Мадых и др. – Донецк : Юго-Восток, 2003. – 117 с. 4. Рейнхард Ю. Материальные потоки и логистика / Ю. Рейнхард. – Берлин : Изд-во "Шпрингер", 1989. – 512 с. 5. Самочкин В. Н. Гибкое развитие предприятия. Анализ и планирование / В. Н. Самочкин. – М. : Дело, 1999. – 336 с. 6. Румянцев Н. В. Моделирование гибких производственно-логистических систем : монография / Н. В. Румянцев. – Донецк : Изд-во "Юго-Восток", 2004. – 235 с. 7. Румянцев Н. В. Гибкие производственно-логистические системы с переналадкой в начале производственного цикла и потерей заказов / Н. В. Румянцев // Теоретичні і прикладні проблеми моделювання сталого розвитку економічних систем : монографія / під заг. ред. Т. В. Орехової ; відповід. ред. О. Л. Некрасова. – Донецьк : Сучасний друк, 2013. – Р. 2.5. – С. 106–116. 8. Румянцев Н. В. Гибкие логистические системы с переналадкой в начале периода занятости и потерей требований / Н. В. Румянцев // Бизнес Информ. – 2012. – № 4. – С. 25–27. 9. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М. : Наука, 1987. – 336 с. 10. Румянцев Н. В. Гибкие логистические системы с переналадкой в конце периода занятости и потерей требований / Н. В. Румянцев // Бизнес Информ. – 2012. – № 5. – С. 51–54. 11. Румянцев Н. В. Моделирование гибких производственных систем с переналадкой в промежутке между двумя производственными циклами / Н. В. Румянцев // Экономічна кібернетика. – Донецьк : ДонНУ. – 2013. – № 4 – 6 (82 – 84). – С. 27–30. 12. Румянцев Н. В. Гибкая производственная система с комбинированной переналадкой и потерей заказов / Н. В. Румянцев // Научные труды Донецкого национального технического университета. – 2014. – № 5. – С. 39–42. – (Серия: Экономическая).

**References:** 1. Nikolaychuk V. E. *Teoriya i praktika upravleniya materialnymi potokami (logisticheskaya kontseptsiya) : monografiya* [Theory and practice of material flow management (the logistics concept) : monograph] / V. E. Nikolaychuk, V. G. Kuznetsov. – Donetsk : DonGU, KITIS, 1999. – 413 p. 2. *Modeli i metody teorii logistiki : ucheb. posob. / pod red. V. S. Lukinskogo.* – SPb. : Piter, 2003. – 175 p. 3. *Kompleksnye otsenki v sisteme reytingovogo upravleniya predpriyatiem* [Comprehensive assessment of the system of business rating management] / A. P. Belyiy, Yu. G. Lyisenko, A. A. Madykh et al. – Donetsk : Yugo-Vostok, 2003. – 117 p. 4. Reynkhard Yu. *Materialnye potoki i logistika* [Material Flows and Logistics] / Yu. Reynkhard. – Berlin : Izd-vo "Shpringer", 1989. – 512 p. 5. Samochkin V. N. *Gibkoe razvitie predpriyatiya. Analiz i planirovanie* / V. N. Samochkin. – M. : Delo, 1999. – 336 p. 6. Rummyantsev N. V. *Modelirovanie gibkikh proizvodstvenno-logisticheskikh sistem : monografiya* [Modeling flexible production and

logistic systems : monograph] / N. V. Rummyantsev. – Donetsk : Izd-vo "Yugo-Vostok", 2004. – 235 p. 7. Rummyantsev N. V. *Gibkie proizvodstvenno-logisticheskie sistemy s perenaladkoy v nachale proizvodstvennogo tsikla i poterey zakazov* [Flexible production and logistics system with changeover at the beginning of the production cycle and the loss of orders] : monografiya / N. V. Rummyantsev // Teoretichni i prykladni problemy modelivannia staloho rozvytku ekonomichnykh system ; pid zah. red. T. V. Oriekhovoi ; vidpovid. red. O. L. Nekrasova. – Donetsk : Suchasnyy druk, 2013. – S. 2.5. – P. 106–116. 8. Rummyantsev N. V. *Gibkie logisticheskie sistemy s perenaladkoy v nachale perioda zanyatosti i poterey trebovaniy* [Flexible logistics system with changeover at the beginning of the period of employment and loss of requirements] / N. V. Rummyantsev // Biznes Inform. – 2012. – No. 4. – P. 25–27. 9. Gnedenko B. V. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* / B. V. Gnedenko, I. N. Kovalenko. – M. : Nauka, 1987. – 336 p. 10. Rummyantsev N. V. *Gibkie logisticheskie sistemy s perenaladkoy v kontse perioda zanyatosti i poterey trebovaniy* [Flexible logistics system with changeover at the end of the period of employment and loss of requirements] / N. V. Rummyantsev // Biznes Inform. – 2012. – No. 5. – P. 51–54. 11. Rummyantsev N. V. *Modelirovanie gibkikh proizvodstvennykh sistem s perenaladkoy v promezhutke mezhdu dvumya proizvodstvennyimi tsiklami* [Modeling flexible manufacturing systems with changeover between two production cycles] / N. V. Rummyantsev // Ekonomichna kibernetika. – Donetsk : DonNU. – 2013. – No. 4 – 6 (82 – 84). – P. 27–30. 12. Rummyantsev N. V. *Gibkaya proizvodstvennaya sistema s kombinirovannoy perenaladkoy i poterey zakazov* [Flexible manufacturing system with a combined changeover and loss of orders] / N. V. Rummyantsev // Nauchnye trudy Donetskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta. – 2014. – No. 5. – P. 39–42. – (Seriya: Ekonomicheskaya).

#### Information sur l'auteur

**M. Rummyantsev** – Docteur en sciences économiques, Professeur, Chef du Département Cybernétique économique et mathématiques supérieures Université nationale technique de Donetsk (2 Shibankova pl., Krasnoarmeysk, Région de Donetsk, Ukraine 85300, e-mail: rumnik49@mail.ru).

#### Информация про автора

**Румянцев Микола Васильович** – докт. екон. наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики та вищої математики Донецького національного технічного університету (пл. Шибанкова, 2, м. Красноармійськ, Донецька обл., Україна, 85300, e-mail: rumnik49@mail.ru).

#### Информация об авторе

**Румянцев Николай Васильевич** – докт. экон. наук, профессор, заведующий кафедрой экономической кибернетики и высшей математики Донецкого национального технического университета (пл. Шибанкова, 2, г. Красноармейск, Донецкая обл., Украина, 85300, e-mail: rumnik49@mail.ru).

#### Information about the author

**M. Rummyantsev** – Doctor of Sciences in Economics, Professor, Head of the Department of Economic Cybernetics and Mathematics of Donetsk National Technical University (2 Shybankov Sq., Krasnoarmiisk, Donetsk region, Ukraine, 85300, e-mail: rumnik49@mail.ru).

Стаття надійшла до ред.  
17.05.2016 р.