East Eur. J. Phys. Vol.2 No.1 (2015) 4-14

PACS: 47.32.C

LOCALIZED VORTICES IN TWO-DIMENSIONAL HYDRODYNAMIC MEDIA

V.V. Yanovsky[1,2], A.V. Tur[3], K.N. Kulik[1]
[c]*Institute for Single Cristals, Nat. Academy of Science*
Ukraine, Lenine Ave.60, Kharkov 31001,Ukraine
e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua
[2]*V.N. Karazin Kharkiv National University*
Sq. Svobody 4, Kharkiv, 61022 Ukraine
[3]*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France
Received December 4, 2014

The review covers the main achievements in the field of the dynamics of strongly localized vortices in two-dimensional hydrodynamic media. The types of point vortices and their motion equations are discussed. The consideration is focused on dipole point vortices, a new type of point vortices. Investigated is the influence of the boundaries of the vortices on the character of their motion, and some new stationary fluid flows. The impact of potential waves on the interacting point vortices leads to new effects also considered in the review.
KEY WORDS:point vortices, dynamics, interaction, liquid boundary, sound wave, stationary structure

ЛОКАЛІЗОВАНІ ВИХОРИ У ДВОВИМІРНИХ ГІДРОДИНАМІЧНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

В.В. Яновський[1,2], А.В. Тур[3], К.М. Кулик[1]
[1]*Інститут монокристаллов, Національна Академія Наук України*
пр. Леніна 60, 61001 Харків, Україна
[2]*Харківський національний університет імені В.Н. Каразина*
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
[3]*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France
В огляді розглянуті основні досягнення в області динаміки сильно локалізованих вихрів у двовимірних гідродинамічних середовищах. Обговорюються типи точкових вихорів і їхні рівняння рухів. Головна увага приділена новому типу точкових вихорів - дипольному точковому вихору. Розглянуто вплив границь на характер рухів вихорів і деякі нові стаціонарні течії. Вплив потенційних хвиль на взаємодіючі крапкові вихори приводить до нових ефектів, які також розглянуті в огляді.
КЛЮЧОВІ СЛОВА:точкові вихори, динаміка, взаємодія, границі середовища, звукова хвиля, стаціонарні структури

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВИХРИ В ДВУМЕРНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕДАХ

В.В.Яновский[1,2], А.В.Тур[3], К.Н.Кулик[1]
[1]*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины*
пр. Ленина 60, 61001 Харьков, Украина
[2]*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
[3]*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France
В обзоре рассмотрены основные достижения в области динамики сильно локализованых вихрей в двумерных гидродинамических средах. Обсуждаются типы точечных вихрей и их уравнения движения. Основное внимание уделено новому типу точечных вихрей – дипольному точечному вихрю. Рассмотрено влияние границ на характер движения вихрей и некоторые новые стационарные течения жидкости. Влияние потенциальных волн на взаимодействующие точечные вихри приводит к новым эффектам, которые также рассмотрены в обзоре.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:точечные вихри, динамика, взаимодействие, границы среды, звуковая волна, стационарные структуры

Обзор посвящен удивительным вихрям, возникающим в двумерных гидродинамических средах. Говоря о вихрях, трудно переоценить их значение в природе и технике (см. например [1-3]). В качестве примеров можно упомянуть циклоны и антициклоны [4-6], формирующие погоду, тайфуны и ураганы [7,8], приводящие к катастрофическим событиям, смерчи [9]. Конвективные ячейки [10,11], играют огромное значение в трансформации энергии солнца в гидродинамические движения. Вихри определяют множество других, хотя и менее заметных природных явлений, но не менее важных [12]. Техническое использование вихревых движений столь же широко и многообразно. В качестве примера достаточно упомянуть крыло самолета, подъемная сила которого связана с вихревыми течениями, как и сила тяги винтовых движителей [13,14], а также механизм, позволяющий плавать рыбам с высокими скоростями. В принципе, только два типа гидродинамических объектов определяют любые гидродинамические явления. Это вихри и волны. Волны изучены более детально, чем вихревые процессы. Два упрощающих обстоятельства способствуют этому. Можно рассматривать одномерные волновые движения и ввести линейные волны [15]. Это позволило построить теорию волн и их взаимодействия [16,17]. Вихри - это нелинейные формирования, которые переносят не только энергию и импульс, но в отличии от волн и саму среду. Сложность описания этих объектов, в определенной степени, связана с отсутствием одномерного приближения и невозможностью линеаризации вихрей. Вихри-это существенно нелинейные многомерные объекты. По этим причинам теория вихрей и их взаимодействия развиты еще недостаточно. Приятным исключением является двумерная гидродинамика, в которой были достаточно давно обнаружены определенные вихри, названные впоследствии точечными вихрями. Роль таких вихрей оказалась исключительно важной. Прежде всего, такие вихри приводят к специфической дискретизации гидродинамики. Действительно, гидродинамика это полевая наука в которой основную роль играет поле скорости. Другими словами, это означает, что число степеней свободы гидродинамических объектов бесконечно. Обнаруженные точечные вихри обладали удивительным свойством. Движение произвольного числа взаимодействующих точечных вихрей подчинялось конечномерной гамильтоновой системе уравнений. Гидродинамическое течение, порожденное такой конечномерной системой вихрей, однозначно восстанавливалось по определенным формулам и определялось характером движения точечных вихрей. Это означало существование перехода от бесконечномерной полевой системы к конечномерной гамильтоновой системе. Преимущества, возникающие при этом, огромны. Возникло огромное число исследований по изучению взаимодействий точечных вихрей, по поиску определенных стационарных устойчивых конфигураций таких вихрей. Были достигнуты обобщения на точечные вихри, движущиеся в ограниченных областях занятых жидкостью. Построена теория движения вихрей на сфере. Последнее имеет отношение к гидродинамике атмосферы, которую в определенном смысле можно рассматривать как двумерную. Предприняты исследования по изучению влияния волн на характер движения таких вихрей. Исследованы процессы переноса пассивной примеси течениями, индуцированными конечным числом точечных вихрей. Обнаружены такие вихри в квантовых жидкостях и, соответственно, начат поиск других гидродинамических сред, в которых могут существовать обобщения точечных вихрей. Относительно недавно был достигнут прогресс в обнаружении нового типа точечных вихрей в гидродинамике.

Цель работы – изложение современных достижений в области динамики локализованных вихрей, которые позволяют продвинуться в понимании многих гидродинамических явлений. Основное внимание уделено новым типам точечных вихрей, открытым относительно недавно.

ТОЧЕЧНЫЕ ВИХРИ КАК КВАЗИЧАСТИЦЫ

Впервые точечные вихри были введены Гельмгольцем [18]. Огромную роль в развитии вихревой теории сыграла его работа «Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям» [2]. Прежде всего он выделил вихревые движения. Согласно Гельмгольцу, движения жидкости для которых отсутствует потенциал скорости, называются вихревыми. Именно Гельмгольц установил аналогию между движениями жидкости и магнитными проявлениями электрических токов. Эта аналогия позволила ему ввести прямолинейные и кольцевые вихри. Кроме этого, он доказал основные теоремы о вихревых движениях идеальной жидкости. Значение этих исследований было высоко оценено впоследствии. Так А.Пуанкаре считал их наиболее важным вкладом в гидродинамику [19]. Основным элементом, позволившим Гельмгольцу существенно продвинуться в исследовании вихревых движений, стало понимание вмороженности вихревых линий в движения среды. Это позволяло использовать некоторые общие закономерности классической механики для вихревых объектов.

В работе [20] предложен метод вывода уравнений движения широкого класса квазичастиц двумерной идеальной гидродинамики. Простейшие из них хорошо известны как точечные вихри. Более сложные квазичастицы соответствуют точечным диполям завихренности. Доказано, что точечные мультиполи более высокого порядка, чем квадруполи и выше, не являются точными решениями двумерной идеальной гидродинамики. Получены уравнения движения системы взаимодействующих вихрей и точечных диполей. Показано, что эти уравнения являются гамильтоновыми и обладают тремя законами сохранения, находящимися в инволюции. Следствием этого является точная интегрируемость двухчастичной системы, состоящей из точечного вихря и точечного диполя.

В основе метода [20] лежит прямой метод поиска точных решений на классе обобщенных функций. Он основан на том, что производная функций с определенной степенной сингулярностью, состоит из двух вкладов [21,22]. Одно слагаемое совпадает с обычной классической производной, а второе - пропорционально обобщенной функции (δ функции Дирака). Таким образом, после подстановки в качестве решений сингулярных функций в уравнении Эйлера, возникают слагаемые двух типов: обычные функции и обобщенные функции. Обращение в нуль обычных вкладов определяет зависимость поля скорости от положения сингулярностей, а обращение в ноль коэффициентов при обобщенных функциях, определяет уравнения движения сингулярностей. Таким способом, в работе [20] получены уравнения движения как обычных точечных вихрей, так и точечных вихрей нового типа - дипольных точечных вихрей. Положения вихрей определяют функцию тока и, следовательно, поле скорости в любой точке жидкости, если известно положение вихрей как

$$\varphi(\vec{x},t)=\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_{\alpha}\ln|\vec{x}-\vec{x}_{v}^{\alpha}(t)|+\sum_{\beta=1}^{M}D_{l}^{\beta}(t)\frac{(x_{l}-x_{ld}^{\beta}(t))}{|\vec{x}-\vec{x}_{d}^{\beta}(t)|^{2}}.$$

Здесь $\vec{x}_{v}^{\alpha}(t)$ - положение α точечного вихря и Γ_{α} - его интенсивность, а $\vec{x}_{d}^{\beta}(t)$ - положение дипольного β точечного вихря и $D_{l}^{\beta}(t)$ его дипольный момент. Таким образом, зная только положения вихрей и их дипольный момент, можно определить значение скорости в любой точке среды. Таким образом описание безконечно мерного поля скорости можно осуществить в рамках конечномерной системы точечных вихрей, которые подчиняются уравнениям движения вида

$$\frac{d\vec{x}_{vi}^{\alpha}(t)}{dt}=\varepsilon_{ik}\left\{\sum_{\gamma\neq\alpha}^{N}\Gamma_{\gamma}\frac{(x_{vk}^{\alpha}-x_{vk}^{\gamma})}{|\vec{x}_{v}^{\alpha}-\vec{x}_{v}^{\gamma}|^{2}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\beta}^{M}D_{l}^{\beta}(t)\left(\frac{\delta_{lk}}{|\vec{x}_{v}^{\alpha}-\vec{x}_{d}^{\beta}|^{2}}-\frac{2(x_{vl}^{\alpha}-x_{dl}^{\beta})(x_{vk}^{\alpha}-x_{dk}^{\beta})}{|\vec{x}_{v}^{\alpha}-\vec{x}_{d}^{\beta}|^{4}}\right)\right\}=0 \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{x}_{di}^{\beta}(t)}{dt}=\varepsilon_{ik}\left\{\sum_{\alpha}^{N}\Gamma_{\alpha}\frac{(x_{dk}^{\beta}-x_{vk}^{\alpha})}{|\vec{x}_{v}^{\alpha}-\vec{x}_{d}^{\beta}|^{2}}+\right. \quad (2)$$
$$\left.+\sum_{\gamma\neq\beta}^{M}D_{l}^{\gamma}(t)\left(\frac{\delta_{lk}}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{2}}-\frac{2(x_{dl}^{\beta}-x_{dl}^{\gamma})(x_{dk}^{\beta}-x_{dk}^{\gamma})}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{4}}\right)\right\}=0$$

$$\frac{dD_{i}^{\beta}(t)}{dt}=D_{m}^{\beta}(t)\varepsilon_{ik}\left\{\sum_{\alpha}^{N}\Gamma_{\alpha}\left(\frac{\delta_{km}}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{v}^{\alpha}|^{2}}-\frac{2(x_{dk}^{\beta}-x_{vk}^{\alpha})(x_{dm}^{\beta}-x_{vm}^{\alpha})}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{v}^{\alpha}|^{4}}\right)+\right.$$
$$+\sum_{\gamma\neq\beta}^{M}D_{l}^{\gamma}(t)\left(-\frac{\delta_{lk}2(x_{dm}^{\beta}-x_{dm}^{\gamma})}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{4}}-\frac{\delta_{ml}2(x_{dk}^{\beta}-x_{dk}^{\gamma})}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{4}}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\delta_{mk}2(x_{dl}^{\beta}-x_{dl}^{\gamma})}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{4}}+\frac{8(x_{dl}^{\beta}-x_{dl}^{\gamma})(x_{dk}^{\beta}-x_{dk}^{\gamma})(x_{dm}^{\beta}-x_{dm}^{\gamma})}{|\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{6}}\right)\right\}=0. \quad (3)$$

Здесь δ_{ik} -символ кронекера, а ε_{ik} -единичный антисимметричный тензор. Система уравнений (1) при нулевых значениях дипольных моментов в точности совпадает с системой уравнений, полученной для точечных вихрей [23]. Система уравнений (1)-(3) даёт систему уравнений, описывающих эволюцию взаимодействующих N - точечных вихрей и M - точечных диполей. Система уравнений (2)-(3) при $\Gamma_{\alpha}\equiv 0$ описывает эволюцию M - точечных диполей.

Поэтому точечные вихри претендуют на роль хорошо определенных квазичастиц. Это означает, что разнообразные течения двумерной идеальной жидкости могут быть представлены как движения, индуцированные системой взаимодействующих точечных вихрей. Определенные ограничения этой идеологии обсуждаются, например, в [24]. Следовательно, возникают интересные конечномерные динамические системы, тесно связанные с бесконечномерными полевыми системами гидродинамического типа. При этом даже небольшое число точечных вихрей обладает нетривиальными, а в некоторых случаях и экзотическими динамическими свойствами [33]. Так например, доказано возникновение хаотического поведения у четырех и более точечных вихрей [25,26].

в работе [20] доказано, что система уравнений (1)-(3), является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H=\sum_{\alpha\neq\beta}^{N}\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta}\ln|\vec{x}_{v}^{\alpha}-\vec{x}_{v}^{\beta}|+\sum_{\alpha,\beta}^{N,M}\frac{\Gamma_{\alpha}D_{\beta l}(x_{vl}^{\alpha}-x_{dl}^{\beta})}{|\vec{x}_{v}^{\alpha}-\vec{x}_{d}^{\beta}|^{2}}+ \quad (4)$$
$$+\sum_{\substack{\beta<\gamma=1\\ \beta\neq\gamma}}^{M}-\frac{2D_{\beta m}(x_{dm}^{\beta}-x_{dm}^{\gamma})D_{\gamma l}(x_{dl}^{\beta}-x_{dl}^{\gamma})-D_{\beta m}D_{\gamma m}(\vec{x}_{d}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma})^{2}}{|\vec{x}_{v}^{\beta}-\vec{x}_{d}^{\gamma}|^{4}},$$

где первая группа слагаемых соответствует энергии взаимодействия точечных вихрей, вторая группа -- взаимодействию вихрей и диполей, а третья группа -- взаимодействию диполей. Уравнения движения, полученные из (1)-(3), принимают следующий гамильтонов вид

$$\Gamma_{\alpha}\dot{x}_{vi}^{\alpha}=\varepsilon_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_{vk}^{\alpha}}, \quad (5)$$

$$\dot{x}_{di}^{\beta} = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial D_k^{\beta}}, \tag{6}$$

$$\dot{D}_i^{\beta} = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_{dk}^{\alpha}}. \tag{7}$$

Уравнение (5) является очевидным обобщением гамильтоновой структуры точечных вихрей. Канонически сопряженными переменными у вихрей, являются их координаты. Для точечных диполей канонически сопряженными переменными, являются дипольные моменты и координаты диполя. Система уравнений (5)-(7) обладает законами сохранения, которые легко проверить непосредственной подстановкой

$$I_1 = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha} x_{v1}^{\alpha} - \sum_{\beta=1}^{M} D_1^{\beta} = const, \tag{8}$$

$$I_2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha} x_{v2}^{\alpha} - \sum_{\beta=1}^{M} D_2^{\beta} = const, \tag{9}$$

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha} (\vec{x}_v^{\alpha})^2 - 2\sum_{\beta=1}^{M} (\vec{D}^{\beta} \cdot \vec{x}_d^{\beta}) = const. \tag{10}$$

Эти законы сохранения в определённом смысле вполне аналогичны известным законам сохранения в системе только точечных вихрей. Естественно, ещё одним законом сохранения является закон сохранения энергии системы $H = const$.

Систему уравнений (5)-(7) можно записать и в более симметричном виде, вводя скобку Пуассона [20]

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\Gamma_{\alpha}} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_i^{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial x_k^{\alpha}} - \sum_{\beta} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial D_i^{\beta}} \frac{\partial B}{\partial x_{dk}^{\beta}} - \sum_{\beta} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_{di}^{\beta}} \frac{\partial B}{\partial D_k^{\beta}}. \tag{11}$$

Тогда гамильтоновы уравнения принимают обычный вид

$$\dot{x}_{vi}^{\alpha} = \{x_{vi}^{\alpha}, H\}, \tag{12}$$

$$\dot{x}_{di}^{\beta} = \{x_{di}^{\beta}, H\}, \tag{13}$$

$$\dot{D}_i^{\beta} = \{D_i^{\beta}, H\}. \tag{14}$$

Используя скобку Пуассона (11) легко проверить, что в инволюции находятся только 3 из, приведенных выше, инвариантов.

Действительно, для приведенных выше 4-х первых интегралов движения, непосредственно проверкой легко получить

$$\{I_1, H\} = \{I_2, H\} = \{J, H\}, \tag{15}$$

кроме этого

$$\{I_1, I_2\} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha}, \tag{16}$$

$$\{I_1, J\} = 2I_2, \tag{17}$$

$$\{I_2, J\} = -2I_1. \tag{18}$$

Другими словами, эти интегралы не находятся в инволюции. Однако, используя свойства скобки Пуассона установим, что

$$\{I_1^2 + I_2^2, J\} = \{I_1^2, J\} + \{I_2^2, J\} = = 2I_1\{I_1, J\} + 2I_2\{I_2, J\} = 2I_1 2I_2 - 2I_2 2I_1 = 0. \tag{19}$$

Таким образом, 3 первых интеграла движения $H, J, I_1^2 + I_2^2$ находятся в инволюции. Частный случай этих законов сохранения для системы вихрей хорошо известны [23]. Это означает согласно теоремы Лиувилля, что система взаимодействующего точечного вихря с одним точечным диполем относится к точно интегрируемой. Напомним, что по аналогичной причине система 3-х точечных вихрей является точно интегрируемой в квадратурах [27,29].

В работе [30] исследовано взаимодействие точечного вихря и точечного вихревого диполя в двумерной идеальной гидродинамике. Показана точная интегрируемость уравнений движения взаимодействующего точечного вихря и точечного дипольного вихря. Найдены точные решения с произвольными начальными условиями и для всех возможных значений параметров, характеризующих вихри. Найденные решения, определяют все возможные двумерные течения, индуцированные движениями взаимодействующих точечного вихря и точечного дипольного вихря.

Существуют и другие способы вывода уравнений движения точечных вихрей. С физической точки зрения, они основаны на двух взглядах на такие объекты. Один из них заключается в рассмотрении их как сингулярных объектов или предельных объектов, второй предполагает выкалывание точек положения этих вихрей из фазового пространства. При этом, основной проблемой остается проблема самовоздействия точечного вихря. Следует заметить, что это довольно общая проблема, касающаяся практически всех точечных объектов в физике. Существует множество попыток вывода уравнений движения вихрей, с использованием вариантов этих подходов. Попытка более подробного описания их, предпринята в работе [31]. Следует заметить, что математические попытки «более строгого» вывода уравнений движения таких объектов, как правило, только создают иллюзию строгости. Большая их часть основана на вмороженности поля ротора скорости в движения идеальной жидкости. В частности, например, в работе [31] предлагается другой вывод уравнений движения только дипольных точечных вихрей, исходя из интегральных законов сохранения. Вывод работы [31], демонстрирует на самом деле скорее доказательство согласованности этого частного случая с гидродинамическими законами сохранения. В работе [30] ранее были получены даже более общие уравнения движения взаимодействующих точечных вихрей и точечных диполей. На самом деле такой интегральный подход, строго говоря, не является даже другим, т.к. приведенный выше подход с использованием обобщенных функций, согласован по своему определению, с интегральным подходом. Здесь заметим только, что в приведенном выше выводе, члены с самовоздействием обращаются в нуль, как для точечных вихрей и абсолютно аналогично для точечных дипольных вихрей, благодаря свойствам обобщенных функций. Здесь следует отметить еще одно замечание к работе [31], в которой уравнения, описывающие движения точечных вихрей в угловой области, рассматриваются как новый тип уравнений движения вихрей. Это выглядит неестественным, если исходить из существования точечного вихря как физического объекта. С нашей точки зрения это уравнения движения тех же объектов, но в других граничных условиях.

Кроме, описанных выше локализованных вихрей, в гидродинамике достаточно давно введены и модели вихрей [37], сочетающие свойства источников и стоков [38]. Взаимодействие двух таких вихреисточников были рассмотрены в работах [37,39]. В них доказана интегрируемость этой проблемы, а в [39] и неинтегрируемость случая четырех, и более вихреисточников. Интегрируемость задачи о движении трех таких вихрей анонсирована в [40,41], и проинтегрирован случай общего положения двух вихреисточников. В недавней работе [42] показана интегрируемость уравнений движения системы трех вихреисточников. Приведены возможные фазовые портреты и различные относительные равновесия системы. Обсуждение структуры и неустойчивости реальных вихреисточников можно найти в работе [43].

Разумеется, такие точечные вихри могут существовать в различных гидродинамических средах. Хорошо известны такие вихри в сверхтекучих жидкостях [45-50]. Главное отличие этих вихрей в квантованости их циркуляции. Это запрещает непрерывное уменьшение интенсивности вихрей, например, под действием вязкости, а также рождение вихрей с произвольной величиной циркуляции. В принципе, эти квантовые вихри играют важную роль в объяснении многих физических явлений и эффектов как в сверхтекучих жидкостях, так в сверхпроводящих средах [51]. Экспериментально квантовые вихри были обнаружены еще 1961 году в работе [54] в которой было доказано, что циркуляция сверхтекучей компоненты квантована. Позднее это было подтверждено фундаментальными экспериментами [55,56]. В качестве принципиально другой среды, в которой могут существовать точечные вихри, можно привести двухжидкостную гидродинамику плазмы [57]. В этой работе введены точечные вихри, которые являются точными решениями уравнений двужидкостной гидродинамики плазмы, а динамика таких точечных вихрей подчиняется полученной динамической системе уравнений. Точечные вихри в двужидкостной гидродинамике плазмы разделяются на два типа: ионные вихри и электронные вихри. Другими словами, плазменные точечные вихри устроены более сложно, чем точечные вихри в обычной жидкости, поскольку они создают вокруг себя кольцевые токи, которые взаимодействуют с самосогласованным магнитным полем. Структура этих вихрей подробно описана в [57]. Уравнения, которым подчиняется движение ансамбля электронно-ионных точечных вихрей, представляют собой существенное обобщение уравнений движения обычных гидродинамических вихрей.

Еще один класс точечных вихрей, о котором следует упомянуть, вводится и в трехмерных средах. Эти точечные вихри принято называть -- вортоны [58]. Однако, введение такого типа вихрей связано с определенными сложностями, обсуждение которых можно найти, например, в работе [59]. Одним из естественных способов их введения, является предельный переход от тороидальных вихрей путем уменьшения их размеров и фактически сохранение их дальнего поля скорости [60].

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦ СРЕДЫ

Естественный интерес вызывает влияние границ на движение дипольного вихря. Для обычных вихрей, их поведение вблизи плоской границы в угле и круге, уже давно стали классическими [18], [32-34]. Общая теория движения точечных вихрей в произвольной ограниченной области, была заложена еще в работе [44]. Для дипольного вихря его поведение вблизи плоской границы исследовалось в [31] и более детально в [35]. В [35] полностью описаны все режимы движения вихря у плоской границы и в области в форме прямого угла. Используя метод изображений в [35], получен гамильтониан вихря в среде ограниченной прямоугольным углом вида

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{D_1^2+D_2^2}{x_1^2}+\frac{D_1^2+D_2^2}{x_2^2}-\frac{(x_1^2-x_2^2)(D_1^2-D_2^2)+4D_1D_2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right\}.$$

Здесь $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Этот гамильтониан можно рассматривать как гамильтониан дипольного вихря движущегося в угле. Уравнения движения получим стандартным образом согласно уравнений (6), (7)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{D_2}{x_1^2}+\frac{D_2}{x_2^2}+\frac{D_2(x_1^2-x_2^2)-2D_1x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{D_1}{x_1^2}+\frac{D_1}{x_2^2}-\frac{D_1(x_1^2-x_2^2)+2D_2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right),$$

$$\frac{dD_1}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{D_1^2+D_2^2}{x_2^3}+\frac{(D_2^2-D_1^2)x_2+2D_1D_2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}-2x_2\frac{(D_1^2-D_2^2)(x_1^2-x_2^2)+4D_1D_2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}\right),$$

$$\frac{dD_2}{dt} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{D_1^2+D_2^2}{x_1^3}+\frac{(D_1^2-D_2^2)x_1+2D_1D_2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}-2x_1\frac{(D_1^2-D_2^2)(x_1^2-x_2^2)+4D_1D_2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}\right).$$

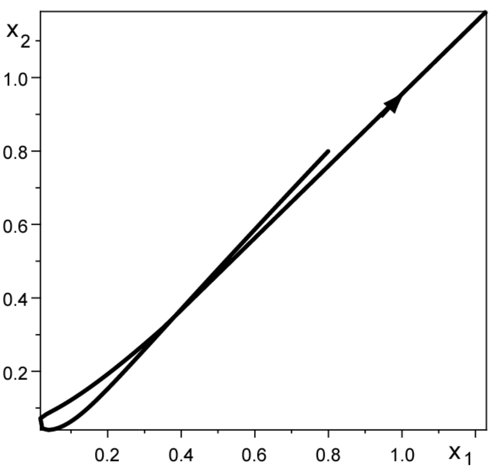

Рис.1. Движение дипольного вихря с начальными координатами $x_1(0)=0{,}8$, $x_2(0)=0{,}8$ и начальным значением дипольного момента $D_1(0)=1{,}1$ $D_2(0)=-1$ в угловой области, полученное численно. Видно общее свойство «отражение» дипольного вихря от границ. Жидкость занимает область $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Это достаточно сложная динамическая система с двумя степенями свободы. Энергия этой системы дипольных вихрей сохраняется. Однако, другие общие законы сохранения, полученные в работе [30], тривиализуются. Для рассматриваемой конфигурации дипольных вихрей они обращаются тождественно в нуль. Поэтому вопрос об интегрируемости в квадратурах этой системы уравнений остается открытым. В работе [35] получены частные точные решения этой системы уравнений и численно исследованы возможные режимы движения дипольного вихря (рис.1). В круговой области движение дипольного вихря детально исследовано в работе [36]. Установлены простые асимптотические законы эволюции вихря на больших временах. В результате обнаружено, что вихрь дипольного типа в случае общего положения «отражается» от границы среды. Это означает, что дипольные точечные вихри служат эффективными переносчиками завихренности и других «вмороженных» характеристик от границ в среду. Это исключительно важное свойство, если учесть, что обычно зарождение завихренности, как правило, связано с границами среды.

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Теория стационарных состояний для обычных точечных вихрей имеет интересную историю и достигла определенного успеха. Хорошее изложение этих вопросов можно найти в книге [41]. Обнаружение нового типа точечных вихрей влечет за собой существование и новых стационарных течений жидкости, содержащих такие вихри. В работе [61] найден новый класс точных стационарных решений двумерных уравнений Эйлера. В отличии от уже известных решений, новые решения содержат сложные сингулярности. Сложными точечными сингулярностями считаются особые точки, у которых индекс векторного поля больше единицы [62,63]. Например, дипольная сингулярность является сложной, т.к. её индекс равен двум. В этой работе найден в явном виде широкий класс точных локализованных стационарных решений двумерных уравнений Эйлера с сингулярностью, индекс которой равен трём. Полученные в работе решения выражаются через элементарные функции. Найденные решения представляют собой сложную особую точку, окруженную симметричной структурой вихревых сателитов. В работе обсуждается также уравнения движения сингулярностей и условия стационарности особых точек, которые гарантируют стационарность сложной вихревой конфигурации. В качестве примера на рис.2 изображены линии тока одного представителя из класса найденных точных течений.

На рис.2. хорошо заметны две эллиптические особые точки, с двумя вихревыми сателлитами. Кроме этого, наблюдается группа сепаратрис, связывающая вихревые сателлиты с центральной особой точкой. Интересно отметить, что внешнее течение, соответствует простому вращению жидкости.

Метод получения таких стационарных вихревых структур основан на обобщении, предложенного в работе

[64] метода поиска стационарных вихревых структур. В ней предложен новый анзац для стационарных решений уравнений Эйлера, записанного в форме скобок Пуассона

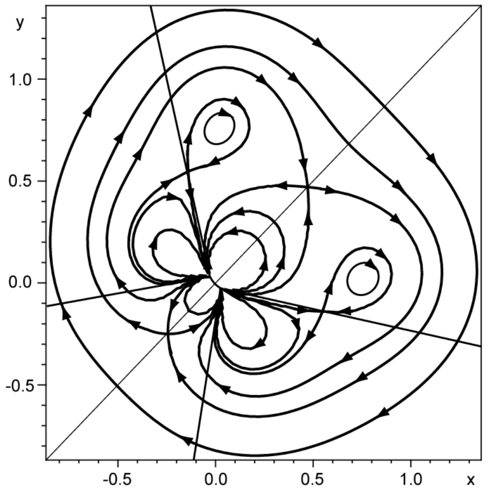

Рис. 2. Линии тока вихревой структуры при $n = 4$, «Бабочка» [61].

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \{\varphi, \Delta\varphi\} = 0\,,$$

где φ - функция тока. Этот анзац для стационарных решений этого уравнения имеет вид:

$$\Delta\varphi = f(\varphi) + \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha \delta(\vec{x} - \vec{x}_\alpha)\,.$$

Здесь $\vec{x}_\alpha = const$ – положения особенностей. В работе [64] при выборе $f(\varphi) = e^{-\varphi}$ найден новый класс точных решений. Это двупараметрический класс решений вихревых структур. Эти структуры напоминают осесимметричное ожерелье во вращающемся сдвиговом течении, в котором N - несингулярных сателлитов окружают точечный вихрь. Сателлиты описывают рациональное поле завихренности, поэтому мы называем их рациональными ожерельями. Пример линий тока, для одного из представителей таких решений, показан на рис.3. Вид точного решения в комплексных переменных можно записать в компактной форме в виде:

$$\varphi = -\ln \frac{8|A|^2 |z - z_0|^{2n}}{\left[1 + \left|\frac{A}{n+1}(z - z_0)^{n+1} + C\right|^2\right]^2}\,.$$

Здесь, $z = x_1 + ix_2$, A и C комплексные постоянные. Несмотря на свою простоту, это соотношение описывает множество мультипольных вихрей с различной симметрией, как это легко увидеть из примера, приведенного на рис.3. Мультипольные вихри образуют множество спутников, образующих ожерелья вокруг центра точечного вихря.

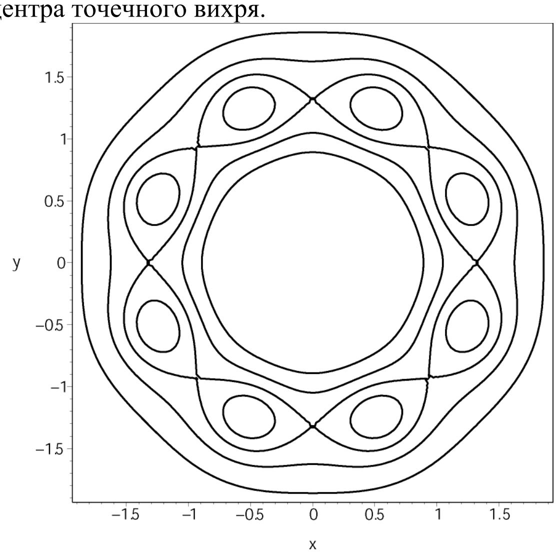

Рис.3. Мультиполюсная структура с симметрией восьмого порядка. Ожерелье из несингулярных сателлитов окружает точечный вихрь, расположенный в центре.

Были найдены и другие интересные нетривиальные стационарные мультипольные конфигурации с симметрией n-ого порядка. Так точные решения были найдены в работе [65] с помощью метода конформных отображений и функции Шварца. Центральный вихрь окружен N-сателлитами в центрах которых завихренность имеет сингулярности, как у точечных вихрей. В работе [66] было построено более сложное решение в котором N-сателлитов окружают вихревое кольцо. Другой тип решений был найден в работе [67] и независимо в работе [68] с использованием разных методов.

ТОЧЕЧНЫЕ ВИХРИ И ВОЛНЫ

В гидродинамических средах присутствуют два важных объекта - это вихри и волны. Роль линейных волн огромна и хорошо известна. С физической точки зрения это определяется тем, что их можно рассматривать как своеобразные универсальные квазичастицы. Эта идеология позволяет понять множество линейных и нелинейных явлений, исходя из свойств таких квазичастиц и характера их взаимодействия. Вихри, в определенном смысле, как отмечено выше, также можно рассматривать как квазичастицы. Они также претендуют на объяснение многих явлений в гидродинамических средах. Проблема в том, что вихри являются решениями нелинейных гидродинамических уравнений. Это вызывает ряд трудностей при их введении и изучении. Последнее усложняется еще и тем, что плодотворная идеализация нелинейных волн - одномеризация, не применима к вихрям. Вихри неизбежно многомерны. Однако многие свойства, по крайней мере точечных вихрей, хорошо изучены.

Другими словами, свойства волн и отдельно точечных вихрей к настоящему времени изучены достаточно глубоко. Однако в гидродинамических средах, как правило, присутствуют и вихри, и волны одновременно. Поэтому, исключительно важным является изучение влияния основных гидродинамических объектов друг на друга. Начало изучения такого влияния заложено в работах Лайтхила [69,70]. В них исследована генерация потенциальных волн вихревыми движениями. Изучение обратного влияния потенциальных волн на эволюцию вихрей начато относительно недавно [71,72]. Оказалось, что под влиянием потенциальных волн качественно меняется характер эволюции точечных вихрей. В качестве примера достаточно привести явление коллапса вихрей (одного знака завихренности) под влиянием потенциальных колебаний даже малой амплитуды [71,72]. Такой коллапс точечных вихрей невозможен при отсутствии потенциальных колебаний.

Для учета влияния волн, например, звуковой волны на движение точечных вихрей нужно преодолеть две проблемы. Во-первых, ввести точечные вихри в сжимаемой жидкости и, во-вторых, получить уравнения движения вихрей с учетом влияния волны. Необходимость этого связана с отсутствием звуковых волн в несжимаемой жидкости. Основной принцип, который удобно использовать, это вмороженность поля $rot\vec{V}\,/\,\rho$ в движение сжимаемой жидкости. Обсуждение интегралов вмороженности и других инвариантов гидродинамических сред можно найти в работах [73-76]. В работе [71] показано, что точечные вихри существуют и в сжимаемой жидкости. Получены уравнения движения точечных вихрей в поле звуковой волны в приближении, заданного поля звуковой волны.

$$\frac{dx_i^\alpha}{dt} = -\varepsilon_{ik}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\Gamma_\beta}{2\pi}\frac{x_k^\alpha - x_k^\beta}{|\,x_k^\alpha - x_k^\beta\,|^2} + V_i^p(\vec{x}^\alpha, t)\,.$$

Греческие индексы нумеруют точечные вихри. Второе слагаемое соответствует полю скорости звуковой волны $V_i^p(\vec{x},t) = \nabla\psi = (0, V\cos(kx_2 - \omega t))$ в точке положения α -вихря. Для простоты, но без потери общности, направление распространения волны выбрано вдоль оси x_2. Следует отметить, что в принципе $V_i^p(\vec{x},t)$ состоит из двух слагаемых, заданного внешнего течения и индуцированных потенциальных волн, возбуждаемых движениями вихрей. Однако при малых числах Маха амплитуда генерируемого звука вихрями мала. Оценка поправки, согласно результатам [69,70,77], дает ее величину пропорциональной M^2. Поэтому, естественно при малых махах пренебречь этой поправкой. Учитываемое поле заданной потенциальной волны, в силу вмороженности вихрей, приводит к их периодическим смещениям. Самое важное, что следует отметить, это невозможность сведения уравнений, приведенных выше, к гамильтоновой форме. Ранее, исходя из других соображений, система уравнений приведенная выше, была анонсирована в работе [77]. Эту систему уравнений, как показано в [71,72], можно отнести к более общему классу обратимых систем уравнений [79,80]. В обратимых системах могут присутствовать как элементы гамильтоновой динамики, так и диссипативной [79-81]. В работах [71,72] показано, что многообразие режимов движения двух вихрей одинакового знака завихренности связано с взаимодействием резонансов типичных элементов гамильтоновой динамики с особыми решениями, которые возможны в диссипативных системах. Получена бифуркационная диаграмма перестройки резонанса и качественные изменения в поведении вихрей при таких бифуркациях. Выяснены условия возникновения хаотического поведения и его особенности, связанные с обратимостью динамической системы уравнений. Обнаружен эффект блокировки резонансов и аномальное расширение сепаратрис под влиянием особого решения. Предложена простая модель для изучения взаимодействия резонансов с простыми аттракторами в обратимых системах. Детальное исследование взаимодействия аттрактора - главного элемента диссипативных систем с резонансом - типичным элементом гамильтоновых систем проведено в работе [82,83]. Получена система бифуркаций резонанса, происходящая при таком взаимодействии. С увеличением амплитуды волны обнаружены два новых режима движения таких вихрей: это коллапс и их разбегание. Установлены условия реализуемости этих режимов. Значительно проще оказалось влияние звуковой волны на взаимодействующие вихри противоположного знака завихренности. Эта задача относится к точно интегрируемой. Точное решения приведено в работе [71]. В случае отсутствия волны, такие вихри сохраняют расстояние между ними и двигаются в направлении ортогональном к линии соединяющей их. При малых амплитудах влияние волны сводится к сносу вихрей в направлении ее распространения и дрейфу в поперечном направлении.

В работе [84] было исследовано поведение двух вихрей одинаковой завихренности под воздействием широкого пакета волн. Получено отображение, описывающее динамику вихрей. Выяснены возможные режимы движения в зависимости от параметров вихрей и волн. Обнаружено явление хаотического коллапса вихрей одинакового знака завихренности.

В работе [78] рассмотрено влияние потенциальных мод колебаний на движение точечного вихря вблизи твердой стенки. Получены уравнения движения точечного вихря у твёрдой стенки в поле потенциальной волны. Детально рассмотрено влияние падающей и отраженной от стенки волны, и распространяющейся вдоль нее на эволюцию вихря. Показано существование бесконечного количества качественно различных режимов движения вихря и установлены критерии их реализуемости. Построены бифуркационные диаграммы, позволяющие предсказывать качественные перестройки режимов при изменении параметров. Проанализированы всевозможные траектории движения точечного вихря в каждом из режимов. Случай действия на вихрь звуковой волны, распространяющейся параллельно границе, точно интегрируем, для него получены точные решения явно. Прежде всего отметим, что состояние равномерного движения вихря с сохранением расстояния до стенки под воздействием волны, легко разрушается. При этом возникает, как изменение расстояния так и продольной, и поперечной к стенке скоростей. В подвижной системе отсчета даже направление движения вихря может измениться на противоположное. Учитывая, что точечный вихрь в реальной жидкости соответствует линейному протяженному вихрю, можно ожидать возникновения подковообразных и более сложных структур, за счет взаимодействия линейного вихря с неоднородным потенциальным волновым полем. Интересно отметить, что режимы приводящие к потере памяти о начальном состоянии вихря, приводят к изменению энергии вихревой компоненты. Косвенно это означает, что в системе «волна – вихрь» может возникать эффект аналогичный безстолкновительному затуханию волн в плазме. Другими словами, взаимодействие потенциальной волны с точечными вихрями в идеальной жидкости может приводить к изменению ее амплитуды. Однако, анализ таких эффектов требует самосогласованного описания взаимодействия волн и вихрей, по крайней мере, в духе квазилинейной теории и такое развитие теории пока отсутствует.

В недавней работе [85] продолжено изучение обратимой системы двух точечных вихрей, взаимодействующих со звуковой волной. В ней исследованы динамика и бифуркации, а также поиск странных аттракторов с помощью построеных карт динамических режимов.

REFERENCES

1. Meleshko V.V., Konstantinov M.Ju. Dinamika vihrevyh struktur. – Kiev: Naukova dumka, 1993.-279s.
2. Tur A.V., Janovskij V.V. Gidrodinamicheskie vihrevye struktury. – Har'kov: Institut monokristallov, 2012. - 290s.
3. Seffmen F.Dzh. Dinamika vihrej. - M.: Nauchnyj mir, 2000. - 376s.
4. Ekkart K. Gidrodinamika okeana i atmosfery. - Moskva-Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2004. – 328s.
5. Matveev L.T., Matveev Ju.L. Oblaka i vihri - osnova kolebanij pogody i klimata. - SPb.: izd.RGGMU, 2005. - 327s.
6. Monin A.S., Seidov D.G. Pogoda i klimat okeana // Priroda. – 1983. – S.34-43.
7. Nalivkin D.V. Uragany, buri i smerchi. Geograficheskie osobennosti i geologicheskaja dejatel'nost'.- L.: Nauka, 1969. - 487s.
8. Mamedov E.S., Pavlov N.I. Tajfuny.- L. Gidrometeoizdat, 1974.- 139s.
9. Nalivkin D.V. Smerchi.- M.: Nauka, 1984.- 111 s.
10. Getling A.V. Konvekcija Releja-Benara. Struktury i dinamika.- M.: Editorial URSS, 1999.- 248s.
11. Gershuni G.Z., Zhuhovickij E.M., Nepomnjashhij A.A. Ustojchivost' konvektivnyh techenij.- M.: Nauka, 1989.- 320s.
12. Monin A.S. Vvedenie v teoriju klimata.- L.: Gidrometeoizdat, 1982.- 296 s.
13. Merkulov V.I. Gidrodinamika znakomaja i neznakomaja.- M.: Nauka, 1989.- 136s.
14. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli.- M.: Nauka, 1973.- 416s.
15. Uizem D. Linejnye i nelinejnye volny.- M.: Mir, 1977.- 624s.
16. Lajthill Dzh. Volny v zhidkostjah.- M.: Mir, 1981.- 598s.
17. Vil'hel'mson H., Vejland Ja. Kogerentnoe nelinejnoe vzaimodejstvie voln v plazme.- M.: Energoizdat, 1981.- 224s.
18. Helmholtz H. Uber Integrate hydrodinamischen Gleichungen weiche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. rein, angew. Math. 1858. – Vol.55. – P.25-55., sm. takzhe russkij perevod s kommentarijami S.A. Chaplygina v knige Gel'mgol'c G. Osnovy vihrevoj teorii. – M.-Izh.: IKI, 2002. - 82s.
19. Puankare A. Teorija vihrej. Izhevsk: Izd-vo RHD. 2000.- 160 s. Per. s fr. Poincare H.Theorie des tourbillions. Paris, Carre. 1893.
20. Yanovsky V.V., Tur A.V., Kulik K.N. Singularities Motion Equations in 2-Dimensional Ideal Hydrodynamics of Incompressible Fluid // Phys.Lett. A. – 2009. –Vol. 373. – P.2484-2487.
21. Gel'fand I.M., Shilov G.E. Obobshhennye funkcii i dejstvija nad nimi.- M.: Gos. izd. fiziko-matematicheskoj literatury, 1959.- 470s.
22. Vladimirov B.S. Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike. - M.: Nauka, 1979.- 320 s.
23. Lamb G. Gidrodinamika.-M.: OGIZ, Gostehizdat, 1947:- 929s. Per. s ang. Lamb H. Hydrodynamics, Ed. 6-th., N. Y. Dover publ. 1945.
24. Glaz H.M. Two attempts at modeling two-dimensional turbulence, in “Turbulence Seminare”, ed.P.Bernard, T.Ratio, Lecture Notes in Mathematics.- Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 1977.
25. Novikov E.A., Sedov Ju.B. Stohasticheskie svojstva sistemy chetyreh vihrej // ZhETF. – 1978. - T.75. - Vyp. 3. - S.868-876.
26. Ziglin S.L. Neintegriruemost' zadachi o dvizhenie chetyreh tochechnyh vihrej // DAN SSSR. – 1979. – T.250. – No.6.- C.1296-1300.
27. Synge J.L. On the motion of three vortices // Can. J. Math. – 1949. – Vol.1. – P.257-270.
28. Novikov E.A. Dinamika i statistika sistemy vihrej // ZhETF. - 1975. - T.68. - Vyp.5. - S.1868-1882.
29. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids.- 1988.- Vol. 31.- No.6.- P. 1392-1409.
30. Kulik K.N., Tur A.V., Janovskij V.V. Vzaimodejstvie tochechnogo i dipol'nogo vihrja v neszhimaemoj zhidkosti // TMF.- 2010. - T.162. - No.3. - S.459-480.
31. Stefan G. Llewellyn Smith, How do singularities move in potential flow? // Physica D.- 2011.-Vol.240. - P.1644-1651.
32. Lewis T.C. Some cases of vortex motion // Messenger of Math. - 1879. - Vol.9. - P. 93–95.
33. Borisov A.V., Mamaev I.S. Matematicheskie metody dinamiki vihrevyh struktur.- Moskva-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2005.- 368s.

34. Greenhill A.G. Plane vortex motion // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1877/78. – Vol. 15. – No.58. – P.10–27.
35. Tur A.V., Yanovsky V.V. Interaction of a dipole point vortex with flat boundary // arXiv:1204.4557v1 (physics.flu-dyn) 20 Apr 2012.
36. Kulik K.N., Tur A.V., Janovskij V.V. Evoljucija tochechnogo vihrja dipol'nogo tipa v krugovoj oblasti // Nelinejnaja dinamika. – 2013. - T.9. - No.4. - S.559-669.
37. Fridman A.A., Polubarinova P.Ja. O peremeshhajushhihsja osobennostjah ploskogo dvizhenija neszhimaemoj zhidkosti // Geofiz. sb. - 1928. - T.5. – No.2. - S.9–23.
38. Novikov A.E., Novikov E.A. Vortex-sink dynamics // Phys. Rev. E.- 1996.- Vol. 54.- No. 4.- P. 3681– 3686.
39. Bogomolov V.A. Dvizhenie ideal'noj zhidkosti postojannoj plotnosti pri nalichii stokov // Izv. AN SSSR. Mehanika zhidkosti i gaza.- 1976.- No 4.- S. 21–27.
40. Borisov A.V., Mamaev I. S. On the problem of motion vortex sources on a plane // Regul. Chaotic Dyn.- 2006.- Vol. 11.- No.4.-P. 455–466.
41. Borisov A.V., Mamaev I.S. Matematicheskie metody dinamiki vihrevyh struktur.- Moskva – Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2005.- 368 s.
42. Bizjaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika treh vihreistochnikov // Nelinejnaja dinamika.- 2014.- T. 10.- No 3.- S.319–327.
43. Noguchi T., Yukimoto S., Kimura R., Niino H. Structure and instability of a sink vortex // Proc. PSFVIP-4 (Chamonix, France).- 2003.-P.1–7.
44. Routh E.J. Some applications of conjugate functions // Proc. Lond. Math. Soc.- 1991.- Vol.12.- No.170/171. - P. 73–89.
45. Patterman S. Gidrodinamika sverhtekuchej zhidkosti.- M.: Mir, 1978. - 520 s.
46. Feynman R. P. Progress in Low Temperature Physics. v.1 (ed. C. J. Cortner), North-Holland, Amsterdam. - 1955.- P.17-53.
47. Halatnikov I. M. Teorija sverhtekuchesti.- M.: Nauka, 1971.- 320 s.
48. Volovik G.E., Mineev V.P. Issledovanie osobennostej v sverhtekuchem Ne3 i zhidkih kristallah metodami gomotopicheskoj topologii // ZhETF. - 1977.- T. 72. - Vyp. 6.- S.2256-2259.
49. Fejnman R. Satisticheskaja mehanika.- M.: Mir, 1975.- 407s.
50. Abrikosov A.A. Sverhprovodniki vtorogo roda i vihrevaja reshetka // UFN.- 2004.- T. 174.- Vyp. 11.- S.1234–1239.
51. Gor'kov L.P., Kopnin N.B. Dvizhenie vihrej i elektrosoprotivlenie sverhprovodnikov vtorogo roda v magnitnom pole // UFN. - 1975.- T.116.- S.413-448.
52. Tinkham M. Vvedenie v sverhprovodimost'. - M.: Mir, 1980.- 312s.
53. Abrikocov A.A. Osnovy teorii metallov.- M.: Fizmatlit, 1987.- 520s.
54. Vinen W.F. The detection of a single quantum of circulation in liquid helium II // Proc. Roy. Soc.- 1961.- A260.-P. 218-236.
55. Rayfield G.W., Reif F. Evidence for The Creation and Motion of Quantized Vortex Rings in Superfluid Helium // Phys. Rev. Lett.- 1963. - Vol.11. - P.305-308.
56. Rayfield G.W., Reif F. Quantized Vortex Rings in Superfluid Helium // Phys. Rev. - 1964. -Vol. 136. - P. A1194–A1208.
57. Tur A.V., Yanovsky V.V. Point vortices in 2D-plasma hydrodynamics // Physics of Plasmas. - 2010. - Vol.17. - No.11.- P.112308.
58. Novikov E.A. Obobshhennaja dinamika trehmernyh vihrevyh osobennostej (vortonov) // ZhETF. - 1983. - T.84. - Vyp.3. - S.975 981.
59. Safman P.G., Meiron D.I. Difficulties with three-dimensional weak so- solutions for inviscid incompressible flow // Phys. Fluids.- 1986. - Vol. 29(8). - P.2373-2375.
60. Chefranov S.G. Dinamika tochechnyh vihrevyh dipolej i spontannye singuljarnosti v trehmernyh turbulentnyh potokah // ZhETF. - 1987. - Vyp. 1. - S.151-158.
61. Tur A.V., Kulik K.N., Yanovsky V.V. Vortex structures with complex points singularities in the two-dimensional Euler equation. New exact solutions // Physica D. - 2011. - Vol.240. - P.1069-1079.
62. Hartman P. Ordinary differetial equations. - N.Y.:J.Wiley Sons, 1964. – 314p.
63. Nemitsky V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. - N.J. : Princeton, 1960. – 523p.
64. Tur A.V., Yanovsky V.V. Point vortices with a rational necklace: New exact stationary solutions of the two-dimensional Euler equation // Physycs of Fluids. - 2004. - Vol.16. - No.8. - P.2877-2885.
65. Crowdy G.D. A class of exact multipolar vortices // Phys.Fluids. - 1999. - Vol.11(9). - P.2556-2564.
66. Crowdy D.G. The construction of exact multipolar equilibria of the two-dimensional Euler equations // Phys.Fluids. - 2002. - Vol.14(1). - P.257.
67. Crowdy D. Polygonal N-vortex arraya: Stuart model // Phys.Fluids. - 2003. - Vol.15(12). - P.3710-3717.
68. Newton P.K. The N-Vortex Problem: Analytical Techniques. - New-York: Springer-Verlag, 2001.-420p.
69. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc., ser. A. - 1952. - Vol.211. - No.1107.- P.564-587.
70. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically, II. Turbulence as a source of sound // Proc. Roy. Soc., ser. A. - 1954. - Vol.222. - No.1148. - P.1-32.
71. Gonchar V.Ju., Ostapchuk P.N., Tur A.V., Janovskij V.V. Dinamika i stohastichnost' v obratimoj sisteme, opisyvajushhej vzaimodejstvie dvuh tochechnyh vihrej v pole potencial'noj volny // Pr.1550, Institut Kosmicheskih issledovanij. - 1989. - 70s.
72. Gonchar V.Yu., Ostapchuk P.N., Tur A.V., Yanovsky V.V. Dynamics and stochasticity in reversible system describing interaction of point vortices with a potential wave // Phys. Lett. A. - 1991. - Vol.152. - No.5,6. - P.287-292.
73. Tur A.V., Yanovsky V.V. Invariants in Dissipationless hydrodynamics media // J.Fluid.Mech. - 1993. - Vol.248. - P.67-106.
74. Volkov D.V., Tur A.V., Yanovsky V.V. Hidden supersymmetry of classical systems (hydrodynamics and conservatijn laws) // Phys.Lett. A. - 1995. - Vol.203. - P.357-361.
75. Sagdeev R.Z., Moiseev S.S., Tur A.V., Yanovsky V.V. Problem of the strong turbulence and topological solitons. «Nonlinear Phenomena in plasma and Hydrodynamics». - M.: Mir, 1986. - P.137-182.
76. Zaharov V.E. Ob algebre integralov dvizhenija dvumernoj gidrodinamiki v peremennyh Klebsha // Funkc. analiz i ego pril. -

1989. – T.23. – Vyp.3. - S.24–31.
77. Yates J.E. Interaction with and production of sound by vortex flows // AIAA Paper 77-1352. - 1977.
78. Kulik K.N., Tur A.V., Janovskij V.V. Evoljucija vihrja u tverdoj stenki pod vozdejstviem potencial'noj volny // UFZh.- 2006. - T.51. - No.10. - S.1008-1017.
79. Arnold V.I., Sevryuk M.B. Oscillations and bifurcations in reversible systems, in Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics. - M.: Mir Publishers, 1986. - P.31-64.
80. Sevryuk M.B. Reversible systems, Lect.Notes in Math., vol.1211. - Berlin: Springer – Verlag, 1986. - 319p.
81. Politi A., Oppo G.L., Badii R. Coexistence of conservative and dissipative behaviour in reversible dynamical systems // Phys. Rev. A - 1986. -Vol.33. - P.4055-4060.
82. Gonchar V.Y., Svirinovskaya E.Y., Tur A.V., Yanovsky V.V. The interection beetwin resonances and attractor in a reversible dynamic system // Phys. Lett. A. - 1993. - Vol.174. - P.241-246.
83. Gonchar V.Ju., Tur A.V., Janovskij V.V., Bifurkacii haoticheskih rezhimov obratimyh otobrazhenij pri vzaimodejstvii rezonansov i attraktorov // Zhurnal Elektromagnitnye javlenija. - 1998. - No.1. - S.3-20.
84. Gonchar V.Ju., Ostapchuk P.N., Tur A.V., Janovskij V.V. Evoljucija tochechnyh vihrej v pole shirokogo paketa voln / Preprint HFTI, HFTI 95-5. - 1995. - 17s.
85. Vetchanin E.V., Kazakov A.O. Bifurkacii i haos v zadache o dvizhenii dvuh tochechnyh vihrej v akusticheskoj volne // Nelinejnaja dinamika. - 2014. - T. 10. - No. 3. - S.329–343.