

PACS: 52.40.Mj, 52.35.Mw

ESSENTIAL FEATURES OF MODELS FOR DESCRIPTION OF MODULATION INSTABILITY OF LANGMUIR WAVES IN PLASMA

A.V. Kirichok¹⁾, V.M. Kuklin¹⁾, A.G. Zagorodny²⁾

¹⁾*Kharkov National University, Institute for High Technologies
4 Svobody Sq., Kharkov 61022, Ukraine*

²⁾*Bogolyubov Institute for Theoretical Physics
14-b, Metrolohichna str., Kiev, 03680, Ukraine*

E-mail: artif.intel@karazin.ua

Received April 4, 2015

Various models for description of the modulation instability of intensive Langmuir oscillations in plasma in one-dimensional representation are discussed. It is noted that the kinetic damping on the electrons can violate the conditions of the modulation instability development due to the suppression of the field at the stage of cavities formation, which in this case can reshape. The hydrodynamic model not quite correctly describes the behavior of particles trapped by the spatially inhomogeneous field, neglecting in fact by their inertia that leads to formation of not only very small-scale and deep plasma density cavities, but also triggers to the peaking regime. Considering ions as particles within framework of so-called hybrid models (when electrons are described as fluid and ions as super-particles) allows to see the appearance of groups of fast ions and premature collapse of density cavities due to the intersection of ion trajectories. These models make possible determination of the energy transmitted to ions and low-frequency collective degrees of freedom. Different models are compared with special emphasis on the comparative dynamics of ion heating with development of the instability of intensive Langmuir oscillations in hot (Zakharov's model) and cold (Silin's model) plasma.

KEYWORDS: modulation instability, parametric instability, Zakharov's model, Silin's model, hybrid models

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛЕЙ ОПИСАНИЯ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

А.Г. Загородний¹⁾, А.В. Киричок²⁾, В.М. Куклин²⁾

¹⁾*Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
ул. Метрологическая, 14 – Б, Киев 03680, Украина*

²⁾*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков 61022, Украина*

Обсуждаются различные модели описания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме при использовании одномерного представления. Отмечается, что кинетическое затухание на электронах способно нарушить условия развития модуляционной неустойчивости за счет подавления поля еще на этапе формирования каверн, которые при этом могут исказить свою форму. Гидродинамическое описание не вполне корректно описывает поведение захваченных частиц неоднородным в пространстве полем, фактически пренебрегая их инерцией, что формирует не только весьма мелкомасштабные и глубокие каверны плотности плазмы, но и режимы с обострением. Представление ионов частицами в рамках, так называемых гибридных моделей (электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами), позволяет увидеть появление групп быстрых ионов и преждевременное разрушение каверн плотности из-за пересечения их траекторий. Подобные модели позволяют найти энергию, передаваемую ионам и коллективным НЧ степеням свободы. Проводится сравнение различных моделей, причем особое внимание уделяется обсуждению сравнительной динамики нагрева ионов при неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в горячей (модель Захарова) и холодной (модель Силина) плазме.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модуляционная неустойчивость, параметрическая неустойчивость, модель Захарова, модель Силина, гибридные модели

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЕЙ ОПИСУ МОДУЛЯЦІЙНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ЛЕНГМЮРІВСЬКИХ КОЛИВАНЬ У ПЛАЗМІ

А.Г. Загородній¹⁾, О.В. Киричок²⁾, В.М. Куклін²⁾

¹⁾*Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
вул. Метрологічна, 14 – Б, Київ 03680, Україна*

²⁾*Харківський національний університет ім. В.М. Каразіна
пл. Свободи, 4, Харків 61022, Україна*

Обговорюються різні моделі опису модуляційної нестійкості інтенсивних ленгмюровських коливань в плазмі в одномірному випадку. Відзначається, що кінетичне згасання на електронах здатне порушити умови розвитку модуляційної нестійкості за рахунок заглушення поля ще на етапі формування каверн, які при цьому можуть змінювати свою форму. Гідродинамічний опис не цілком коректно описує поведінку захоплених частинок неоднорідним в просторі полем, фактично нехтуючи їх інерцією. Це приближення має наслідком не тільки формування дрібномасштабних та глибоких каверн густини плазми, але і перехід до режимів з загостренням. Представлення іонів частками в рамках, так званих гібридних моделей (електрони описуються як рідина, а іони як великі частинки), дозволяє побачити появлення груп швидких іонів і передчасне руйнування каверн густини через перетин іонних траекторій. Подібні моделі дозволяють знайти загальну енергію, що передається іонам та колективним НЧ ступеням свободи. Проводиться порівняння різних моделей, причому особлива увага приділяється обговоренню порівняльної динаміки нагріву іонів при нестійкості інтенсивних ленгмюровських коливань в

горячий (модель Захарова) і холодний (модель Силіна) плазмі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модуляційна нестійкість, параметрична нестійкість, модель Захарова, модель Силіна, гібридні моделі

Легко возбуждаемые различными источниками в плазме [1–9] интенсивные ленгмюровские волны оказываются параметрически неустойчивыми. Эта неустойчивость ведет к возбуждению коротковолнового спектра колебаний, синхронизированного по частоте с интенсивной ленгмюровской волной (накачки), и к образованию глубоких каверн плотности плазмы, заполненных ВЧ полем. Интерес к этим процессам был обусловлен, в частности, открывшимися возможностями нагрева электронов и ионов. Корректный аппарат описания параметрической неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний фактически был создан в основополагающих работах В.П. Силина [10] и В.Е. Захарова [11]. Уже в первых численных 1D экспериментах по параметрическому распаду ленгмюровских колебаний [12] эти теоретические представления были подтверждены [10] (см. также [13,14] и обзор [15]). Однако наибольший интерес у экспериментаторов вызвал обнаруженный В. Е. Захаровым механизм диссипации волновой энергии. Аналитические исследования, аппаратные и численные эксперименты еще на ранней стадии изучения этих явлений подтвердили [16–18] тот факт, что в некоторых случаях заметная часть энергии поля накачки в результате неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра [19,20] и появляются выбросы быстрых частиц [16–29].

Если плотность энергии длинноволнового ленгмюровского поля меньше плотности тепловой энергии электронов плазмы, процесс формирования коротковолнового спектра возмущений и образования каверн плотности плазмы может быть описан с помощью уравнений Захарова [11], полученных с использованием гидродинамических уравнений для электронной и ионной жидкостей. В гидродинамической модели Захарова возникают области локализации интенсивных электрических ВЧ полей. Из этих областей (каверн) плазма выталкивается под действием ВЧ-давления, так что плотность плазмы оказывается значительно ниже средней по объему. Дальнейшая эволюция может привести к так называемому коллапсу – сужению и углублению каверны плотности (т.н. режим с обострением). В этом случае сужение каверны, как может быть замечено в более общих моделях описания этого явления, должно сопровождаться затуханием мелкомасштабных мод ВЧ спектра на электронах и «схлопыванием» каверны из-за выгорания ВЧ поля (так называемый, «физический коллапс»). Понятно, что в гидродинамической модели учет ряда кинетических эффектов (например, затухания Ландау) невозможен. Поэтому обычно применяются феноменологическое описание этого явления, за счет введения в систему гидродинамических уравнений соответствующих слагаемых. Это в определенной степени допустимо, ибо природа затухания Ландау достаточно хорошо изучена. С другой стороны, чисто гидродинамическое описание, не вполне корректно описывает поведение захваченных частиц неоднородным в пространстве полем, фактически пренебрегая их инерцией (существенной именно для ионов), что приводит к формированию не только весьма мелкомасштабных и глубоких каверн плотности плазмы, но и к режимам с обострением, которые не вполне адекватны физической реальности.

Для корректного учета затухания Ландау на электронах часто используется кинетическое уравнение для функции их распределения. Но следует иметь в виду, что при определенных условиях кинетическое затухание на электронах способно нарушить условия развития модуляционной неустойчивости за счет подавления поля еще на этапе формирования каверн, которые при этом могут искажать свою форму. То есть, существуют трудности в интерпретации процесса модуляционной неустойчивости, характер которой может довольно заметно изменяться при включении сильного кинетического затухания. Кроме того, кинетический подход, как и гидродинамический, описывает движение сплошной среды, позволяя существовать не имеющим физической перспективы решениям с обострениями вплоть до сколь угодно малых масштабов.

Ниже обсудим различные модели описания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме, используя одномерное представление. Выбор одномерных моделей процессов, как отметил Дж. Доусон, сохраняет основные черты процессов, существенно упрощая описание и понимание физических явлений [30].

В одномерном случае формируется мелкомасштабная солитоноподобная каверна, где ВЧ давление уравновешивается давлением плазменных электронов. В дозвуковом режиме действительно формируются решения в виде цуга солитонов, подобные тем, которые являются решениями нелинейного уравнения Шредингера [31]. Однако в этих низкоразмерных случаях возможен «физический коллапс», если ВЧ давление уменьшается в результате выгорания поля за счет затухания Ландау [32].

Вообще говоря, поддерживает разрушение каверны нагрев не только электронов, но и ионов, повышающий общее давление плазмы, что также разрушает равновесное состояние этих образований. В сверхзвуковом режиме движения стенок каверны, вероятность физического коллапса даже в одномерном случае может возрастать. Модуляционная неустойчивость интенсивной ленгмюровской волны в неизотермической плазме приводит также к коллективным ионным возбуждениям, в частности к генерации ионно-звуковых волн [33–36].

Сравнение кинетической модели (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения, с гидродинамической моделью Захарова для одних и тех же значений параметров и одинаковых начальных условий было проведено в работе [37], где амплитуда длинноволнового поля (накачки) со временем не изменялась. Наиболее корректным было сравнение

для случая неизотермической плазмы. При формировании каверны, на начальной стадии нелинейного процесса в режиме постоянной накачки (который, в некоторой степени, подобен эволюции начального состояния) заметны отличия в формировании каверн плотности, форма которых в кинетической модели не соответствует структуре возмущений, характерных для модуляционной неустойчивости. Хотя в обоих случаях вытеснение ВЧ полем плазмы приводит к образованию областей с пониженной плотностью, величина изменений последней в модели Захарова оказалась значительно больше, чем в модели Власова–Пуассона. То есть, было показано, что кинетическое затухание поля на частицах способно исказить процесс модуляционной неустойчивости, возможно приводя к иным последствиям, в частности к появлению групп быстрых частиц и преждевременному разрушению каверн плотности.

Весьма интересно сравнение гидродинамической модели Захарова с моделью, в которой использовано кинетическое описание электронов и гидродинамическое для ионов [38]. Здесь также рассматривался случай постоянной накачки. Данная модель значительно лучше описывает формирование каверн, характерных для развитой модуляционной неустойчивости, которые на начальной стадии нелинейного процесса практически не отличаются от подобных образований в гидродинамической модели Захарова. Надо отметить, что модели, которые используют такое кинетическое описание электронного компонента плазмы, а ионы представлены гидродинамически, позволяют увидеть формирование каверн плотности плазмы и способны более точно определить характеристики распределения электронов по скоростям, в частности их температуру, хотя не дают представления о распределении ионов по энергиям.

При представлении ионов частицами в рамках так называемых гибридных моделей¹ (электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами) флуктуации ионной плотности оказываются весьма значительными [39–41], что ускоряет процесс развития параметрической неустойчивости настолько, что линейная стадия роста возмущений практически выпадает из наблюдения (хотя это, как будет отмечено ниже, обусловлено, в том числе, и иными причинами). Рассмотрение в рамках таких гибридных моделей позволяет учесть инерцию ионов при формировании и эволюции каверн плотности плазмы, в частности, механизм их разрушения. Именно прямое моделирование коллапса методом частиц, по мнению, высказанному В.Е. Захаровым и его коллегами (см. [42]), является «наиболее последовательным». Действительно, кинетическое и гидродинамическое описания оперируют объектами, которые представляют собой не частицы, а малые фазовые объемы и в классическом пределе эти фазовые объемы сколь угодно малы. Это приводит к меньшей инерционности вещества, чем при его описании частицами, хорошо локализованными в обычном пространстве и в пространстве скоростей. Что касается частиц, то здесь другая крайность, крупные частицы обладают излишне большой инерционностью, потому их часто заменяют локальными объектами областями–ячейками, где происходит осреднение внутреннего содержимого. Это приближает такой подход на малых масштабах к гидродинамическому описанию, сохраняя на больших масштабах особенности метода крупных частиц и их осредненную инерционность. Можно увеличивать число модельных частиц в описании, уменьшая удельную долю (заряд и массу) каждой, хотя приблизиться к реальным физическим параметрам в трехмерном пространстве вряд ли удастся. Далее мы используем для одномерного моделирования $2 \div 5 \cdot 10^4$ модельных частиц-ионов (что в трехмерной модели соответствовало бы $10^{13} \div 10^{14}$ таких объектов в объеме рассмотрения), эти частицы уже по своим характеристикам отвечают отдельным ионам. Потому динамика моделирующих ионы частиц в этом случае в значительной степени адекватна динамике ионов плазмы, более того механизмы обмена энергией между полем и частицами отвечают реальному взаимодействию ионов со спектром НЧ колебаний.

Это означает что, в одномерных гибридных моделях с большим числом частиц можно обеспечить корректное описание нелинейного затухания Ландау медленных возмущений плотности плазмы на ионах, оставляя за рамками этого подхода проблемы описания деталей функции распределения электронов. Учет нерезонансного взаимодействия частиц–ионов с модами НЧ спектра, захват ионов в потенциальные ямы таких колебаний приводит к дополнительной неустойчивости каверн плотности, возникающих в результате модуляционной неустойчивости, а также к появлению групп быстрых частиц.

В работе [41], было проведено сравнение двух моделей – гидродинамической модели Захарова и гибридной при одинаковых значениях параметров и одинаковых начальных условиях. За счет большего уровня флуктуаций ионной плотности количество каверн в гибридной модели оказалось заметно больше, и они менее глубокие, чем в модели Захарова. Интегральные показатели обеих моделей практически одинаковы. Недостатком работы этих авторов является несамосогласованное описание, то есть отсутствие учета возбуждаемого спектра на волну накачки. Подчеркнем, что в случаях гидродинамического описания в модели Захарова [41] и описания в рамках кинетических уравнений для функции распределения электронов [43], каверны остаются стабильными.

Если плотность энергии поля заметно превосходит плотность тепловой энергии плазмы, развитие модуляционной неустойчивости по крайней мере на начальной стадии процесса происходит по сценариям, предложенным В.П. Силиным [10,21]. В моделях В.П. Силина мощная ленгмюровская волна в холодной плазме

¹ Это название было предложено авторами [41].

приводит к интенсивным осцилляциям скорости электронов, амплитуда которых сравнима с длиной волны мод возбуждаемого спектра. В этом случае, вообще говоря, неустойчивость следовало бы называть параметрической [10]. Тем не менее, обе модели Захарова и Силина оказываются физически подобны [44]. Именно из-за этого термин модуляционная неустойчивость применим для описания процесса неустойчивости мощного ленгмюровского поля в модели Силина.

В частности, даже в одномерном численном моделировании процесса на базе обобщенных в работах [45, 46] гидродинамических уравнений Силина, развивалась модуляционная неустойчивость и происходил частичный обмен энергией между ее коротковолновым спектром и интенсивной волной накачки. В гибридной модели Силина (электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами) можно было наблюдать физический коллапс [40], обусловленный не только неравновесным начальным состоянием каверн (из-за нарушения баланса между ВЧ давлением и давлением плазмы) и эффектом выгорания поля, но и учетом инерции ионов. При этом ионная каверна «схлопывалась», то есть, переходила в режим пересечения траекторий частиц [39, 40]. Отметим, что динамика процесса, по крайней мере, на начальной стадии развитого режима совпадала с ранее выполненными численными расчетами [21]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка $(m_e / m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [40] (здесь m_e и m_i – массы электронов и ионов, соответственно). Для электронов переход в режим пересечения траекторий мог сдерживаться существованием ионной каверны, что способно было синхронизовать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения. Эксперименты по созданию вблизи плазменного резонанса в неоднородной плазме значительной плотности энергии поля W , превышающей плотность тепловой энергии плазмы $n_0 T_{e0}$, с частотой, близкой к ленгмюровской, демонстрировали на фоне нагрева электронов вблизи плазменного резонанса появление коротких импульсов быстрых частиц. Причем, наряду с электронами имел место вынос энергии из области плазменного резонанса ионами [47–49] с достаточно большими энергиями (см., например, обзорную работу [49]). Область источников электронных импульсов соответствовала малым размерам каверн плотности. Соотношение энергии, запасенной как в быстрых ионах после разрушения каверны, примерно отвечало приведенным в теории [40, 50–52] значениям.

Рассмотрение процессов параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в условиях применимости уравнений Захарова и уравнений Силина обычно рассматривалось теоретиками отдельно, хотя эксперименты часто не разделяли эти процессы. Поэтому представляет интерес сравнить характер протекания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в горячей и холодной плазме в рамках гибридных самосогласованных моделей. Основное внимание было обращено на поведение ионного компонента плазмы. Оказалось, что доля энергии ВЧ поля, передаваемая ионам в случае горячей плазмы порядка $W / n_0 T_{e0}$, а в случае холодной плазмы были подтверждены оценки [40] порядка $(m_e / m_i)^{1/3}$, причем в последнем случае доля быстрых частиц в распределении их по энергиям оказалась выше [50–52].

Особое внимание в данной работе уделено сравнению характера возбуждения коллективных степеней свободы низкочастотных движений, в частности, генерация ионных волн в гибридных моделях Захарова и Силина. Важно было также выяснить, как влияет скорость выгорания ВЧ поля в кавернах на характер динамики ионов. Эти и другие вопросы обсуждаются ниже.

Целью данной работы является сравнение различных 1D моделей описания процесса модуляционной неустойчивости интенсивных длинноволновых ленгмюровских колебаний в горячей и холодной плазме.

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ

Гидродинамическая модель Захарова. Описание поведения электронов плазмы в условиях, когда фазовые скорости ленгмюровских волн превосходят их тепловую скорость, может быть гидродинамическим. Ионы также можно описывать гидродинамически. По существу, такая система представляет собой двухжидкостную гидродинамику с электронной и ионной жидкостями.

Для упрощения описания, ниже ограничимся одномерным случаем. Для скорости v_e и плотности n_e электронов справедливы следующие уравнения

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{e}{m_e} E + \frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} = -v_e \frac{\partial v_e}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (n_e \cdot v_e), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi e \cdot (n_i - n_e), \quad (3)$$

где $E = -\partial\phi / \partial x$, ϕ – напряженность и потенциал электрического поля колебаний, $P_e = n_e T_e$ – давление, T_e – температура в энергетических единицах и $v_{Te} = \sqrt{T_e / m_e}$ – тепловая скорость электронов, n_i – плотность ионов

плазмы, n_0 – невозмущенная плотность как электронов, так и ионов плазмы, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ – ленгмюровская частота плазмы.

Система уравнений (1) – (3) трансформируется согласно процедуре, представленной в [53] (см. также [44]) в два уравнения для медленно меняющейся амплитуды ВЧ поля E и плотности ионов n_i :

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \cdot n_i E + i \cdot \theta \cdot E = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2, \quad (5)$$

где скорость звука $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$, а амплитуду электрического поля представим в виде $E = \sum_n E_n \exp\{ik_n x\} = \sum_n E_n \exp\{ink_0 x\}$, где величина $k_n = nk_0$ определяет дискретный набор волновых чисел мод спектра. Эти уравнения известны как уравнения Захарова [11] в одномерном случае в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$.

Кинетическая (Власова–Пуассона) модель. Рассмотрим кинетическую модель (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения [37].

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau} + v_e \frac{\partial f_e}{\partial x} - [E(t) + E(x, t)] \frac{\partial f_e}{\partial v_e} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \tau} + \sqrt{\mu\alpha} \cdot v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sqrt{\mu/\alpha} \cdot [E(t) + E(x, t)] \frac{\partial f_i}{\partial v_i} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial \tau} = n_i - n_e, \quad (8)$$

где возмущенная плотность частиц $n_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} dv_\beta \cdot f_\beta(x, v_\beta, \tau)$, $\tau = \omega_{pe} t$, $\mu = m_e / m_i$, $\alpha = T_{i0} / T_{e0}$, координата нормирована на $\lambda_{de} = \sqrt{T_e / 4\pi e^2 n_0}$, скорости – на $v_{T\beta} = \sqrt{T_\beta / m_\beta}$. Данная модель может быть названа как кинетическая (Власова – Пуассона) модель [37].

Комбинированная модель Власова–Пуассона. Если описывать модуляционную неустойчивость с помощью кинетического уравнения для функции распределения электронов, а для ионов использовать гидродинамическое представление, то к уравнениям для возмущений плотности и скорости ионов

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} - \frac{\partial(n_i v_i)}{\partial \tau} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} - v_i \frac{\partial(v_i)}{\partial \tau} = \mu[E(t) + E(x, t)] \quad (10)$$

следует добавить уравнения для функции распределения электронов и уравнение Пуассона (6) и (8) [37]. В двух последних случаях авторы [37, 38] амплитуду E_0 интенсивной ленгмюровской волны $E(t) = E_0 \cos \omega_0 t$ (здесь волны накачки) полагали постоянной [37] или медленно затухающей [38], вследствие столкновительных механизмов поглощения энергии в плазме. Учет влияния спектра $E(x, t)$ неустойчивости на волну накачки не проводился.

Гибридная модель Захарова. Если ионы описывать крупными частицами, уравнения движения для которых имеют вид

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{m_i} \sum_n \bar{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\}, \quad (11)$$

то возмущения плотности ионов можно определить как

$$n_m = n_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_0, t)] \cdot dx_{s0}, \quad (12)$$

а напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля в виде

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \tilde{\phi}_n = -\frac{ik_0 m n T}{en_0} - \frac{ik_0 n e}{4m_e \omega_{pe}^2} (E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^*), \quad (13)$$

Для поля накачки, которой является длинноволновая ленгмюровская волна большой амплитуды, получим

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,-m} E_m = 0. \tag{14}$$

В этом случае уравнения (4), (11) - (14) описывают так называемую гибридную модель, где электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами [41] (см., также [44]).

Сравнение кинетических (Власова–Пуассона) моделей и гидродинамической модели Захарова [37]. Кинетическая модель (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения (6)-(8) рассматривалась для области $L \approx 105\lambda_{de}$, отношение начальной плотности энергии к тепловой энергии плазмы $W/n_0T_e \approx 3,125 \cdot 10^{-2}$, отношение масс электрона и иона $\mu = m_e/m_i = 1/1836$, количество позиций в реальном и фазовом пространстве – по 256. Гидродинамическая модель Захарова (4)-(5) применялась для тех же условий. Амплитуда длинноволнового поля (накачки) E_0 со временем не изменялась. Для наиболее корректного сравнения двух моделей был выбран случай неизотермической плазмы $\alpha = T_i/T_e = 0,1$. Ниже, на рис.1 показан профиль плотности энергии коротковолнового поля $|E(x,t)|^2$ (рис.1a) и плотности плазмы n_m (рис.1b).

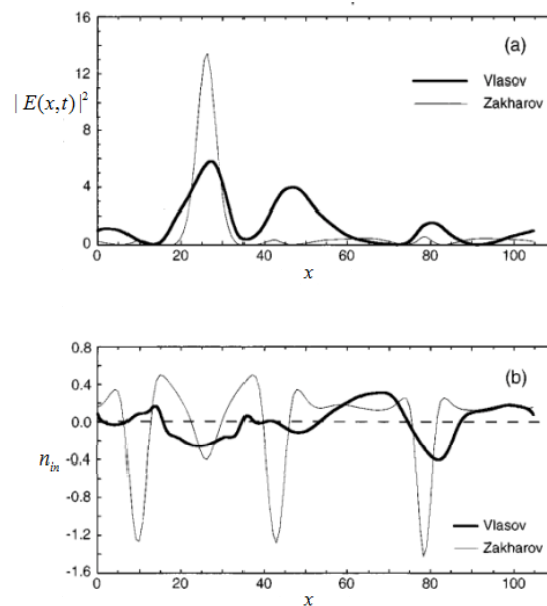


Рис.1. Профиль плотности энергии коротковолнового поля в пространстве $|E(x,t)|^2$ (a) и возмущений плотности плазмы n_m (b) в момент времени $t = 1600\omega_{pe}^{-1}$ для двух моделей [37].

Можно видеть, что учет кинетического затухания на частицах в модели Власова–Пуассона приводит к деформации каверны, максимальные значения плотности энергии коротковолнового поля и возмущения плотности плазмы при этом заметно меньше, чем в модели Захарова. Формирование каверны на начальной стадии нелинейного процесса в режиме постоянной накачки (который лишь в некоторой степени подобен эволюции начального состояния) обнаруживает отличия в формировании каверн плотности, форма которых в кинетической модели не соответствует структуре возмущений, характерных для модуляционной неустойчивости. Хотя в обоих случаях вытеснение ВЧ полем плазмы происходит в областях с пониженной плотностью. Это свидетельствует от том, что выбор начальных условий способен повлиять на развитие неустойчивости, которая может принимать характер несколько отличающийся от модуляционной. Причиной такого отличия в степени влияния кинетического поглощения энергии поля частицами, возникновение при этом групп быстрых частиц, что способно нарушить топологию каверн.

Если модифицировать модель Власова–Пуассона, сохранив представление электронов с помощью кинетического уравнения для функции распределения (6), а для ионов воспользоваться уравнениями квазигидродинамики (9), (10) и уравнением Пуассона (8), то поведение этой модели и гидродинамической модели Захарова в значительной степени становится подобным. Каверны плотности и характер распределения плотности коротковолнового спектра практически не отличаются, однако модифицированная модель Власова–Пуассона способна определить характеристики распределения электронов по скоростям, в частности их температуру, хотя не дает представления о распределении ионов по энергиям.

Отметим, что описания динамики процесса развития коротковолнового спектра и формирования каверн плотности в рамках моделей Власова–Пуассона и гидродинамической модели Захарова авторы [37,38] были не самосогласованными, то есть обратное влияние возбуждаемого спектра на волну накачки не было учтено. Тем не менее, подобные сравнения позволили обнаружить сильные и слабые стороны подходов, выявить

особенности развития процессов в условиях различных моделей.

Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Захарова. Обсудим две модели: традиционную гидродинамическую модель Захарова (4)-(5) и гибридную модель Захарова (4), (11)-(13). Уравнение для накачки (14) авторы заменили простой динамикой слабого затухания накачки. Для этого авторы [41] положили все параметры одинаковыми, отношение масс $\mu = 1/(16 \cdot 1836)$, плазма изотермическая, область рассмотрения $L = 1,8 \cdot 10^3 \lambda_{de}$, для гидродинамического описания использовано 600 мод спектра, для гибридного – 3000 позиций, то есть координатная область разбита именно на такое количество участков. Так же, как и в предыдущих работах [37-38], авторы [41] рассмотрели не самосогласованный случай постоянного или слабо меняющегося поля интенсивной ленгмюровской волны, влиянием на которую спектра возбуждаемых коротковолновых возмущений пренебрегалось. Однако, как и в предыдущем случае важным итогом такого сравнения является выявление отличий в динамике процесса, описываемого разными моделями.

Прежде всего, авторы [41] отметили значительно более быстрый рост возмущений в гибридной модели, который они пояснили большими значениями возмущений ионной плотности в выбранной ими координатной сетке. Интегральные показатели – энергия ВЧ коротковолнового спектра на начальной стадии модуляционной неустойчивости оказались подобны (рис.2).

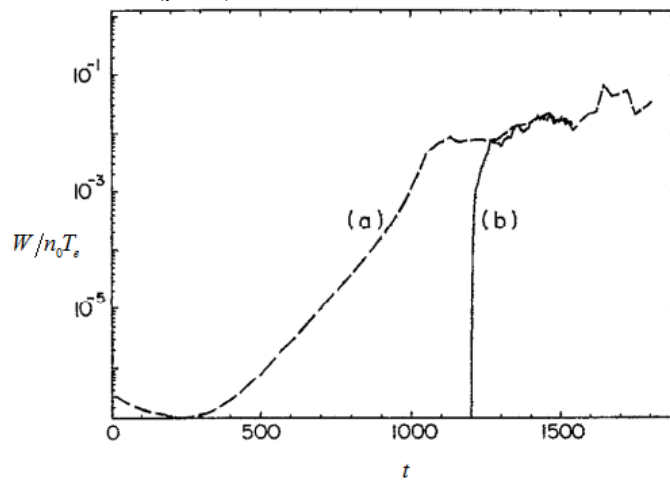


Рис.2. Отношение плотности энергии поля к плотности тепловой энергии электронов для случаев гидродинамической (а) и гибридной (б) моделей Захарова [41] (по оси ординат) от времени t .

На начальной стадии развитого режима процесса было обнаружено, что выполняется соотношение между относительными возмущениями плотности ионов $\delta n_{in} / n_0$ и плотностью энергии коротковолнового поля $|E|^2 = \sum_n |E_n|^2$ (рис. 3,4).

$$\delta n_{in} / n_0 \propto |E|^2 / 8. \quad (15)$$

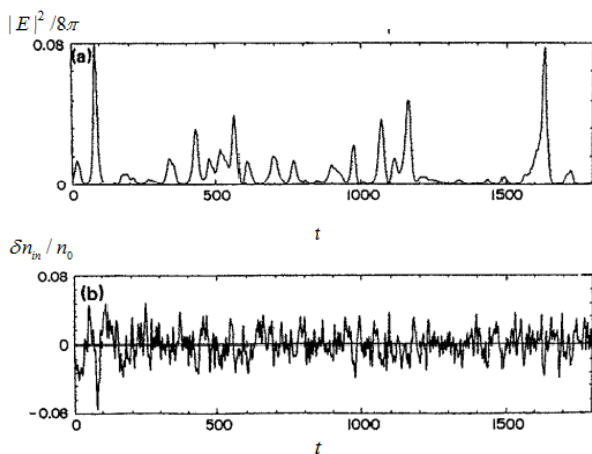


Рис.3. Огибающая ВЧ поля $|E|^2 / 8\pi$ (а) и относительные отклонения плотности ионов $\delta n_{in} / n_0$ (б) в гибридной модели (4), (11)-(13) в момент времени $340 \omega_{pe}^{-1}$ [41].

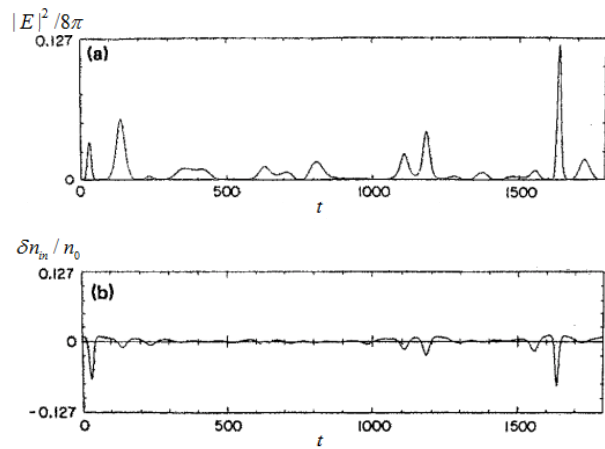


Рис.4. Огибающая ВЧ поля $|E|^2 / 8\pi$ (а) и относительные отклонения плотности ионов $\delta n_{in} / n_0$ (б) в гидродинамической модели (4)-(5) в момент времени $1363 \omega_{pe}^{-1}$ [41].

Здесь для удобства сравнения выбраны подобные режимы неустойчивости, которые характеризуются примерно равными максимальными амплитудами поля и возмущений плотности. Прежде всего, следует отметить заметно большее число каверн плотности плазмы, значительные флуктуации плотности ионов. Соответственно, количество солитонобразных возмущений плотности коротковолнового поля также больше в гибридной модели. Максимальная глубина каверн в гибридной модели всегда меньше, характерные размеры вдоль системы подобны. Оценки нагрева ионов в условиях постоянной величины или медленного изменения поля накачки вряд ли представляют интерес, ибо влияние коротковолнового спектра на накачку авторы не учитывали.

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНГМИЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

В случае большой интенсивности внешнего длинноволнового поля для холодной плазмы $W/n_0 T_e t$, следует воспользоваться подходом, изложенным в работах В.П. Силина [10]. Частицы находятся в поле внешней ленгмюровской волны большой амплитуды (длину которой для упрощений расчетов так же как в моделях Захарова, положим равной бесконечности), осциллируя со скоростью $u_{0\alpha} = -(e_\alpha |E_0| / m_\alpha \cdot \omega_0) \cdot \cos \phi = -\omega_0 b_0 \cdot \cos \phi$, где $b_0 = eE_0 / m_e \omega_0^2$ – амплитуда колебаний электронов в поле внешней ленгмюровской волны. Компоненты напряженности поля внешней ленгмюровской волны определяются следующим образом

$$E_0 = -i(|E_0| \exp\{i\omega_0 t + i\phi\} - |E_0| \exp\{-i\omega_0 t - i\phi\}) / 2, \quad (16)$$

здесь $\omega_0 \approx \omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$ – ес частота, e, m_e – заряд, масса электронов, $|E_0|, \phi$ – медленно меняющиеся амплитуда и фаза, n_0 и T_e – плотность и температура электронов плазмы. Из уравнений (1)–(3), исключая электрическое поле можно получить

$$\frac{\partial v_{\alpha n}}{\partial t} + \theta_{\alpha n} \cdot ik_0 n \cdot e_\alpha n_{\alpha 0} = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m v_{\alpha n-m} \cdot \theta_{\alpha m}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta_{\alpha n}}{\partial t} + \frac{4\pi e_\alpha i}{k_0 n \cdot m_\alpha} \sum_\beta v_{\beta n} \cdot \exp\{i(a_{\beta n} - a_{\alpha n}) \cdot \sin \Phi\} = -ik_0 \cdot \sum_m m \theta_{\alpha n-m} \cdot \theta_{\alpha m}. \quad (18)$$

где $v_{\alpha n} = e_\alpha \cdot n_{\alpha n} \cdot \exp\{-ia_{\alpha n} \cdot \sin \Phi\}$, $\theta_{\alpha n} = v_{\alpha n} \cdot \exp\{-ia_{\alpha n} \cdot \sin \Phi\}$, $a_{\alpha n} = ne_\alpha k_0 E_0 / m_\alpha \cdot \omega_0^2$, $\Phi = \omega_0 t + \phi$.

Далее, используя процедуры, которые подробно изложены, например, в [44], получим уравнения, описывающие нелинейную динамику процесса параметрической неустойчивости ленгмюровской волны большой амплитуды в холодной плазме.

Гидродинамическая модель Силина. Уравнение, описывающее электроны плазмы (электроны представлены как электронная жидкость) может быть записано как

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n + \theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{in}}{k_0 n} J_1(a_n) \cdot \exp(i\phi) - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{in-m} [E_{-m}^* J_2(a_{n-m}) e^{2i\phi} + E_m \cdot J_0(a_{n-m})] = 0, \quad (19)$$

где слагаемое $\theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n$ в уравнении (19) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причем

$n_M = 20$, $E_n = |E_n| \cdot \exp\{i\psi_n\}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда напряженности электрического поля плазменных электронных колебаний, волновое число которых равно $k_n = nk_0$, k_0 – выбранный достаточно малый масштаб в пространстве волновых чисел, $a_n = a \cdot n$, n, m – целые числа, не равные нулю и ± 1 , то есть $n(ek_0 E_0 / m_e \cdot \omega_0^2) = nk_0 b = a_n$.

Для ионов в гидродинамической модели справедливо выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_{in}}{\partial t^2} = & -\Omega_i^2 \{v_{in} [1 - J_0^2(a_n)] + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)\} + \frac{ik_0 n}{8\pi} J_1(a_n) [E_n \cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^* \cdot e^{i\phi}] - \\ & + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 en_0} \sum_m J_0(a_n) \cdot E_{n-m} \cdot E_{-m}^* + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m} \cdot E_m \cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* \cdot E_{-m}^* e^{2i\phi}], \end{aligned} \quad (20)$$

где $n_m = v_{in} / e$.

Уравнение, самосогласованно учитывающее обратное действие коротковолнового спектра на волну накачки, принимает вид

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_m^{(-)} \cdot J_2(a_m) \exp[2i\phi] + E_m^{(+)} \cdot J_0(a_m)], \quad (21)$$

как показано в [44], при $a_n \ll 1$ уравнения гидродинамической модели Силина (19) – (21) с учетом представления $J_1(a_n) \approx a_n / 2$, $J_0(a_n) \approx 1$, $J_2(a_n) \approx a_n^2 / 8$ совпадают с гидродинамической моделью Захарова в

сверхзвуковом пределе в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$, с точностью до величины расстройки $(\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0 \rightarrow (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2) / 2\omega_0$. Связь между возмущениями плотности (поведение которых представлено на рис. 5) и электрического поля определяется соотношением $E_n = 4\pi i e N_n / 2k_0 n$.

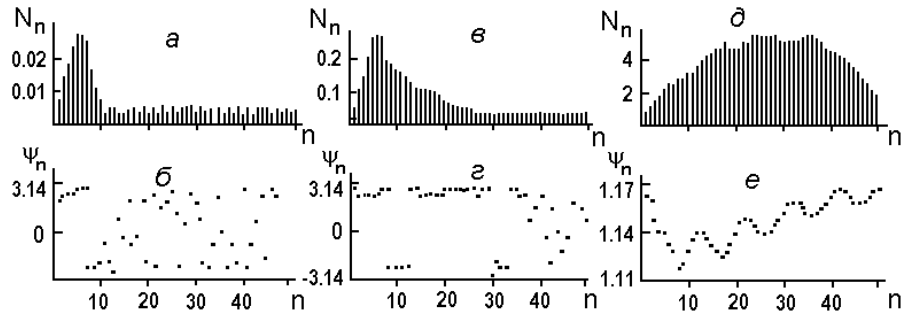


Рис.5. Процесс формирования волнового пакета ленгмюровских волн при неустойчивости.

Видны синхронизация фаз (верхние рисунки) и уширение спектра $N_n = N_n \exp(i\Psi_n)$ (нижние рисунки) для моментов времени $\tau = 4$ (а, б); $\tau = 7$ (в, з); $\tau = 8$ (д, е) [46].

Важно отметить, что в отличие от случая $W / n_0 T_e < 1$, быстрое расширение спектра возмущений в коротковолновую область обусловлено в значительной степени неустойчивостью волны накачки, что следует из рассмотрения линейного инкремента.

Действительно, расстройка $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\delta\omega_{pe}$ достигает величины $(m_e / 2M)^{1/3} J_1^{2/3}(a_{n_m})$, в случае максимального инкремента линейной неустойчивости, нормированного на частоту ленгмюровской волны [10]

$$\delta / \omega_{pe} = \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} J_1^{2/3}(a_n). \quad (22)$$

С уменьшением амплитуды волны накачки максимум инкремента смещается в сторону больших волновых чисел, не меняя своего значения. Кроме этого, волна накачки способствует синхронизации фаз растущих мод спектра, формируя тем самым пространственную структуру каверны (ямки плотностей электронов и ионов плазмы, формы которых, вообще говоря, не совпадают) и ВЧ наполнения. Решая систему уравнений (19)–(21), можно убедиться [46] в том, что энергия, заключенная в коротковолновом быстро уширяющемся в пространстве волновых чисел спектре ленгмюровских волн, возбуждаемых волной накачки, растет. Неустойчивость приводит к сужению линейных размеров каверны в конфигурационном пространстве, формированию достаточно резких перепадов плотности, «прокидывание» которых должно, вообще говоря, приводить к интенсивной передаче энергии спектра электронам плазмы. Однако, в рамках данной модели этот процесс описать не представляется возможным. Поведение ионной плотности также демонстрирует склонность к переходу к режиму с обострением.

Гибридная модель Силина. Уравнение для электронов (19) остается справедливым в данной модели. При описании ионов крупными частицами, уравнение движения можно представить в следующем виде

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{m_i} \sum_n \bar{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\}, \quad (23)$$

а плотность ионов определим как

$$n_{in} = v_{in} / e = n_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_0, t)] \cdot dx_{s0}. \quad (24)$$

Напряженность медленно меняющегося электрического поля \bar{E}_n , действующего на ионы, равна

$$\begin{aligned} \bar{E}_n = & \left(-\frac{4\pi i}{k_0 n} \right) v_{in} \left[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \frac{1}{2} J_1(a_n) [E_n \cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^* \cdot e^{i\phi}] - \\ & - \frac{ink_0}{16\pi e n_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m} \cdot E_{-m}^* - \frac{ik_0 J_2(a_n)}{16\pi e n_0} \sum_m (n-m) [E_{n-m} \cdot E_m \cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* \cdot E_{-m}^* \cdot e^{2i\phi}], \end{aligned} \quad (25)$$

Для $E_0 = |E_0| \cdot \exp\{i\phi\}$ также можно записать уравнение

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_{-m}^* \cdot J_2(a_m) e^{2i\phi} + E_m \cdot J_0(a_m)]. \quad (26)$$

Отметим, что величины, отвечающие разному знаку нижнего индекса при этом независимы. При выводе уравнений (22)–(26) [44], использовано разложение

$$\exp\{ia \cdot \sin \Phi\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \cdot \exp\{im\Phi\}, \quad (27)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя, причем $J_0(x) = J_0(-x)$, $J_1(x) = -J_1(-x) = J_{-1}(-x)$, $J_2(x) = J_{-2}(x) = J_2(-x)$.

При малых уровнях поглощения и малых начальных флуктуациях поведение волны накачки представлено на рис 6. Видно, что волна накачки и коротковолновый спектр в развитом режиме обмениваются энергией.

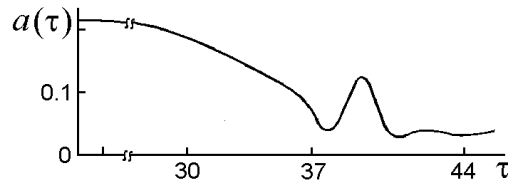


Рис.6. Амплитуда поля накачки $a(\tau)$ как функция времени τ в гибридной модели в случае слабого поглощения энергии коротковолновых колебаний [40].

Большая часть энергии поля накачки в результате неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра, затем можно наблюдать частичный обмен энергией между спектром и волной накачки и при $\tau > 40$ ионная каверна «схлопывается», то есть, переходит в режим пересечения траекторий частиц. Развитие неустойчивости в гибридных моделях (22)-(26) было рассмотрено в работах [39–40]. Основное внимание было уделено режимам сильного поглощения энергии коротковолнового спектра за счет затухания Ландау, которое было введено феноменологически. Темп затухания ВЧ мод определял скорость выгорания поля в кавернах плотности, откуда ВЧ поле вытесняло частицы. Основная энергия неустойчивости сначала была сосредоточена в ВЧ поле коротковолнового ленгмюровского спектра, при этом формировался НЧ спектр возмущений. Затем энергия ВЧ спектра в значительной степени передавалась электронам. Сформированные каверны плотности при этом «схлопывались», траектории ионов пересекались, возмущения ионной плотности сглаживались, их масштаб увеличивался. Связь между ионными возмущениями и ВЧ полем ослаблялась и неустойчивость насыщалась. Амплитуда основной волны, испытав несколько небольших осцилляций, стабилизировалась на достаточно низком уровне. Основная энергия теперь содержалась в возмущениях электронного компонента плазмы. Некоторая небольшая часть начальной энергии переходила в кинетическую энергию ионов. Оценка плотности энергии передаваемой ионам E_{kin} определялась выражением [40, 50, 51]

$$\frac{E_{kin}}{W_0} \approx 0,27 \cdot I \cdot \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \cdot \delta^2 / \omega_{pe}^2, \quad (28)$$

где W_0 – начальная плотность энергии интенсивной ленгмюровской волны, $I = \sum_s (d\xi_s/d\tau)^2$ – энергия ионов в соответствующей нормировке, δ – инкремент линейной неустойчивости.

Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Силина. Поведение спектра убеждает в том, что в области взаимодействия формируется каверна плотности, причем ее размеры быстро уменьшаются [46]. В дальнейшем при слабых уровнях поглощения энергии в системе неустойчивость переходит в режим частичного обмена энергией между возбужденным спектром модуляционной неустойчивости и волной накачки. Однако дальнейшее уменьшение размеров каверны, то есть возникающий в отсутствии электронного давления в холодной плазме коллапс приводит в гидродинамической модели к срыву счета. С другой стороны, инерция ионов, которая в гибридной модели учитывается естественным образом, позволяет избежать срыва счета, который наблюдается в гидродинамической модели при критическом уменьшении размеров каверны. Ионы, переходя в режим пересечения траекторий, разрушают каверну и неустойчивость насыщается. При этом можно выяснить характер распределения ионов по скоростям. Энергия, которую отбирают ионы, оказывается порядка $(m_e/m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [40]. Запасенная в коротковолновом ленгмюровском спектре энергия, скорее всего также должна быть в значительной степени передана электронам плазмы, причем для электронов переход в режим пересечения траекторий (в этом случае гидродинамические уравнения не применимы для описания электронов) может сдерживаться существованием ионной каверны, что способно синхронизировать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения.

СРАВНЕНИЕ ГИБРИДНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗАХАРОВА И СИЛИНА

Ниже обсудим эффективность передачи энергии ионам и ионным возмущениям в результате развития модуляционных неустойчивостей в случаях неизотермической горячей и холодной плазмы в рамках гибридных моделей. Для каждой модели рассмотрены также два случая легких и тяжелых ионов. Представляет интерес выяснить как влияет затухание ВЧ спектра и соответственно выгорание поля в кавернах плотности на характер передачи энергии ионам плазмы. Ниже приведены последние результаты авторов, полученные совместно с Приймаком А.В.

Количество крупных частиц, моделирующих ионы, было выбрано $0 < s \leq S = 20000$. Крупные частицы, равномерно распределены на интервале $-1/2 < \xi < 1/2$, $\xi = k_0 x / 2\pi$, начальные условия для частиц $d\xi_s / d\tau|_{\tau=0} = v_s|_{\tau=0} = 0$, число мод спектра $-N < n < N$, $N = S/100$. Начальная нормированная амплитуда интенсивных колебаний $a_0(0) = ek_0 E_0(0) / m_e \omega_{pe}^2 = 0,06$, Начальные амплитуды ВЧ мод задаются выражением $e_n|_{\tau=0} = e_{n0} = (2 + g) \cdot 10^{-3}$ в модели Силина и несколько меньшими только лишь для более четкого выделения начальной стадии процесса $e_n|_{\tau=0} = e_{n0} = (0,5 + g) \cdot 10^{-4}$ в модели Захарова, где $g \in [0;1]$ – случайное число, $ek_0 E_n / m_e \omega_{pe}^2 = e_n \cdot \exp(i\psi_n)$, $\psi_n|_{\tau=0}$ также случайным образом распределялись в интервале $0 \div 2\pi$. Для возмущений плотности ионов n_{ni} и медленно меняющегося электрического поля \bar{E}_n использованы также безразмерные представления $M_n = M_{nr} + iM_{ni} = n_{ni} \omega_{pe} / n_0 \delta = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(2\pi n \cdot \xi_s) \cdot d\xi_s$ и $ek_0 \bar{E}_n / m_e \omega_{pe}^2 = E_{nr} + iE_{ni}$. Параметры легких и тяжелых ионов в гибридных моделях Силина и Захарова представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры легких и тяжелых ионов в гибридных моделях Силина и Захарова

Модели /ионы	Легкие ионы	Тяжелые ионы
	$\frac{m_i}{m_e} = 2 \cdot 10^3$	$\frac{m_e}{m_i} = 8 \cdot 10^{-6}$
Гибридная модель Силина	$\frac{m_e \omega_{pe}^2}{m_i \delta^2} = 0,43$	$\frac{m_e \omega_{pe}^2}{m_i \delta^2} = 0,1$
	$\frac{\delta}{\omega_0} = 0,44 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} = 0,034$	$\frac{\delta}{\omega_0} = 0,44 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} = 0,0088$
	$\frac{\omega_0}{\delta} \approx \frac{\omega_{pe}}{\delta} = 29,4$	$\frac{\omega_0}{\delta} \approx \frac{\omega_{pe}}{\delta} = 113,6$
Гибридная модель Захарова	$\frac{m_e \omega_{pe}^2}{m_i \delta^2} = 2 \frac{n_0 T_e}{W} = 2 \cdot 10$	$\frac{m_e \omega_{pe}^2}{m_i \delta^2} = 2 \frac{n_0 T_e}{W} = 2 \cdot 10$
	$\frac{\omega_0}{\delta} = 2 \left(\frac{n_0 T_e}{W} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} = 282,6$	$\frac{\omega_0}{\delta} = 2 \left(\frac{n_0 T_e}{W} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} = 2234,4$
	$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_{pe}} = 3,5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_{pe}} = 4,5 \cdot 10^{-4}$

Для параметров, определяющих характер поглощения энергии ВЧ спектра $n_M = 20$ и $\Theta = \theta / \delta = 0,05$ энергия основной волны, энергия мелкомасштабного ленгмюровского спектра, энергия переданная электронам и ионам плазмы, нормированные на начальную энергию основной волны, представлены на рис.7.

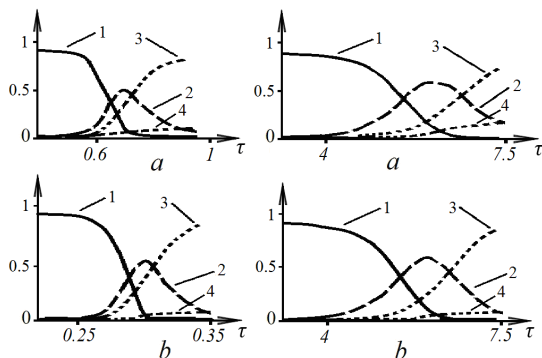


Рис.7. Относительные значения энергии основной волны (1), энергии мелкомасштабного ленгмюровского спектра (2), энергии переданной электронам (3) и ионам (4) плазмы для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (a) и тяжелых ионов (b).

Анализ результатов численного моделирования показывает, что энергия интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны переходит сначала в энергию ВЧ ленгмюровского коротковолнового спектра. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтенного в данных моделях феноменологически, выгорает. При этом передавая свою энергию электронам плазмы. Каверны в этих условиях «схлопываются», возбуждаются НЧ волны, траектории

ионов пересекаются и энергия «схлопнувшихся» каверн и НЧ спектра передается ионам.

Можно определить в конце численного моделирования среднеквадратическую скорость $\sigma(v) = \sqrt{\sum_s v_s^2 / S}$, при этом в модели Захарова для легких ионов получим $\sigma(v) = 0,015$, для тяжелых $\sigma(v) = 0,006$, в модели Силина для легких ионов $\sigma(v) = 0,002$, а для тяжелых $\sigma(v) = 0,0005$. Полная энергия частиц в выбранной нормировке $I = \sum_s (d\xi_s/d\tau)^2$ в модели Захарова для легких ионов равна 4,689, для тяжелых 0,808, в модели Силина для легких ионов 0,086, а для тяжелых 0,005. Различия в величинах полной энергии в разных моделях определяются разными значениями линейного инкремента, а для случаев легких и тяжелых ионов, выбором массы иона. Можно построить на основе значений среднеквадратичной скорости нормальное распределение, тогда частицы, которые находятся вне его (в основном в так называемых «хвостах функции распределения») в модели Захарова для легких ионов обладают 13,8% полной энергии, для тяжелых 9,2%, а в модели Силина заметно больше, то есть для легких ионов 25,6%, а для тяжелых 13%, соответственно. То есть, в случае неустойчивости интенсивной волны в холодной плазме можно ожидать существенно большей доли быстрых частиц.

Нас будет интересовать не только распределение ионов по энергиям, но и возбуждение коллективных ионных колебаний (рис.8) для чего определим частоту моды с волновым вектором nk_0 этих колебаний

$$\frac{d\Phi_n}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau} \frac{M_{nr}}{\sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2}} \bigg/ \frac{M_{ni}}{\sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2}}, \quad (29)$$

где фазы Φ_n НЧ мод спектра можно найти из выражения $M_n = M_{nr} + iM_{ni} = \sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2} \cdot \exp\{i\Phi_n\}$.

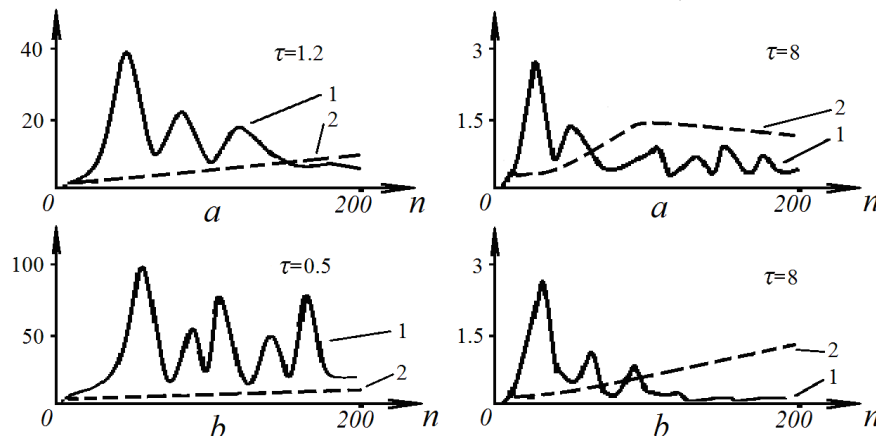


Рис.8. Амплитуда мод НЧ спектра и зависимость частоты от волнового числа мод для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (a) и тяжелых ионов (b) 1 – спектр M_n , 2 – сглаженная средняя $\partial\Phi_n / \partial\tau$ на развитой стадии неустойчивости.

Следует обратить внимание тот факт, что интенсивность НЧ спектра в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) достаточно велика в широком интервале волновых чисел, что соответствует спектру ионного звука после разрушения каверн плотности, обнаруженному в численных экспериментах [35]. Напротив, в холодной плазме в спектре доминируют длинноволновые колебания.

Для обеих моделей кинетическая энергия ионов в выбранной выше нормировке

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_{s0} \left(\frac{d\xi_s}{d\tau} \right)^2, \quad (30)$$

а энергии коллективных возбуждений для моделей Захарова и Силина имеют вид, соответственно

$$\frac{1}{8\pi^2} \frac{m_e}{m_i} \sum_n \frac{1}{n^2} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] |M_n|^2, \quad (31)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \frac{1}{n_M^2} \frac{\delta}{\omega_{pe}} \sum_n |M_n|^2, \quad (32)$$

причем в модели Захарова эти колебания носят названия ионно-звуковых. На рис. 9. показана динамика изменения энергии ионов и энергии НЧ поля от времени.

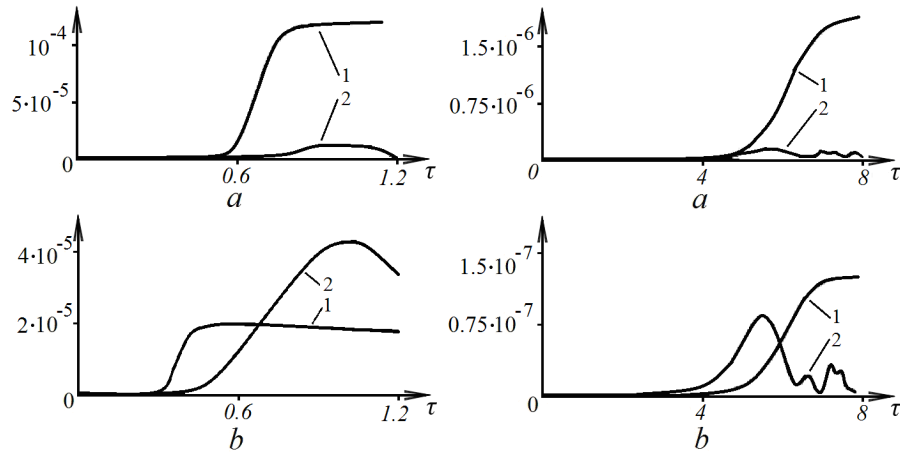


Рис.9 . Энергия ионов и НЧ поля для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (а) и тяжелых ионов (б) 1 – кинетическая энергия, 2 – энергия поля колебаний, умноженная на 70.

Стоит обратить внимание на тот факт, что энергия НЧ поля значительно меньше энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам а также из-за разрушения каверн плотности плазмы, на что было указано в работе [35].

Выбранный темп выгорания ВЧ поля в кавернах определяется величиной $\Theta = \theta / \delta = 0,05$. Представляет интерес выяснить, как зависят результаты расчетов от этого параметра. Очевидно, уменьшение этого параметра не только замедляет выгорание ВЧ поля в кавернах, но и уширяет спектр ВЧ мод, то есть увеличивает долю мелкомасштабных его компонент, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и к увеличению кинетической энергии выгалаживаемых из каверн ионов. Отметим, что с уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме все ближе приближается к нормальному распределению, то есть к функции Максвелла.

В таблице 2 показана степень отличия распределения по скоростям, полученного численным моделированием от наиболее близкого по форме нормального распределения по скоростям, отвечающие рис. 10.

Таблица 2.

Отличия расчетного распределения скоростей от нормального распределения.

Модель / уровень поглощения	Отличие распределения по скоростям модели Захарова от нормального распределения	Отличие распределения по скоростям модели Силина от нормального распределения
$\Theta = 0,05$	19,9 %	13 %
$\Theta = 0,015$	9,9 %	13,4 %
$\Theta = 0,001$	6,9 %	8,8 %

Максимальное значение энергии ионно-звуковых колебаний при уменьшении поглощения ВЧ поля для неизотермической плазмы практически не изменяется, но формирование НЧ спектра ускоряется. В холодной плазме напротив заметно растет интенсивность длинноволновых НЧ колебаний при уменьшении поглощения ВЧ мод. В дальнейшем НЧ спектр подавляется, передавая свою энергию ионам.

Как и следовало ожидать с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, растет практически в той же пропорции в неизотермической и в холодной плазме.

Отметим в заключении, что масштабы возмущений ионной плотности меньше дебаевского радиуса ионов $r_{Di} = v_{Ti} / \omega_{pi}$ не дают вклада в формирование низкочастотных электрических полей из-за эффекта экранировки. В терминах $r_{Di} k_0 / 2\pi$ – ионный дебаевский радиус можно оценить [54]

$$r_{Di} k_0 / 2\pi = R_{Di} \propto \left\langle \frac{v_i k_0}{2\pi \gamma_L} \right\rangle > \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \right) \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} = \left\langle v_s \right\rangle > \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \right) \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (32)$$

В режиме развитой неустойчивости эта величина оказывается порядка $R_{Di} \leq 10^{-3}$, а число мод спектра ионной плотности не превышает величины $1 / R_{Di}$, что не противоречит проведенному анализу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если плотность энергии интенсивной ленгмюровской волны заметно меньше плотности тепловой энергии плазмы, развитие модуляционной неустойчивости соответствует модели, описанной В.Е. Захаровым. Сравнение кинетических моделей описывающих поведение электронов и ионов с помощью кинетических

уравнений для функций распределения с гидродинамической моделью Захарова показало высокую чувствительность формирования каверн к процессам передачи энергии поля частицам. Отмечено, что кинетическое затухание поля на частицах способно искажать процесс модуляционной неустойчивости, возможно приводя к иным последствиям, в частности к появлению групп быстрых частиц и преждевременному разрушению каверн плотности. С другой стороны, представление электронов с помощью кинетического уравнения для функции распределения, а для ионов – с применением гидродинамических уравнений лучше описывает формирование каверн и, кроме того, позволяет выяснить характер передачи энергии ионам. К сожалению, проведя корректное сравнение, авторы [37, 38] не учли обратное влияние коротковолнового спектра на накачку, роль которой отводилась длинноволновой интенсивной ленгмюровской волне. Сравнение двух моделей Захарова гибридной и гидродинамической при одинаковых значениях параметров и одинаковых начальных условиях [41] показало, что количество каверн в гибридной модели оказалось заметно больше и они менее глубокие, чем в модели Захарова, причем интегральные показатели обеих моделей практически одинаковы. Недостатком работы этих авторов также является несамосогласованное описание, то есть отсутствие учета возбуждаемого спектра на волну накачки.

Если плотность энергии поля заметно превосходит плотность тепловой энергии плазмы, развитие модуляционной неустойчивости по крайней мере на начальной стадии процесса происходит по сценариям, представленным В.П. Силиным [10, 21]. Даже в одномерном численном моделировании процесса на базе обобщенных в работах [45, 46] гидродинамических уравнений Силина развивалась модуляционная неустойчивость и происходил частичный обмен энергией между ее коротковолновым спектром и интенсивной волной накачки. В гибридной модели Силина (электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами) можно было наблюдать физический коллапс [40], обусловленный не только неравновесным начальным состоянием каверн (из-за нарушения баланса между ВЧ давлением и давлением плазмы) и эффектом выгорания поля, но и учетом инерции ионов. При этом ионная каверна «схлопывалась», то есть, переходила в режим пересечения траекторий частиц.

Рассмотрение процессов параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в условиях применимости уравнений Захарова и уравнений Силина обычно рассматривалось теоретиками отдельно, хотя эксперименты часто не разделяли эти процессы. Поэтому было проведено сравнение этих моделей именно в отношении эффективности нагрева ионов и степени передачи энергии коллективным ионным движениям.

Анализ результатов численного моделирования показал, что в результате неустойчивости интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны возбуждается ВЧ ленгмюровский коротковолновый спектр и коротковолновый НЧ спектр. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтенного в данных моделях феноменологически, выгорает, передавая свою энергию электронам плазмы. Каверны в этих условиях «схлопываются», возбуждаются собственные НЧ волны (ионный звук), траектории ионов пересекаются и энергия «схлопнувшихся» каверн и НЧ спектра передается ионам. Ранее отмечалось [50, 51], что в горячей плазме доля энергии поля, которая передается ионам, пропорциональна отношению энергии поля к тепловой энергии плазмы. В холодной плазме, доля энергии поля, которая передается ионам, порядка отношения инкремента к частоте, или, что практически то же самое, пропорциональна кубическому корню из отношения масс электрона к иону. В случае тяжелых ионов энергия, переданная ионному компоненту, заметно меньше чем для случая легких ионов. Причем, доля энергии, переданная ионам в случае холодной плазмы обратно пропорциональна кубическому корню из массы ионов, а в случае горячей плазмы с ростом массы ионов падение доли энергии, переданной ионам оказывается несколько большим [51, 53]. Распределение ионов по энергиям в гибридной модели Силина характеризуется наличием большой доли быстрых частиц.

Интенсивность НЧ спектра (ионно-звуковые волны) в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) одного порядка в широком интервале волновых чисел. В холодной плазме (модель Силина) в НЧ спектре доминируют длинноволновые колебания. Причем энергия НЧ поля оказывается значительно меньше конечной энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии НЧ поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам.

Уменьшение уровня поглощения ВЧ поля соответствует замедлению выгорания ВЧ поля в кавернах и уширяет спектр ВЧ мод, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов. Отметим, что с уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме все ближе приближается к нормальному распределению, то есть к функции Максвелла. Максимальное значение энергии ионно-звуковых колебаний при уменьшении поглощения ВЧ поля для неизотермической плазмы практически не меняется, но формирование НЧ спектра ускоряется. В холодной плазме, где велика интенсивность именно длинноволновых НЧ колебаний, причем она увеличивается при уменьшении уровня поглощения ВЧ мод. Важно отметить, что с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, возрастает.

Авторы выражают свою благодарность проф. Карасю В.И. за полезные замечания.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Silin V.P., Ruhadze A.A. Elektromagnitnye svoystva plazmy i plazmopodobnyh sred. – M.: Atomizdat, 1961. – 244s.
2. Basov N.G., Krohin O.N. Usloviya razogreva plazmy izlucheniem opticheskogo generatora // ZhJeTF. – 1964. – T.46. – Vyp.1. – S.171–175.
3. Dawson J.M. On the production of plasma by giant pulse lasers // Phys. Fluids. – 1964. – Vol.7. – No.7. – P.981–987.
4. Pashinin P.P., Prohorov A.M. Poluchenie vysokotemperaturnoj plotnoj plazmy pri lazernom nagreve special'noj gazovoj misheni. // ZhJeTF. – 1971. – T.60. – Vyp.5. – C.1630–1636.
5. Fajnberg Ja.B. Plazmennaja elektronika // Ukrainskij fizicheskij zhurnal. – 1978. – T. 23. – No. 11. – S. 1885.; Fajnberg Ja.B. Nekotorye voprosy plazmennoj elektroniki // Fizika plazmy. – 1985. – T. 11. – No. 11. – S. 1398-1410.
6. Kuzelev M.V., Ruhadze A.A. Elektrodinamika plotnyh elektronnyh puchkov v plazme. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.–mat. lit., 1990.– 336s.
7. Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Vzaimodejstvie volna-chastica v neravnovesnyh sredah // Izv. vuzov. Radiofizika. – 1976. – T. 19. – No. 5-6. – S. 787-791.
8. Kondratenko A.N., Kuklin V.M. Osnovy plazmennoj elektroniki. – M.: Energoatomizdat, 1988. – 320s.
9. Buc V.A., Lebedev A.N. Kogerentnoe izluchenie intensivnyh elektronnyh puchkov. – M. Izd. FIAN RAN, 2006. – 333 s.
10. Silin V.P. Parametricheskij rezonans v plazme // ZhETF. – 1965. – T. 48. – S. 1679.
11. Zaharov V.E. O spektre slaboj turbulentsnosti v plazme bez magnitnogo polja // ZhETF. – 1966. – T. 51. – S. 688.
12. Krueer W.L. et al. Anomalous high-frequency resistivity and heating of a plasma // Physical Review Letters. – 1970. – Vol. 24. – No. 18. – P. 987.
13. Aliev Ju.M., Silin V.P. Teorija kolebanij plazmy, nahodjashhejsja v vysokochastotnom elektricheskom pole // ZhETF. – 1965. – T. 48. – No. 3. – S. 901-912.
14. Gorbunov L.M., Silin V.P. O neustojchivosti plazmy v sil'nom VCh-pole // ZhETF. – 1965. – T. 49. – S. 1973-1982.
15. Silin V.P. Anomal'naja nelinejnaja dissipacija SVCh voln v plazme // Uspehi fizicheskikh nauk. – 1971. – T. 104. – No. 8. – S. 677-678.
16. Krueer W.L. Heating of underdense plasmas by intense lasers. – Princeton Univ., NJ (USA). Plasma Physics Lab, 1972.
17. Ivanov A.A., Nikulin M.G. Nelinejnoe vzaimodejstvie lengmjurovskih voln bol'shoj amplitudy v besstolknovitel'noj plazme // ZhETF. – 1973. – T. 65. – No. 1. – S. 168–174.
18. Kim H.C., Stenzel R.L., Wong A.Y. Development of "Cavitons" and Trapping of rf Field // Physical Review Letters. – 1974. – VOL. 33. – No. 15. – P. 886.
19. Vyacheslavov L.N. et al. Spectra of developed Langmuir turbulence in a nonisothermal magnetized plasma // Physics of Plasmas (1994-present). – 1995. – Vol. 2. – No. 6. – P. 2224-2230.
20. McFarland M.D., Wong A.Y. Spectral content of strong Langmuir turbulence in the beam plasma interaction // Physics of Plasmas (1994-present). – 1997. – Vol. 4. – No. 4. – P. 945-955.
21. Andreev I.E., Silin V.P., Stenichikov G.L. O nasyshhenii parametricheskoi neustojchivosti plazmy v sil'nom elektromagnitnom pole // Fiz. plazmy. – 1977. – T. 3. – S. 1088-1096.
22. Kovrizhnyh L.M. Moduljacionnaja neustojchivost' i nelinejnye volny v holodnoj plazme // Fizika plazmy. – 1977. – T.3. – Vyp.5. – S. 1097–1105.
23. Buchel'nikova N.S., Matochkin E.P. Neustojchivost' i zatuhanie odnomernykh lengmjurovskih voln // AN SSSR, In-t. jadernoj fiziki – Preprint No. 79–115. – 1979. – S. 20.
24. Antipov S.V., Nezlin M.V., Snezhkin E.N., Trubnikov A.S. Vozbuzhdenie lengmjurovskih solitonov monoenergeticheskim elektronnyim puchkom // ZhETF. – 1979. – T. 76. – S. 1571.
25. Sagdeev R.Z., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Dissipacija moshhnoj elektromagnitnoj volny v neodnorodnoj plazme i «sverhsil'naja» plazmennaja turbulentnost' // Fizika plazmy. – 1980. – T.6. – S. 377.
26. Wong A.Y., Cheung P.Y. Three-Dimensional Self-Collapse of Langmuir Waves // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 52 – P.1222.
27. Cheung P.Y., Wong A.Y. Nonlinear evolution of electron electron-beam-plasma interaction // Phys. Fluids. – 1985. – Vol. 28. – P. 1538.
28. Karfidov D.M., Rubenchik A.M., Sergejchev K.F., Sychev I.A. Sil'naja lengmjurovskaja turbulentnost', vozbuhdajemaja v plazme elektronnyim puchkom // ZhETF. – 1990. – T. 98. – S. 1592.
29. Zaharov B.E., Pushkarev A.H., Rubenchik A.M., Sagdeev R.Z., Shvec V.F. Kinetika trehmernogo lengmjurovskogo kollapsa // ZhETF. – 1989. – T. 96 – S. 591.
30. Dawson J.M. Some Investigations of Plasma Instabilities in One-Dimensional Plasmas. – Princeton, N.J.: Princeton University, Plasma Physics Laboratory, 1962. – P. 45.
31. Mei-Mei Shen, Nicholson D.R. Numerical comparison of strong Langmuir turbulence model // Phys. Fluids. – 1987. – Vol.30. – No.4. – P. 1096–1103.
32. Degtjarev L.M., Sagdeev R.Z., Solov'ev G.I., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Odnomernaja turbulentnost' lengmjurovskih voln // Fizika plazmy. – 1980. – No.6. – C. 485–508.
33. Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Sigov Ju.S., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Nelinejnaja teorija moduljacionnoj neustojchivosti lengmjurovskih voln // Fizika plazmy. – 1975. – T.1. – No.1. – S.10–20.
34. Sigov Ju.S., Hodyrev Ju.V. Odnomernyj kvazikollaps lengmjurovskih voln pri parametricheskom vozdejstvii na plazmu // DAN SSSR. – 1976. – T. 229. – S.833–836.
35. Sigov Yu.S., Zakharov V.E. Strong turbulence and its computer simulation // J. de Physique. – 1979. – Vol.40. – No. C7. – P.63–79.
36. Robinson P.A., De Oliveira G.I. Effect of ambient density fluctuations on Langmuir wave collapse and strong turbulence // Physics of Plasmas (1994-present). – 1999. – Vol. 6. – No. 8. – P. 3057-3065.
37. Wang J.G. et al. One - dimensional simulations of Langmuir collapse in a radiation - driven plasma // Physics of Plasmas (1994-present). – 1994. – Vol. 1. – No. 8. – P. 2531-2546.
38. Wang J.G. et al. Comparison of Zakharov simulation and open boundary Vlasov simulation of strong Langmuir turbulence //

- Physics of Plasmas (1994-present). – 1996. – Vol. 3. – No. 1. – P. 111-121.
39. Kuklin V.M., Panchenko I.P., Sevidov S.M. Neustojchivost' intensivnoj lengmjurovskoj volny v holodnoj plazme. // Radiotekhnika i elektronika. – 1988. – T.33. – Vyp.10. – S. 2135–2140.
 40. Chernousenko V.V., Kuklin.V.M., Panchenko I.P. The structure in nonequilibrium media // In book: Acad. Nauk USSR, ITP, Nauk. Dumka: The integrability and kinetic equations for solitons. – 1990. – P. 472.
 41. Clark K.L., Payne G.L., Nicholson D.R. A hybrid Zakharov particle simulation of ionospheric heating // Phys. Fluids B. - 1992. – Vol. 4. – No. 3.– P.708–718.
 42. D'jachenko A.I., Zaharov V.E., Rubenchik A.M., Sagdeev R.Z., Shvec V.F. Dvumernyj lengmjurovskij kollaps i dvumernye lengmjurovskie solitony // Pis'ma v ZhETF. – T.44. – Vyp. 11. – S. 504–507.
 43. Henri P. et al. Low-energy Langmuir cavitons: Asymptotic limit of weak turbulence // EPL (Europhysics Letters). – 2011. – Vol. 96. – No. 5. – S. 55004.
 44. Kuklin V.M. Similarity of 1D Parametric Instability Description of Langmuir Waves // The Journal of Kharkiv National University, Physical Series: Nuclei, Particles, Fields. – 2013. – No.1041. – Iss.2 (58). – P.20–32.
 45. Kuklin V.M. Instability of intensive longitudinal oscillations and structures in plasma // Proc. Contr. Papers. Int. Conf. on Plasma Physics, Kiev, Apr. 6–12. – 1987. – Vol.4. – P. 101–104.
 46. Kuklin V.M. Sevidov S.M. K nelinejnoj teorii ustojchivosti intensivnyh kolebanij holodnoj plazmy // Fizika plazmy. – 1988. – T.14. – Vyp. 10. – S. 1180–1185.
 47. Koch P., Albritton J. Electron and ion heating through resonant plasma oscillations // Physical Review Letters. – 1974. – Vol. 32. – No. 25. – P. 1420.
 48. Bulanov S.V., Sasorov P.V. Ob uskorenii ionov na nelinejnoj stadii bunemanovskoj neustojchivosti // Fizika plazmy. – 1986. – T.12. – No. 1. – S. 54-56.
 49. Batanov G.M. i dr. Lengmjurovskie volny bol'shoj amplitudy i uskorenie chastic v plazmennoj korone SVCh-razrjada // Fizika plazmy. – 1986. – T. 12. – No. 5. – S. 552-562.
 50. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M., Pryjmak A.V., Zagorodny A.G.. Dynamics of ions during development of parametric instability of Langmuir waves // VANT, Series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration”. – 2013. – No.4 (86). – Iss. 8. – P. 260–266.
 51. Zagorodnij A.G., Kirichok A.V., Kuklin V.M., Prijmak A.V. Osobennosti nagreva ionov pri razvitii neustojchivosti intensivnyh lengmjurovskih kolebanij v plazme // Fizicheskie osnovy priborostroenija. – 2014. – T.3. – No.1. – S. 58-69.
 52. Kuznetsov E.A. On averaged description of Langmuir waves in plasma // Sov. Plasma Physics. – 1976. – Vol. 2. – No.2. – P. 327–333.
 53. Kirichok A.V., Kuklin V.M., Pryjmak A.V., Zagorodny A.G. Kinetics of ions during the development of parametric instability of intensive Langmuir waves in plasma // arXiv preprint arXiv: 1411.3011. – 2014.