Електронне наукове фахове видання "Ефективна економіка" включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Наказ Міністерства освіти і науки України від 29.12.2014 № 1528)

Ефективна ЕКОНОМІКА

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет

№ 6, 2013 Назад Головна

УДК 330.356

О. І. Ляшенко,
д. е. н., доцент, професор кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ СОЛОУ-СВЕНА З НЕЙТРАЛЬНИМ, КАПІТАЛОІНТЕНСИВНИМ ТА ТРУДОІНТЕНСИВНИМ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОГРЕСОМ

O. I. Liashenko,
Doctor of Economics, Docent, Professor of Economic Cybernetics Department,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

SOLOW-SVEN MODEL OF ECONOMIC GROWTH WITH NEUTRAL, CAPITAL INTENSIVE AND LABOR INTENSIVE TECHNOLOGICAL PROGRESS

В даній роботі проведена модифікація моделі економічного зростання Солоу-Свена шляхом відмови від гіпотези про сталість норми збереження. Розглянуто загальний випадок описання в моделі екзогенного технологічного прогресу у вигляді нейтрального, капіталоінтенсивного та трудоінтенсивного. Показано, що при спеціальному виборі змінної в часі норми збереження існує стаціонарний стан траєкторії ефективної капіталоозброжності. При прямуванні до цього стану норма збереження прямує до нуля, а економіка підтримує себе за рахунок зростаючого нейтрального та капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

The paper presents a modification of Solow-Sven model of economic growth, that is to abandon the hypothesis of constancy preservation norms. Analyzed the case where the model neutral, capital intensive and labor intensive technological progress are present. It is shown that for a special choice of the variable there is a normal steady state capital-efficient trajectory/ In this condition the norm tends to zero as the economy maintains itself by growing neutral and capital intensive neutral technological progress.

Ключові слова: *модель економічного зростання Солоу-Свена, нейтральний, капіталоінтенсивний та трудоінтенсивний екзогенний технологічний прогрес, неокласична виробнича функція, стаціонарний стан економічного зростання, перехідна динаміка.*

Keywords: *Solow-Sven model of economic growth, capital intensive and labor intensive exogenous technological progress, neoclassical production function, steady state of economic development, transitional dynamics.*

Вступ. Макромоделі економічного зростання досліджуються ще з 30-х років минулого століття і в даний час одержують своє «друге дихання» [1]. Добре відомі і детально вивчені моделі Харрода-Домара, Філіпса, Хікса, Самуельсона, Рамсея, Солоу-Свена, Касса-Купманса, Ромера, Лукаса та інших авторів. Модель, що розглядається і модифікуємо в даній роботі, побудована Р.Солоу [2] та Т.Свеном [3].

З метою створення гранично простої моделі економіки загальної рівноваги Р.Солоу та Т.Свен використали неокласичну виробничу функцію та стандартне припущенням про сталість норми збереження. Найголовнішим результатом цієї моделі стало те, що при відсутності тривалих технологічних покращень зростання випуску та споживання на душу населення з часом асимптотично зупиняється. Цей модельний дефект, як правило, виправляють шляхом включення в модель екзогенного технологічного прогресу. При цьому в моделі це враховується введенням замість трудових ресурсів $L(t)$ ефективної праці $\tilde{L}(t) = e^{xt}L(t)$, де $x = const > 0$ – заданий темп трудоінтенсивного технологічного прогресу. Тоді вдається знайти стаціонарний розв'язок та дослідити перехідну динаміку.

Мета даної роботи – дослідити модифікацію моделі Солоу-Свена, що додатково до трудоінтенсивного враховує ще капіталоінтенсивний технологічний прогрес шляхом введення замість капітальних ресурсів $K(t)$ ефективного капіталу $\tilde{K}(t) = e^{zt}K(t)$, де $z = const > 0$ – заданий темп капіталоінтенсивного технологічного прогресу, а також враховує нейтральний технологічний прогрес шляхом введення до випуску продукції автономного множника $e^{\pi t}$, де $\pi = const > 0$ - заданий темп нейтрального технологічного прогресу.

Неокласична виробнича функція. Обсяги випуску Y визначаються агрегованою виробничою функцією, яка характеризує технічно ефективні можливості виробництва в залежності від обсягів капіталу та витрат праці: $Y = F(K, L)$ [4]. Виробнича функція називається неокласичною, якщо вона має такі властивості:

1. Стала ефективність із зростанням виробництва:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{ для всіх } \lambda > 0;$$

2. Додатна та зменшуюча віддача ресурсів:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0;$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0;$$

3. Умови Інади [4]:

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L} = \infty; \quad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L} = 0;$$

4. Істотність:

$$F(0,L)=F(K,0)=0.$$

З перших трьох властивостей випливає, що випуск прямує до нескінченності при прямуванні будь-якого з ресурсів до нескінченності [1].

У неокласичній виробничій функції можна перейти до змінних на душу населення:

$$Y=F(K,L)=LF\left(\frac{K}{L},1\right)=Lf(k),$$

де $k=\frac{K}{L}$ – капітал на одного працівника, $y=\frac{Y}{L}$ - випуск на одного працівника, а функція $f(k)=F(k,1)$. Таким чином, неокласична виробнича функція може бути записана в інтенсивній формі

$$y=f(k).$$

Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=f'(k), \quad \frac{\partial Y}{\partial L}=f(k)-kf'(k),$$
$$\lim_{k\to 0}f'(k)=\infty, \quad \lim_{k\to\infty}f'(k)=0.$$

У конкурентній економіці капітал і праця оплачуються своїми граничними продуктами, тобто граничний продукт капіталу дорівнює ціні оренди *R*, а граничний продукт праці дорівнює ставці заробітної плати ω. Отже,

$$R=f'(k), \quad \omega=f(k)-kf'(k).$$

<u>Модель Солоу-Свена з екзогенним технологічним прогресом.</u> Припустимо, що виробнича функція включає в себе екзогенний технологічний прогрес в нейтральній, капіталоінтенсивній та трудоінтенсивній формах [1]:

$$Y(t)=e^{\pi t}F\left(e^{zt}K(t),e^{xt}L(t)\right), \qquad (1)$$

де $\pi=const>0$, $z=const>0$, $x=const>0$ - задані темпи нейтрального, капіталоінтенсивного та трудоінтенсивного технологічного прогресу.

Тоді зміни в основних фондах протягом часу описуються диференціальним рівнянням

$$\dot K=se^{\pi t}F\left(e^{zt}K,e^{xt}L\right)-\delta K, \qquad (2)$$

де s – норма збереження, $0<s<1$, а $\delta=const>0$ - темп вибуття капіталу.

Будемо вважати, що населення $L(t)$ зростає зі сталим екзогенним темпом приросту $\dot L/L=n\geq 0$. Пронормуємо число людей в момент $t=0$ до одиниці. Тоді населення (робоча сила) в момент часу t описується співвідношенням

$$L(t)=e^{nt}. \qquad (3)$$

Позначимо

$$e^{-\pi t}Y=\tilde Y, \; e^{zt}K=\tilde K, \quad e^{xt}L=\tilde L, \qquad (4)$$

де $\tilde Y$ - ефективний обсяг випуску, $\tilde K$ – ефективний обсяг капіталу, $\tilde L$ - ефективний обсяг праці.

Поділимо обидві частини співвідношення (1) на $e^{\pi t}\tilde L$ і одержимо виробничу функцію (1) в інтенсивній формі

$$\frac{\tilde Y}{\tilde L}=F\left(\frac{\tilde K}{\tilde L},1\right)=f\left(\frac{\tilde K}{\tilde L}\right), \qquad (5)$$

де всі величини

$$\tilde y=\frac{Y}{\tilde L}, \quad \tilde k=\frac{\tilde K}{\tilde L} \qquad (6)$$

виражені в розрахунку на одиницю ефективного обсягу праці. Тоді обсяг випуску на одиницю ефективної праці представиться у вигляді

$$\tilde y=f\left(\tilde k\right). \qquad (7)$$

Наша подальша мета – перейти в рівнянні зростання основних фондів (2) до нової основної змінної $\tilde k(t)$. Після ділення обох частин рівняння (2) на $\tilde L$ одержимо співвідношення

$$\frac{\dot K}{\tilde L}=se^{\pi t}f\left(\tilde k\right)-\delta e^{-zt}\tilde k. \qquad (8)$$

Оскільки

$$\dot{\tilde k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde K}{\tilde L}\right)=\frac{\dot{\tilde K}}{\tilde L}-\frac{\tilde K\dot{\tilde L}}{\tilde L^2}=\frac{1}{\tilde L}\frac{d}{dt}\left(e^{zt}K\right)-\frac{\tilde K}{\tilde L^2}\frac{d}{dt}\left(e^{xt}L\right)=e^{zt}\frac{\dot K}{\tilde L}-(n+x-z)\tilde k,$$

то з урахуванням співвідношення (8) одержуємо шукане рівняння

$$\dot{\tilde k}=se^{(\pi+z)t}f\left(\tilde k\right)-(\delta+n+x-z)\tilde k. \qquad (9)$$

Введемо до розгляду ефективну норму збереження $\tilde s$ згідно правила

$$s=\tilde s e^{-(\pi+z)t}, \quad \tilde s=const. \qquad (10)$$

При цьому оскільки $\tilde s=s(0)$, то $0<\tilde s<1$ – відома стала.

Тоді замість (9) одержимо диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами

$$\dot{\tilde k}=\tilde s f\left(\tilde k\right)-(\delta+n+x-z)\tilde k. \qquad (11)$$

Звернемо увагу: щоб отримати рівняння (11), довелося відмовитись від класичної гіпотези моделі Солоу-Свена про сталість в часі норми збереження. Саме в цьому і полягає пропонована модифікація моделі Солоу-Свена.

Член $\delta+n+x-z$ в правій частині рівняння (11) є ефективною нормою амортизації питомої величини $\tilde k=\tilde K/\tilde L$. Якби норма збереження була нульовою, то $\tilde k$ зменшувалась би частково в зв'язку з вибуттям $\tilde K$ з темпом $\delta-z$, частково в зв'язку із зростанням $\tilde L$ з темпом $n+x$.

<u>Перехідна динаміка.</u> Аналіз поведінки отриманої моделі в часі проведемо в два етапи [1]. Спочатку розглянемо довгостроковий розвиток або *стаціонарний стан*, а потім опишемо короткострокову поведінку або *перехідну динаміку*. В моделі Солоу-Свена стаціонарний стан відповідає $\dot{\tilde k}=0$ в рівнянні (11), тобто перетин кривої $\tilde s f\left(\tilde k\right)$ з прямою $(\delta+n+x-z)\tilde k$. Відповідне значення $\tilde k$ позначимо $\tilde k^*$. Очевидно, $\tilde k^*$ задовольняє умові

$$\tilde s f\left(\tilde k^*\right)=(\delta+n+x-z)\tilde k^*, \quad \tilde k^*>0. \qquad (12)$$

Поділимо обидві частини рівняння (11) на $\tilde k$. Одержимо в правій частині диференціального рівняння

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = s\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - (\delta+n+x-z) \tag{13}$$

вираз у вигляді різниці двох членів, перший з яких є добутком s та середнього продукту ефективного капіталу $f(\hat{k})/\hat{k}$, а другий є константою $(\delta+n+x-z)$. При цьому середній продукт капіталу $f(\hat{k})/\hat{k}$ змінюється з часом.

За визначенням стаціонарний стан $\hat{k}^*$ задовольняє умові (12). Виявляється, що перехідна динаміка величини $\hat{k}$ якісно така ж, як і динаміка $k = K/L$ в класичній моделі Солоу-Свена [1]. Зокрема, можна представити рисунок, як у класичному випадку, на якому по горизонтальній осі відкладаються $\hat{k}$, вниз нахилена крива $sf(\hat{k})/\hat{k}$, а горизонтальна лінія знаходиться на рівні $\delta+n+x-z$ (рис. 1).

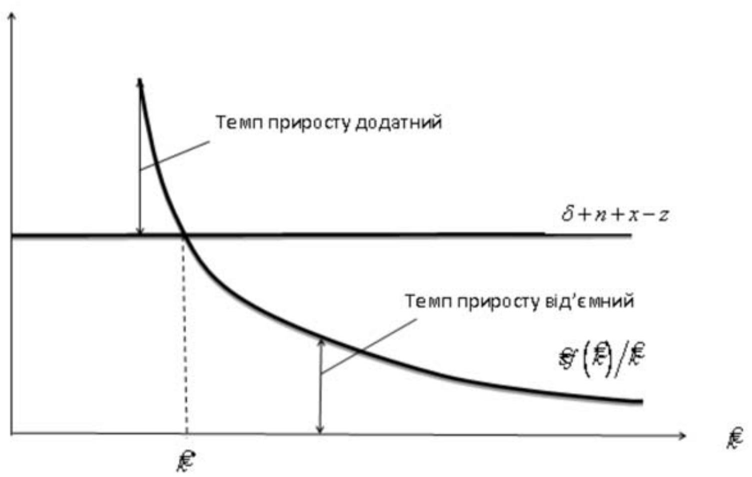

Рис. 1. Модель Солоу-Свена з технологічним прогресом

Перший вираз $sf(\hat{k})/\hat{k}$, як і в [1], назвемо *кривою збереження*, а другий вираз $(\delta+n+x-z)$ – *кривою амортизації*. Похідна від $f(\hat{k})/\hat{k}$ по $\hat{k}$ дорівнює $-\left[f(\hat{k})-\hat{k}f'(\hat{k})\right]/\hat{k}^2$. Тут вираз у квадратних дужках дорівнює граничному продукту праці, який завжди додатній. Отже, похідна від $f(\hat{k})/\hat{k}$ від'ємна, що і відображено на рис. 1. Темп приросту ефективного капіталу на одиницю ефективної праці $\hat{k} = \hat{K}/\hat{L}$ характеризується відстанню по вертикалі між кривою $sf(\hat{k})/\hat{k}$ та прямою $\delta+n+x-z$. Економіка знаходиться в стаціонарному стані, коли величина $\hat{k}$ стала. Тоді згідно (7) і величина $\hat{y}$ теж стала.

Крива збереження має від'ємний нахил, що прямує до нескінченості при $\hat{k}\to 0$ та прямує до нуля при $\hat{k}\to\infty$. Крива амортизації представляє горизонтальну пряму на рівні $\delta+n+x-z$. Вертикальна відстань між кривою збереження і кривою амортизації дорівнює темпу приросту величини $\hat{k}$, а точка перетину їх відповідає стаціонарному стану. Оскільки $\delta+n+x-z>0$ (саме це відповідає економічній реальності) та $sf(\hat{k})/\hat{k}$ знижується монотонно з нескінченості до нуля, то крива збереження і пряма амортизації перетинаються в єдиній точці. Отже, стаціонарне значення $\hat{k}^*>0$ існує і єдине.

На рис. 1. видно, що зліва від стаціонарного стану крива $sf(\hat{k})/\hat{k}$ лежить вище прямої $\delta+n+x-z$. Тому темп приросту $\hat{k}$ залишається додатнім при зростанні $\hat{k}$ до $\hat{k}^*$. Якщо $\hat{k}$ зростає, то $\dot{\hat{k}}/\hat{k}$ зменшується і досягає нуля, як тільки $\hat{k}$ досягає $\hat{k}^*$. У цьому випадку економіка асимптотично прямує до стаціонарного стану, в якому $\hat{k}$ не змінюється. Аналогічні міркування справедливі і у випадку, коли економіка стартує вище стаціонарного стану $\hat{k}(0)>\hat{k}^*$. Тоді темп приросту величини $\hat{k}$ буде від'ємним, а $\hat{k}$ буде зменшуватись з часом. Коли $\hat{k}$ наближається до $\hat{k}^*$, темп приросту зростає і досягає нуля. Таким чином, система глобально стійка: для будь-якого початкового стану $\hat{k}(0)>0$ економіка збігається до свого єдиного стаціонарного стану $\hat{k}^*>0$.

У стаціонарному стані змінна $\hat{k}$ є сталою (темп приросту нульовий). Оскільки $\hat{y}=f(\hat{k})$, то $\dot{\hat{y}}=f'(\hat{k})\dot{\hat{k}}$ і в стаціонарному стані також змінна $\hat{y}$ є сталою (темп приросту нульовий). Оскільки

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{k}}{k}-(x-z) = \frac{\dot{K}}{K}-(n+x-z),$$

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{Y}}}{\hat{Y}}-(\mathrm{n}+x) = \frac{\dot{Y}}{Y}-(n+x-\pi),$$

то в стаціонарному стані $\left(\dot{\hat{k}}=0\right)$ маємо $\dot{\hat{y}}=0$, але темпи приросту величин k, K, $\hat{Y}$ та Y не є нульовими:

$$\frac{\dot{k}}{k}=x-z,\quad \frac{\dot{K}}{K}=n+x-z,\quad \frac{\dot{\hat{Y}}}{\hat{Y}}=n+x,\quad \frac{\dot{Y}}{Y}=n+x-\pi.$$

Висновок. У стаціонарному стані змінна k зростає з темпом $x-z$, а змінна K зростає з темпом $n+x-z$. У цьому ж стані змінна $\hat{Y}$ зростає з темпом $n+x$, а змінна Y зростає з темпом $n+x-\pi$. При цьому оскільки ефективна норма збереження $s=const$, то дійсна норма збереження $s(t)=se^{-(x+z)t}$ зменшується в часі і прямує до нуля при $t\to\infty$. Економічно це означає, що в довготривалій перспективі в стаціонарному стані, коли $\dot{\hat{k}}=0$ та $\dot{\hat{y}}=0$, економіка не потребує значних збережень, а функціонує виключно за рахунок зростаючого ендогенного технологічного прогресу (нейтрального, капіталоінтенсивного та трудоінтенсивного).

Література.

1. Барро Р.Дж. Экономический рост / Р.Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин; пер. с англ. – М.: БИНОМ. – Лаборатория знаний. 2010. – 824 с.
2. Solow, Robert M. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth". Quarterly Journal of Economic, 70, February, 65-94.
3. Swan, Trevor W. (1956). "Economic Growth and Capital Accumulation". Economic Record, 32, November, 334-361.
4. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. За ред. О.І. Пономаренка. – К.: Інформтехніка, 1995. – 320 с.

5. Inada, Ken-Ichi (1963). “On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization”. Review of Economic Studies, 30, June, 110-127.

References.

1. Barro R.Dzh. Ekonomicheskii rost / R.Dzh. Barro, X. Sala-i-Martin; per. s angl. – M.: BINOM. – Laboratoriya znanii. 2010. – 824 s.
2. Solow, Robert M. (1956). “A Contribution to the Theory of Economic Growth”. Quarterly Journal of Economic, 70, February, 65-94.
3. Swan, Trevor W. (1956). “Economic Growth and Capital Accumulation”. Economic Record, 32, November, 334-361.
4. Ponomarenko O.I., Perestyuk M.O., Burim V.M. Osnovi matematichnoi ekonomiki. Za red. O.I. Ponomarenka. – K.: Informtexnika, 1995. – 320 s.
5. Inada, Ken-Ichi (1963). “On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization”. Review of Economic Studies, 30, June, 110-127.

Стаття надійшла до редакції13.06.2013 р.