

Електронне наукове фахове видання "Ефективна економіка" включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Наказ Міністерства освіти і науки України від 29.12.2014 № 1528)

Ефективна
ЕКОНОМІКА

Дніпропетровський державний
аграрно-економічний університет



№ 7, 2013 [Назад](#) [Головна](#)

УДК 519.863:338.3

О. П. Коржевська,
аспірант, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ МОДИФІКОВАНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА

Olena Korzhevska,
postgraduate student, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

INVESTIGATION OF THE DYNAMIC LEONTIEF-FORD MODEL

В роботі запропонована динамічна модифікована еколого-економічна модель Леонт'єва-Форда, в якій враховуються випуск забруднювачів під час основного та допоміжного виробництва, а також забруднення від споживання продукції та матеріальні витрати на обслуговування викидів забруднювачів згідно вимог Кіотського протоколу. Для цієї моделі побудована магістральна траєкторія розвитку еколого-економічної системи.

In the article dynamic modified ecological and economic Leontief-Ford model which takes into account man-made pollutants production during the main and the auxiliary production, pollution from production consumption, and material costs for maintenance contaminants emission in accordance with The Kyoto Protocol is proposed. For proposed model turnpike of ecological and economic system growth is constructed.

Ключові слова: динамічна модель Леонт'єва-Форда, пряма модель, магістральна траєкторія.

Key words: dynamic Leontief-Ford model, primal model, turnpike.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими або практичними завданнями. Щороку масштаби проблем, з якими зіштовхується людство, набувають глобальнішого характеру. Забруднення навколишнього середовища шкідливими викидами під час виробництва продукції, сміття від споживання товарів та після їх використання, не можна віднести до проблем окремої країни, адже вони пов'язані з екологією уцілому. Викиди в атмосферу, які відбуваються на підприємствах під час виробничих процесів і внаслідок використання продукції, поширюються, незважаючи на кордони держав.

Питання ефективного та оптимального функціонування економіки, зменшення, знешкодження і запобігання забрудненню навколишнього середовища вивчає екологічна економіка – наука, покликана за допомогою економічного та математичного апарату вирішувати еколого-економічні проблеми, адже боротьба з забрудненнями потребує постійних витрат, які необхідно оптимізувати і ефективно використовувати.

Протягом останніх двадцяти років екологічна економіка стала визнаною міждисциплінарною наукою, і еколого-економічні напрями, яких вона стосується, широко досліджуються вченими всього світу.

Дослідження та пошук вирішення проблем у екологічній економіці відбувається після переходу до рівня математичного моделювання еколого-економічної взаємодії як ефективного інструменту наукового пізнання.

Аналіз останніх публікацій з проблеми, що розглядається. Статична міжгалузева модель взаємодії навколишнього середовища і економіки була запропонована в 70-х роках ХХ століття Леонт'євим та Фордом. На основі цієї моделі здійснюється аналіз розвитку економіки з врахуванням впливів екологічних чинників. Її використання дає змогу отримати галузеву структуру витрат на охорону навколишнього середовища, впливу їх на обсяги кінцевого та валового випуску залежно від встановленого рівня забруднення навколишнього середовища та інших показників.

Але оскільки еколого-економічні системи зазнають неперервного розвитку, виникає необхідність адекватно відобразити цей процес, зокрема відображення матеріальних витрат на введення в дію основних виробничих фондів. Тому статична модель Леонт'єва-Форда набула подальшої модифікації у вигляді її динамічного аналогу [1, с.68]:

$$\begin{aligned}x^1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_1\dot{x}^1 + B_2\dot{x}^2 + y^1, \\x^2 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 - y^2,\end{aligned}\quad (1)$$

де $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ – вектор-стовпець валового випуску продукції основного виробництва; $\dot{x}^1 = (\dot{x}_1^1, \dot{x}_2^1, \dots, \dot{x}_n^1)^T$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва продукції; $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T$ – вектор-стовпець обсягів знищених забруднювачів; $\dot{x}^2 = (\dot{x}_1^2, \dot{x}_2^2, \dots, \dot{x}_m^2)^T$ – вектор-стовпець абсолютних приростів утилізації забруднювачів; $y^1 = (y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)^T$ – вектор-стовпець кінцевої продукції; $y^2 = (y_1^2, y_2^2, \dots, y_m^2)^T$ – вектор-стовпець обсягів незнищених забруднювачів (викидів забруднювачів в навколишнє середовище); $A_{11} = (a_{ij}^{11})_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції i на випуск продукції j ; $A_{12} = (a_{ik}^{12})_{i,k=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції i на знищення одиниці забруднювачів k ; $A_{21} = (a_{ij}^{21})_{i,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів прямого випуску забруднювачів k під час вироблення одиниці продукції j ; $A_{22} = (a_{kk}^{22})_{k,k=1}^{m,m}$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямого випуску забруднювачів k під час знищення одиниці забруднювача k ; $B_1 = (b_{ij}^1)_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва (випуску продукції); $B_2 = (b_{ik}^2)_{i,k=1}^{m,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва (знищення забруднювачів) (T – операція транспонування вектора).

У моделі (1) всі елементи матриць $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ будемо вважати невід'ємними сталими величинами, а вектори x^1, x^2, y^1, y^2 –

векторами-функціями змінної часу t .

Описана динамічна модель є формальним описом множини варіантів розвитку еколого-економічної системи або еколого-економічних траєкторій. Існування множини технологічно допустимих траєкторій дає змогу досліджувати питання вибору з певної множини оптимальних траєкторій та прогнозувати результати керуючих впливів.

Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми. У моделі (1) враховується лише забруднення, яке виникає в процесі виробництва, та не враховується той факт, що споживання продуктів багатьох галузей також супроводжується забрудненням навколишнього середовища. Прикладами можуть бути споживання продуктів у пластмасових упаковках, використання легкових автомобілів, побутової та офісної техніки, що неодмінно призводить до забруднення довкілля, яке обов'язково має бути враховане при міжгалузевому моделюванні.

Крім того, в умовах стабільного розвитку модель потребує подальшої модифікації і врахування нових факторів. Світова спільнота, шляхом укладення міжнародних договорів, має на меті обмежити шкідливі викиди у атмосферу, оскільки екологічні проблеми є глобальними. Вимоги даних договорів необхідно враховувати також у моделях еколого-економічної взаємодії. Однією з таких міжнародних вимог є дотримання Кіотського протоколу – міжнародної угоди про обмеження викидів в атмосферу парникових газів. Цей протокол був прийнятий як додатковий документ до Рамкової конвенції ООН зі змін клімату, підписаної 1992 року на міжнародній конференції в Ріо-де-Жанейро. Кіотський протокол почав діяти з 16 лютого 2005 року. Він зобов'язує розвинуті країни та країни з перехідною економікою скоротити або стабілізувати викиди парникових газів.

Формулювання цілей статті. Основною метою даної статті було врахування вищезгаданих факторів при моделюванні процесу неперервного розвитку еколого-економічної системи. Для цього потрібно запропонувати та дослідити динамічний аналог статичної моделі Леонтьєва-Форда, а також визначити траєкторії розвитку цієї моделі, зокрема їх підкласу – магістралей. Крім цього, проблема вартісної оцінки еколого-економічних показників також потребує розв'язання. Це означає необхідність побудови двоїстої моделі до даної та визначення характерних їй магістральних траєкторій розвитку.

Виклад основних результатів дослідження з їх обґрунтуванням. Використовуючи статичну модифікацію моделі Леонтьєва-Форда [3], що враховує забруднення навколишнього середовища під час споживання продукції, а також витрати на обслуговування викидів згідно Кіотського протоколу, пропонується розглянути таку динамічну еколого-економічну модель :

$$\begin{aligned}x^1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_1x^1 + B_2x^2 + y^1 + Cy^2, \\x^2 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + G_1x^1 + G_2x^2 + Dy^1 - y^2,\end{aligned}\quad (2)$$

де $G_1 = (g_{ij}^1)_{i,j=1}^n \geq 0$ – матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів при створенні основного виробництва; $G_2 = (g_{ik}^2)_{i,k=1}^{n,m} \geq 0$ – матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів при будівництві очисних споруд; $C = (c_{ik})_{i,k=1}^{n,m} \geq 0$ – прямокутна матриця витрат по Кіотському протоколу – витрати на обслуговування викидів; матриця $D = (d_{ij}^m)_{i,j=1}^n \geq 0$ – прямокутна матриця коефіцієнтів створення забруднювачів k під час споживання одиниці кінцевої продукції j .

Математично, система (2) є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Відомо, що розв'язок такої системи складається із суми загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь та довільного частинного розв'язку неоднорідної системи [4]. Невід'ємні розв'язки однорідної системи (за умови $y^1 \equiv 0, y^2 \equiv 0$)

$$\begin{aligned}x^1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_1x^1 + B_2x^2, \\x^2 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + G_1x^1 + G_2x^2,\end{aligned}\quad (3)$$

будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned}x^1(t) &= x^1(0)e^{\mu t}, x^1(0) \geq 0, \\x^2(t) &= x^2(0)e^{\mu t}, x^2(0) \geq 0,\end{aligned}\quad (4)$$

де μ – числовий параметр.

Підставивши розв'язок (3) у відповідну однорідну систему і здійснивши певні математичні перетворення, отримаємо

$$\left(\begin{pmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ G_1 & G_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \end{pmatrix} = 0.\quad (5)$$

Введемо наступні позначення

$$\begin{pmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{pmatrix} = \tilde{A}, \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ G_1 & G_2 \end{pmatrix} = \tilde{B}, \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \tilde{x}(t).\quad (6)$$

Тоді (3) матиме вигляд

$$(\tilde{A} - \mu\tilde{B})\tilde{x}(0) = 0, \tilde{x}(0) \geq 0,\quad (7)$$

або в іншому вигляді

$$(E_1 - \mu\tilde{A}^{-1}\tilde{B})\tilde{x}(0) = 0, \tilde{x}(0) \geq 0.\quad (8)$$

Матриця $\tilde{A}^{-1} \geq 0$ невід'ємна, що показано у роботі [1, с.25]. Дана матриця є узагальненням матриці $(E - A)^{-1}$ коефіцієнтів повних затрат для класичної моделі міжгалузевого балансу.

Рівність (7), записана у вигляді $(\tilde{A}^{-1}\tilde{B} - \frac{1}{\mu}E_1)\tilde{x}(0) = 0, \tilde{x}(0) \geq 0$, можлива лише за умови, що $\frac{1}{\mu} = \lambda$ – корінь Фробеніуса, а $\tilde{x}(0)$ – правий вектор Фробеніуса матриці $\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$.

$$\lambda = \lambda_{\tilde{A}^{-1}\tilde{B}} > 0, \tilde{x}(0) = x_{\tilde{A}^{-1}\tilde{B}} \geq 0.\quad (9)$$

Враховуючи отримані результати, можна дійти висновку, що темпом зростання виробництва є величина

$$\mu = \lambda_{x-1z}^{-1} > 0. \quad (10)$$

Частинний розв'язок системи (2) будемо шукати у наступному вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t) &= y^1(0)e^{zt}, y^1(0) \geq 0, \\ y^2(t) &= y^2(0)e^{zt}, y^2(0) \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При цьому

$$\begin{aligned} x^1(t) &= x_1^1(0)e^{zt} + x_2^1(0)e^{zt}, \\ x^2(t) &= x_1^2(0)e^{zt} + x_2^2(0)e^{zt}, \\ \tilde{x}(t) &= \tilde{x}_1(0)e^{zt} + \tilde{x}_2(0)e^{zt}. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставивши (11) і (12) в систему (2), отримаємо

$$\begin{aligned} (\tilde{A} - s_1\tilde{B})\tilde{x}_1(0) &= \tilde{y}_1 y^1(0), y^1(0) \geq 0, \\ (\tilde{A} - s_2\tilde{B})\tilde{x}_2(0) &= \tilde{y}_2 y^2(0), y^2(0) \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

де $\tilde{y}_1 = (E_1, D)^T$, $\tilde{y}_2 = (C, E_2)^T$. Існування обернених матриць $(\tilde{A} - s_1\tilde{B})$ та $(\tilde{A} - s_2\tilde{B})$ пов'язане з продуктивністю матриць $s_1\tilde{A}^{-1}$ та $s_2\tilde{A}^{-1}$. З умови продуктивності матриці $s_1\tilde{A}^{-1}\tilde{B} \geq 0$ та $s_2\tilde{A}^{-1}\tilde{B} \geq 0$ впливають умови $s_1\lambda_{x-1z} < 1$ та $s_2\lambda_{x-1z} < 1$. Вони, в свою чергу, еквівалентні умовам $s_1 < \mu = \lambda_{x-1z}^{-1}$ та $s_2 < \mu = \lambda_{x-1z}^{-1}$.

Тоді (13) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(0) &= (\tilde{A} - s_1\tilde{B})^{-1}\tilde{y}_1 y^1(0), y^1(0) \geq 0, \\ \tilde{x}_2(0) &= (\tilde{A} - s_2\tilde{B})^{-1}\tilde{y}_2 y^2(0), y^2(0) \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

В результаті, об'єднуючи розв'язки лінійної однорідної системи і частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи (14), отримаємо загальний розв'язок системи (2) у такому вигляді

$$\tilde{x}(t) = Ce^{zt}x_{x-1z} + (\tilde{A} - s_1\tilde{B})^{-1}\tilde{y}_1 y^1(0)e^{zt} + (\tilde{A} - s_2\tilde{B})^{-1}\tilde{y}_2 y^2(0)e^{zt}. \quad (15)$$

Отримана функція дає можливість визначити валові обсяги випуску матеріального виробництва в часі. Аналіз отриманого розв'язку дає змогу встановити, що визначальним у ньому є перший доданок. Тому магістрально для валового випуску $\tilde{x}(t)$ є правий вектор Фробеніуса матриці $\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$.

Висновки з проведеного дослідження. У даній роботі була запропонована модифікація динамічної моделі Леонтьєва-Форда. Окрім основних показників, у ній враховується випуск забруднювачів під час основного та допоміжного виробництва, витрати на обслуговування викидів згідно Кіотського протоколу, а також забруднення, що виникає внаслідок споживання продукції. Модифікована модель була проаналізована і для неї визначено магістральну траєкторію валового випуску.

Результати даної статті були одержані на основі досліджень, проведених в Бранденбурзькому технічному університеті, Німеччина. Навчання в даному університеті проводилось у рамках бюджетної програми 2201250 Міністерства освіти і науки України.

Література.

1. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку / Ляшенко І. М. – К. : Вища школа, 1999. – 236 с.
2. Онищенко А.М., Мостинець В.С. Магістральні траєкторії прямої та двоїстої динамічної моделі Леонтьєва-Форда // Науковий вісник Київського національного технічного університету. Серія : Економіка. – 2010. – № 1. – С. 154–159.
3. Коржевська О. П. Статична модифікована модель Леонтьєва-Форда // Матеріали III Міжнародної науково-методичної конференції «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці» - Чернівці, 2013 – 14-17 травня 2013 р.
4. Самоїленко А.М. Диференціальні рівняння: підр. / А.М. Самоїленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К. : Либідь. – 2003. – 600 с.
5. Ляшенко І.М. Виробничі функції екологічної економіки / І. М. Ляшенко, Л. З. Хрущ // Dynamical system modelling and stability investigation : international conference, May 22–25, 2007 : thesis of conference reports. – К., 2007. – С. 211.
6. Ляшенко І.Н. Линеиное и нелинейное программирование / [Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З.] / под общ. ред. И. Н. Ляшенко. – К. : Вища школа, 1975. – 372 с.

References.

1. Lyashenko I.M. Ekonomiko-matematichni metodi ta modeli stalogo rozvitku / Lyashenko I. M. – K. : Vischa shkola, 1999. – 236 s.
2. Onischenko A.M., Mostinec' V.S. Magistral'ni traektorii pryamoї ta dvoїstoї dinamichnoi modeli Leont'eva-Forda// Naukoviy visnik Kiivs'kogo nacional'nogo texnichnogo universitetu. Seriya : Ekonomika. – 2010. – № 1. – S. 154–159.
3. Korzhevs'ka O. P. Staticzna modifikovana model' Leont'eva-Forda// Materiali III Mizhnarodnoi naukovo-metodichnoi konferencii «Matematichni metodi, modeli ta informaciiini tehnologii v ekonomici» - Chernivci, 2013 – 14-17 travnya 2013 r.
4. Samoilenko A.M. Diferencial'ni rivnyannya: pidr. / A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, I.O. Parasyuk. – K. : Libid'. – 2003. – 600 s.
5. Lyashenko I.M. Virobnichni funkcii ekologichnoi ekonomiki / I. M. Lyashenko, L. Z. Xrusch // Dynamical system modelling and stability investigation : international conference, May 22–25, 2007 : thesis of conference reports. – K., 2007. – S. 211.
6. Lyashenko I.N. Lineinoe i nelineinoe programmirovaniye / [Lyashenko I. N., Karagodova E. A., Chernikova N. V., SHor N. Z.] / pod obsch. red. I. N. Lyashenko. – K. : Vischa shkola, 1975. – 372 s.

Стаття надійшла до редакції 25.06.2013 р.