Електронне наукове фахове видання "Ефективна економіка" включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Наказ Міністерства освіти і науки України від 29.12.2014 № 1528)

Ефективна ЕКОНОМІКА Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет

№ 3, 2015 Назад Головна

УДК 517.95:336.763.2

С. Д. Волощук,
к. ф. - м. н., доцент кафедри економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана», м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ЩІЛЬНОСТІ АКЦІЙ З ЧАСТКОВО ВІДОМИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

S. Voloshchuk,
PhD, associate professor of economic and mathematical modelling department,
SHEI «Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman»

DENSITY OF SHARES MODELING WITH PARTIALLY KNOWN INITIAL CONDITION

В статті розглянуто параболічну модель щільності розподілу акцій. Вважається, що функція щільності розподілу відома лише в початковий момент часу на кількох скінченних проміжках цін акцій. Також вважається, що щільність розподілу акцій з мінімальною ціною рівна нулю. Необхідно відновити функцію щільності розподілу акцій. Однак запропонована початково-крайова задача для щільності розподілу акцій неповністю визначена. Вона не може бути розв'язана класичними методами диференціальних рівнянь. Ця задача зведена до системи функціональних рівнянь. Отримано середньоквадратичний розв'язок цієї системи. На основі нього побудовано функцію щільності розподілу акцій. Ця функція є розв'язком рівняння моделі та наближено задовольняє початково-крайові умови згідно середньоквадратичного критерію. Отримано умови точності та однозначності розв'язку.

In this article a parabolic model of density distribution of shares is considered. It is believed that the distribution density function is known only at the initial moment in several finite intervals equity prices. It is also believed that the density distribution of shares with a minimum price are equal to zero. It is necessary to restore the function of the density distribution of shares. The initial-boundary value problem which was proposed for the density distribution of shares not fully defined. It can not be solved by classical methods of differential equations. This problem is reduced to a system of functional equations. Based on the root-mean-square solution, which was gained for this system, function of shares density distribution was built. This function is a solution of equation of model and approximately satisfies the initial boundary conditions according to root-mean-square criterion. Conditions of accuracy and single-valuedness of the solution was gained.

Ключові слова: *ціна акцій, функція щільності розподілу, початково-крайові умови, система функціональних рівнянь, середньоквадратичний критерій.*

Keywords: *share price, distribution density function, initial-boundary conditions, system of functional equations, root-mean-square criterion.*

Вступ.

В умовах ринкової економіки типові цінні папери відіграють важливі соціально-економічні функції. Зокрема акції, будучи формою колективної власності, є джерелом прибутку у вигляді дивідендів, мірою його розподілу, виконують функцію страхування фінансових і цінових ризиків, функцію перерозподілу фінансів між галузями виробництва та інші функції. Ціна акції, як ознака ефективності підприємства, залежить від його фінансового стану, загальної економічної ситуації, наявного попиту та інших факторів. А це означає, що процес ціноутворення акцій є динамічним.

При наявності портфеля акцій підприємства та їх реалізації в різних умовах, ціни акцій в фіксований момент часу можуть відрізнятись. Тому процес зміни ціни акцій підприємства може розглядатись як неперервний у часі процес. Це означає, що його можна моделювати за допомогою диференціальних рівнянь з розподіленими параметрами, зокрема за допомогою початкових, крайових та початково-крайових задач параболічного типу.

Нехай $x(t)$ – ціна акції у момент часу t, а $x = x(t)$ – функція ціни акції. В [1] показано, що функція $x(t)$ задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dx = \mu x dt + \sigma x dX, \quad \mu > 0, \sigma > 0, \tag{1}$$

де X – стохастичний вінерівський процес (його параметри $c = 0$, $b = 1$) з відомою перехідною функцією щільності ймовірності, $\mu = p/100$ – норма повернення акцій, p – швидкість росту ціни акції у відсотках, σ – волатильність акцій.

Для портфеля з N_0 акцій, ціна яких описується рівнянням (1) з однаковими параметрами μ, σ в [2] вводиться функція щільності розподілу акцій

$$u(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q(x,t)}{\Delta x}, \quad 0 \le x < \infty, \tag{2}$$

де $\Delta Q(x,t)$ – кількість акцій, ціна яких у момент часу t належить малому ціновому проміжку $[x, x + \Delta x]$. Це зроблено для того, щоб показати, що акції деяким чином розподілені у своєму ціновому проміжку і їх ціни в фіксований момент часу за різних умов можуть відрізнятись. Очевидно, що кількість акцій з цінового проміжку $[x_1, x_2]$ обчислюється за формулою

$$Q(t)=\int_{x_1}^{x_2}u(x,t)dx,$$

а загальна кількість акцій у портфелі представляється інтегралом

$$N_0=\int_0^{\infty}u(x,t)dx.$$

В роботі [2] показано, що функція щільності розподілу акцій (2) задовольняє параболічне рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\alpha x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\beta x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\gamma u,\quad x\in(0,\infty),\ t\in(0,\infty), \qquad (3)$$

де $\alpha=\frac{1}{2}b\sigma^2,\ \beta=2b\sigma^2-c\sigma-\mu,\ \gamma=b\sigma^2-c\sigma-\mu$, а коли стохастичний процес X є вінерівським, то

$$\alpha=\frac{1}{2}\sigma^2,\ \beta=2\sigma^2-\mu,\ \gamma=\sigma^2-\mu.$$

З врахуванням початкових та крайових умов

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in[0,\infty), \qquad (4)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad t\in[0,\infty), \qquad (5)$$

де $\varphi(x)$ – щільність розподілу акцій у початковий момент часу $t=0$, функцію щільності (2) отримано як розв’язок задачі (3), (4)-(5) у вигляді інтегралу:

$$u(x,t)=e^{\gamma t}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\eta)}{2\eta\sqrt{\alpha t\pi}}e^{\frac{(\ln(x/\eta)+(\beta-\alpha)t)^2}{4\alpha t}}d\eta. \qquad (6)$$

Постановка проблеми.

На основі моделі (3), (4)–(5), розглянемо модель щільності розподілу акцій на деякому скінченому проміжку цін $[\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2]$ та деякому скінченому часовому проміжку $[0,\mathrm{T}]$. Нижню цінову межу $\mathrm{X}_1>0$ занизимо на стільки, щоб мала місце крайова умова (5), тобто щоб щільність акцій за ціни X_1 була нульовою. Крім того будемо вважати, що у початковий момент часу $t=0$ щільність акцій задається неперервними функціями $\varphi_i(x), i=\overline{1,n}$ визначеними не на всьому проміжку цін $[\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2]$, а на обмежених інтервалах $[\mathrm{X}_1^{(i)},\mathrm{X}_2^{(i)}], i=\overline{1,n}$ з цього проміжку.

Отже функцію щільності розподілу акцій, будемо шукати як розв’язок початково-крайової задачі:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\alpha x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\beta x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\gamma u,\quad x\in[\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2],\ t\in[0,\mathrm{T}], \qquad (7)$$

$$u(x_i,t)\big|_{t=0,\ x\in\mathrm{X}_i}=\varphi_i(x),\quad x\in\mathrm{X}_i=[\mathrm{X}_1^{(i)},\mathrm{X}_2^{(i)}]\in[\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2],\quad i=\overline{1,n},\quad n\in N, \qquad (8)$$

$$u(x,t_j)\big|_{x=\mathrm{X}_1}=0,\quad t\in[0,\mathrm{T}], \qquad (9)$$

Для спрощення задачі (7), (8)–(9) проведемо дві заміни [2]:

заміну функцій $u(x,t)=e^{\gamma t}v(x,t)$;

та заміну змінних $z=\ln(x)+Ct$, $\tau=\alpha t$, $C=\beta-\alpha$.

Отримаємо модель

$$\frac{\partial y(z,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 y(z,\tau)}{\partial z^2}=0,\quad z\in S=[\ln(\mathrm{X}_1),\ln(\mathrm{X}_2)+C\mathrm{T}],\quad \tau\in[0,\alpha\mathrm{T}], \qquad (10)$$

$$y(z,\tau)\big|_{\tau=0,\ z\in S_0^{(i)}}=\psi_i(z),\quad S_0^{(i)}=[\ln(\mathrm{X}_1^{(i)}),\ln(\mathrm{X}_2^{(i)})]\in S_0=[\ln(\mathrm{X}_1),\ln(\mathrm{X}_2)],\quad i=\overline{1,n}, \qquad (11)$$

$$y(z,\tau)\big|_{z\in S_\Gamma}=0,\quad S_\Gamma=[\ln(\mathrm{X}_1),\ln(\mathrm{X}_1)+C\mathrm{T}],\quad \tau\in[0,\alpha\mathrm{T}], \qquad (12)$$

де

$$y(z,\tau)=v(e^{z-C\tau/\alpha},\tau/\alpha),$$

$$\psi_i(z)=\varphi_i(e^{z-C\tau/\alpha},\tau/\alpha)\big|_{\tau=0}, i=\overline{1,n}.$$

Рівняння (10) – параболічне рівняння з двома змінними [3], яке використовується для опису процесів дифузії, теплопровідності, масопереносу. Але розв’язати задачу (10), (11)–(12) класичними методами математичної фізики неможливо, оскільки початкова умова (11) визначена на проміжках $S_0^{(i)}\in S, i=\overline{1,n}$, а не на всьому проміжку S. Це робить постановку задачі (10), (11)–(12) некоректною. Тому функцію $y(z,\tau)$ побудуємо наближено. Вона повинна точно задовольняти рівняння (10). А умови (11)–(12) будуть задовольнятись наближено, згідно середньоквадратичного критерію

$$\Phi_y = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_0^{(i)}} (y(z,0) - \psi_i(z))^2 dz + \int_0^{\alpha T} d\tau \int_{S_\Gamma} (y(z,\tau))^2 dz \to \min_{y(z,\tau)}. \quad (13)$$

Враховуючи зроблену заміну змінних можемо стверджувати, що додаткові умови (11)–(12) не є початково-крайовими умовами. Умови (11) при $\tau = 0$ визначені в областях $S_0^{(i)}, i = \overline{1,n}$, а не в області S. А умова (12) визначена в області $S_\Gamma \times [0, \alpha T]$, а не на кінцях інтервалу S. Отже (11)–(12) є умовами спостереження за функцією $y(z,\tau)$, а тому задача (10), (11)–(12) є задачею відновлення функції $y(z,\tau)$ в області $S \times [0, \alpha T]$ за відомими спостереженнями за нею в областях $S_0^{(i)} \times \{0\}$, $i = \overline{1,n}$.

Функцію $y(z,\tau)$ отримаємо за методикою, розробленою в роботі [4] і використаною в роботі [5] для моделювання динаміки гіперболічних систем. В результаті отримаємо множину Ω_y функцій, які будуть розв'язками рівняння (10), а умови (11)–(12) при цьому виконуватимуться наближено, згідно середньоквадратичного критерію (13). Визначимо середньоквадратичну нев'язку системи умов (11)–(12) та запишемо умови однозначності множини Ω_y.

Розв'язання проблеми.

Додаткові умови (11)–(12) поставленої вище задачі задані явно. Тому, згідно методики, розробленої в [4], задачу (10), (11)–(12) подамо у вигляді системи функціональних рівнянь.

Невідому функцію $y(z,\tau)$ будемо шукати у вигляді

$$y(z,\tau) = y_\infty(z,\tau) + y_0(z,\tau) + y_\Gamma(z,\tau), \quad z \in S, \tau \in [0, \alpha T], \quad (14)$$

де $y_\infty(z,\tau)$ – розв'язок диференціального рівняння (10) в нескінченній області $R \times R$ без врахування умов (11)–(12), а $y_0(z,\tau)$, $y_\Gamma(z,\tau)$ – невідомі функції, причому $y_0(z,\tau)$ визначає вплив умов (11) на розв'язок задачі, а $y_\Gamma(z,\tau)$ – вплив умов (12).

Як і в роботах [5, 6], проведемо дискретизацію:

області S і часового проміжку $[0, \alpha T]$ точками $z_m \in S, \tau_m \in [0, \alpha T], m = \overline{1, M}$;

області S_0 і фіктивного часового проміжку $(-\infty, 0)$ точками $z_m^0 \in S_0, \tau_m^0 \in (-\infty, 0), m = \overline{1, M_0}$;

області $R \setminus S_\Gamma$ і часового проміжку $[0, \alpha T]$ точками $z_m^\Gamma \in R \setminus S_\Gamma, \tau_m^\Gamma \in [0, \alpha T], m = \overline{1, M_\Gamma}$.

Тоді складові $y_\infty(z,\tau)$, $y_0(z,\tau)$, $y_\Gamma(z,\tau)$ функції (14) представимо у вигляді

$$y_\infty(z,\tau) = \sum_{m=1}^{M} G(z - z_m, \tau - \tau_m)\omega_m, \quad z \in S, \tau \in [0, \alpha T], \quad (15)$$

$$y_0(z,\tau) = \sum_{m=1}^{M_0} G(z - z_m^0, \tau - \tau_m^0)\omega_{0m}, \quad z \in S, \tau \in [0, \alpha T], \quad (16)$$

$$y_\Gamma(z,\tau) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(z - z_m^\Gamma, \tau - \tau_m^\Gamma)\omega_{\Gamma m}, \quad z \in S, \tau \in [0, \alpha T], \quad z \in S, \tau \in [0, \alpha T], \quad (17)$$

де

$\omega_\infty = (\omega_{\infty 1}, \omega_{\infty 2}, \dots, \omega_{\infty M})^T = (0, 0, \dots, 0)^T$ – вектор-стовпець розмірності M, який відповідає нульовій правій частині рівняння (10);

$\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0M_0})^T$ – невідомий вектор-стовпець розмірності M_0;

$\omega_\Gamma = (\omega_{\Gamma 1}, \omega_{\Gamma 2}, \dots, \omega_{\Gamma M_\Gamma})^T$ – невідомий вектор-стовпець розмірності M_Γ;

$G(z - z', \tau - \tau') = \frac{\chi(\tau - \tau')}{\sqrt{4\pi(\tau - \tau')}} e^{-(z-z')^2/(4(\tau-\tau'))}$ – фундаментальний розв'язок [3] диференціального оператора $L(\partial z, \partial \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, породженого рівнянням (10);

$\chi(\tau - \tau')$ – функція Хевісайда.

Зрозуміло, що в цих умовах $y_\infty(z,\tau) = 0, z \in S, \tau \in [0, \alpha T]$.

Підставимо функцію (14) в умови (11)–(12). Отримаємо систему

$y_0(z,0) + y_\Gamma(z,0) = \psi_i(z), \quad z \in S_0^{(i)}, \quad i = \overline{1,n}$,

$y_0(z,\tau) + y_\Gamma(z,\tau) = 0, \quad z \in S_\Gamma$,

яка з врахуванням виразів (16), (17) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M_0} G(z - z_m^0, 0 - \tau_m^0)\omega_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(z - z_m^\Gamma, 0 - \tau_m^\Gamma)\omega_{\Gamma m} = \psi_i(z), \quad z \in S_0^{(i)}, \quad i = \overline{1,n}, \\ &\sum_{m=1}^{M_0} G(z - z_m^0, \tau - \tau_m^0)\omega_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(z - z_m^\Gamma, \tau - \tau_m^\Gamma)\omega_{\Gamma m} = 0, \quad z \in S_\Gamma, \quad \tau \in [0, \alpha T]. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язком системи функціональних рівнянь (18) будуть невідомі вектор-стовпці ω_0, ω_Γ. Побудуємо їх згідно сумарного середньоквадратичного критерію (13).

Введемо наступні позначення:

$$G_0^{(i)}(z) = \left(G(z - z_m^0, 0 - \tau_m^0), m = \overline{1, M_0}; \quad G(z - z_m^{\Gamma}, 0 - \tau_m^{\Gamma}), m = \overline{1, M_\Gamma}\right), \quad i = \overline{1, n},$$

$$G_\Gamma(z, \tau) = \left(G(z - z_m^0, \tau - \tau_m^0), m = \overline{1, M_0}; \quad G(z - z_m^{\Gamma}, \tau - \tau_m^{\Gamma}), m = \overline{1, M_\Gamma}\right),$$

$$G_{0\Gamma}(z, \tau) = \left(G_0^{(i)}(z), i = \overline{1, n}; \quad G_\Gamma(z, \tau)\right)^T,$$

$$Y(z) = \left(\psi_1(z), z \in S_0^{(i)}, i = \overline{1, n}; 0\right)^T,$$

$$\varpi = \left(\varpi_0, \varpi_\Gamma\right)^T.$$

Тоді задача (10), (11)–(12) зведеться до наступної матрично-векторної системи функціональних рівнянь:

$$G_{0\Gamma}(z, \tau)\varpi = Y(z), \tag{19}$$

а середньоквадратичний критерій (13), з врахуванням введених вище позначень, буде таким:

$$\Phi_\varpi = \left\|G_{0\Gamma}(z, \tau)\varpi - Y(z)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_0^{(i)}} \left(G_0^{(i)}(z)\varpi - \psi_i(z)\right)^2 dz + \int_0^{\alpha T} d\tau \int_{S_\Gamma} \left(G_\Gamma(z, \tau)\varpi\right)^2 dz \to \min_\varpi . \tag{20}$$

Згідно [5, 6] всі вектор-стовпці розмірності $M_0 + M_\Gamma$, які точно або наближено за середньоквадратичним критерієм (20) розв’язують матрично-векторне рівняння (19), будуть належать множині

$$\Omega_\varpi = \left\{\varpi : \varpi = P^+\left(G_Y - Pq\right) + q, \forall q \in R^{M_0 + M_\Gamma}\right\}, \tag{21}$$

де

q – довільний дійсний вектор-стовпець розмірності $M_0 + M_\Gamma$,

$G_Y = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_0^{(i)}} \left(G_0^{(i)}(z)\right)^T \psi_i(z) dz$ – вектор розмірності n,

P^+ – матриця, псевдообернена [7] до матриці P,

$P = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_0^{(i)}} \left(G_0^{(i)}(z)\right)^T G_0^{(i)}(z) dz + \int_0^{\alpha T} d\tau \int_{S_\Gamma} \left(G_\Gamma(z, \tau)\right)^T G_\Gamma(z, \tau) dz$ – матриця розмірності $(M_0 + M_\Gamma) \times (M_0 + M_\Gamma)$.

Середньоквадратична нев’язка, яка виникає при підстановці елементів $\varpi \in \Omega_\varpi$ у систему (19), визначається за формулою

$$\varepsilon^2 = \min_{\varpi \in \Omega_\varpi} \Phi_\varpi = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_0^{(i)}} \left(\psi_i(z)\right)^2 dz - G_Y^T P^+ G_Y . \tag{22}$$

Зрозуміло, що величина ε^2 також буде нев’язкою системи (18), а значить і системи умов (11)–(12).

Однозначність множини (21), а отже і множини функцій $y(z, \tau)$, які задовольняють умови (11)–(12) так, що виконується середньоквадратичний критерій (13), залежить від визначника матриці P. Зокрема, якщо

$\det(P) > 0$,

то множина (21) є однозначною, а у випадку

$\det(P) = 0$

міститиме безліч елементів.

Проаналізувавши будову елементів множини (21), запишемо вектор-стовпці ϖ_0, ϖ_Γ:

$\varpi_0 = (\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{M_0})^T$, $\varpi_\Gamma = (\varpi_{M_0+1}, \varpi_{M_0+2}, \ldots, \varpi_{M_0+M_\Gamma})^T$.

Тоді за формулами (16), (17) легко отримаємо функції $y_0(z, \tau)$, $y_\Gamma(z, \tau)$, а за формулою (14) – функцію $y(z, \tau)$, яка буде розв’язком задачі (10), (11)–(12) згідно критерію (13).

Запишемо множину всіх таких функцій:

$$\Omega_y = \left\{ y(z, \tau) = y_0(z, \tau) + y_\Gamma(z, \tau) : y_0(z, \tau) = \sum_{m=1}^{M_0} G(z - z_m^0, \tau - \tau_m^0)\varpi_m, \right.$$
$$\left. y_\Gamma(z, \tau) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(z - z_m^\Gamma, \tau - \tau_m^\Gamma)\varpi_{M_0+m}, z \in S, \tau \in [0, \alpha T], \varpi = \left(\varpi_0, \varpi_\Gamma\right)^T \in \Omega_\varpi \right\}.$$

Знаючи функцію $y(z, \tau) \in \Omega_y$, перейдемо до функції

$v(x, t) = y(\ln(x) + ct, \alpha t)$,

зробивши заміну змінних $z = \ln(x) + Ct$, $\tau = \alpha t$, $C = \beta - \alpha$.

Тоді

$$u(x, t) = e^{\gamma t} v(x, t)$$

– функція щільності розподілу акцій, яка є розв’язком рівняння (7) і середньоквадратично задовольняє умови (8)–(9).

Висновки.

В статті розглянута диференціальна динамічна модель щільності розподілу акцій, представлена початково-крайовою задачею параболічного типу. Побудувати розв’язок такої задачі, який буде моделювати функцію щільності, нескладно. Але постановка задачі повинна бути коректною. Це вимагає, щоб усі початкові та крайові умови задачі буди відомими на своїх областях визначення. Нами розглядається випадок некоректної постановки задачі, коли функція щільності акцій у початковий момент часу явно представлена не на всьому проміжку цін, а у декількох скінченних сегментах.

Слід зазначити, що отримати функцію, яка б точно задовольняла відомим початково-крайовим умовам, важко. Тому функцію щільності акцій побудовано так, що вона задовольняє параболічне рівняння моделі, а всі відомі додаткові умови при цьому виконуються наближено, згідно середньоквадратичного критерію. При цьому диференціальна модель щільності акцій була зведена до системи функціональних рівнянь, середньоквадратичний розв’язок якої і є моделлю щільності розподілу акцій на скінченому проміжку цін.

Запропонована модель, дозволяє оцінити динаміку зміни кількості акцій в потрібному ціновому проміжку. Вона може використовуватись для прогнозування обсягу портфеля акцій, ціни яких належать обраному проміжку цін. Подібну модель можна використовувати для дослідження динаміки цін кол-опціонів та пут-опціонів, а також для керування процесом зміни ціни акцій.

Література.

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели / А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1996. – 512 с.
2. Ерофеенко В.Т. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Изд. 5-е стер. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
4. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований / Н.Ф. Кириченко, В.А. Стоян // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 3. – С. 90-104.
5. Стоян В.А. Про моделювання задач динаміки гіперболічних систем / В.А. Стоян, С.Д. Волощук // Доповіді Національної академії наук України. – 2003. – № 2. – С. 71-77.
6. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем: монографія / В.А. Стоян. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011. – 320 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

References.

1. Shirjaev, A.N. (1996), *Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki. Tom 1. Fakty. Modeli* [Fundamentals of stochastic financial mathematics. Volume 1. Facts. Model], Fazis, Moscow, Russia, p.512.
2. Erofeenko, V.T. and Kozlovskaja, I.S. (2004), *Uravnenija s chastnymi proizvodnymi i matematicheskie modeli v jekonomike: kurs lekcij* [Partial differential equations and mathematical models in economics: a course of lectures], 2nd ed, Editorial URSS, Moscow, Russia, p.248.
3. Tihonov, A.N. and Samarskij, A.A. (1977), *Uravnenija matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics],5nd ed, Nauka, Moscow, Russia, p. 736.
4. Kirichenko, N.F. and Stojan, V.A. (1998), “Analytical representation of the matrix and integral linear transformations”, Kibernetika i sistemnyj analiz, vol. 3, pp. 90-104.
5. Stoian, V.A. and Voloshchuk, S.D. (), “”, Dopovidi Natsional'noi akademii nauk Ukrainy, vol. 2, pp. 71-77.
6. Stoian, V.A. (2011), *Matematychne modeliuvannia linijnykh, kvazilinijnykh i nelinijnykh dynamichnykh system: monohrafiia* [Mathematical modeling of linear, quasilinear and nonlinear dynamical systems: monograph],Vydavnycho-polihrafichnyj tsentr «Kyivs'kyj universytet», Kyiv, Ukraine, p.320.
7. Gantmaher, F.R. (1966), *Teorija matric* [Matrix theory], Nauka, Moscow, Russia, p.576.

Стаття надійшла до редакції 20.03.2015 р.