МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 681.518.3

АНАЛІЗ СУПЕРПОЗИЦІЇ ПОТОКІВ ТРАНЗАКЦІЙ З ПУАССОНІВСЬКИМ ТА РІВНОМІРНИМ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ©

О.І. ПІДГУРСЬКИЙ,
кандидат технічних наук, доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці,
Вінницький національний аграрний університет
(м. Вінниця)

У роботі розроблена математична модель неоднорідного гібридного потоку транзакцій, що є результатом суперпозиції пуассонівського потоку та потоку з рівномірним законом розподілу інтервалів часу між транзакціями.

Проаналізовані класичні та новостворені математичні моделі неоднорідних потоків та їх результати. Математична модель гібридного потоку розроблена у вигляді функції розподілу ймовірностей тривалості інтервалів часу між транзакціями, функції щільності розподілу та перших двох початкових моментів розподілу. Для верифікації математичної моделі гібридного потоку були застосовані граничні значення характеристик пуассонівського та рівномірного потоків, за яких аналітичні вирази моделі спрощуються до відомих рішень. Для різних значень параметрів потоку з рівномірним законом були побудовані та досліджені графіки функції розподілу, функції щільності розподілу, а також проаналізовано зв'язок математичної моделі суперпозиції пуассонівського і рівномірного потоків транзакцій з математичною моделлю суперпозиції пуассонівського і регулярного потоків.

Дана робота є продовженням та розширенням раніше проведених досліджень.

Ключові слова: потоки транзакцій, суперпозиція потоків, гібридні потоки, математичні моделі, закони розподілу ймовірностей, верифікація моделі.

Рис. 5. Літ. 11.

Постановка проблеми. Розбудова сучасних складних логістичних систем потребує детального аналізу матеріальних, інформаційних, фінансових та людських потоків (потоків транзакцій), що мають стохастичний характер. Дослідження таких потоків за допомогою моделювання дозволяє аналізувати складні логістичні системи з метою підвищення ефективності їх функціонування. При цьому застосовуються математичні та імітаційні моделі.

Математичне моделювання є повноцінним інструментом дослідження і дозволяє за допомогою аналітичних виразів оцінити числові характеристики процесів у логістичних системах. Імітаційне моделювання застосовується тоді, коли обмеження, що накладаються на математичні моделі, суттєво впливають на адекватність результатів експерименту.

Імітаційне моделювання потоків здійснюється за допомогою послідовності псевдовипадкових чисел із заданою функцією розподілу ймовірностей тривалості інтервалів часу між двома суміжними транзакціями. Для формування такої послідовності застосовують спеціальні програмні генератори, що побудовані на основі математичної моделі потоку. З цього випливає, що математичне моделювання виконує допоміжну функцію при імітаційному моделюванні, і для ефективної генерації псевдовипадкових чисел слід створювати математичні моделі потоків.

Так, наприклад, для імітаційного моделювання сумарного потоку від декількох джерел транзакцій зазвичай застосовують відповідну кількість генераторів псевдовипадкових чисел. Це призводить до збільшення сумарної кількості часу на виклики генераторів, а значить, і збільшення загальної тривалості сеансу моделювання. Тому зменшення часу на виклики генераторів можна досягнути шляхом застосування єдиного генератора, який би адекватно замінив декілька. Тобто бажано було б генерувати не кожен потік транзакцій окремим генератором, а відразу формувати сумарний потік одним еквівалентним генератором. А для цього необхідно створити математичну модель сумарного потоку, на основі якої можна було б створити такий еквівалентний генератор. Тому питання розробки математичних моделей сумарних потоків транзакцій є досить актуальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження потоків випадкових подій здійснювались такими відомими вченими, як Б. Гнеденко, Н. Коваленко [1], Л. Клейнрок [2], Т. Сааті [3], О. Хінчін [4] та ін. У своїх фундаментальних роботах науковці системно і докладно проаналізували найпростіший (пуассонівський) потік подій, що характеризується властивостями стаціонарності, ординарності та відсутності післядії. Для пуассонівського потоку розроблена чітка математична модель, що використовується при аналізі процесів функціонування різноманітних систем. Тому переважна більшість математичних моделей таких систем ґрунтується на припущенні про пуассонівські властивості потоку подій, незважаючи на відповідність такого припущення. Але оскільки відмінність властивостей потоків у досліджуваних системах та у їх математичних моделях негативно позначається на результатах моделювання, то науковці продовжують дослідження потоків випадкових подій з метою побудови адекватних моделей.

Сучасні дослідження потоків випадкових подій продовжуються у напрямку вивчення непуассонівських потоків, що мають ознаки неоднорідності. Ці потоки можуть мати властивість обмеженої післядії, бути нестаціонарними в часі, містити події різного типу та ін.

У роботі [5] запропонована комплексна математична модель інформаційних стаціонарних ординарних, нестаціонарних ординарних та стаціонарних неординарних потоків із врахуванням їх випадкових однорідних та неоднорідних фінітних регулярностей.

У роботі [6] автор досліджує нестаціонарні в часі потоки однорідних подій і стверджує, що сформувати однозначну оцінку нестаціонарних потоків неможливо, якщо інтенсивність залежить від двох чи більше параметрів. Така оцінка можлива лише на тих інтервалах нестаціонарного потоку, де він є обмежено стаціонарним.

У роботі [8] математична модель суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків була досліджена та верифікована шляхом застосування граничних значень характеристик цих потоків.

Проте огляд останніх публікацій стосовно математичного моделювання потоків дозволяє стверджувати, що питанням дослідження суперпозиції пуассонівського та довільного потоків приділяється недостатньо уваги.

Зокрема становлять інтерес дослідження суперпозиції пуассонівського потоку та потоку з рівномірним законом розподілу інтервалів часу між транзакціями (надалі рівномірного потоку). Модель такого гібридного потоку була б більш загальною у порівнянні з моделлю суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків. Це випливає з визначення рівномірного закону розподілу безперервних випадкових величин [9]. Інтерес зумовлений також і тим, що на практиці досить рідко зустрічаються строго регулярні потоки і завжди є місце для рівномірних випадкових відхилень від фіксованої тривалості інтервалів між подіями. Отже, розроблену у [7] математичну модель суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків, можна було б вважати граничним випадком математичної моделі суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків, коли випадкові відхилення тривалості інтервалів відсутні.

Тому створення математичної моделі суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків з перевіркою її відповідності викликає значний інтерес.

Формулювання цілей статті. У логістичній системі гібридний потік транзакцій утворюється внаслідок суперпозиції пуассонівського (з параметром λ) та рівномірного (з параметрами a та b) потоків. Необхідно створити та дослідити математичну модель гібридного потоку для створення на її основі генератора псевдовипадкових чисел і подальшого імітаційного моделювання логістичної системи.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для створення математичної моделі суперпозиції пуассонівського потоку та потоку з рівномірним законом розподілу скористаємось математичною моделлю гібридного потоку, що була отримана в роботі [7] у вигляді перетворення Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями:

$$f_c^*(s) = \frac{\lambda}{p} + \frac{\lambda + s \cdot Q^*(p)}{(1+\lambda \bar{v}) \cdot p^2} \cdot s \quad , \qquad (1)$$

де $Q^*(p)$ – перетворення Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями непуассонівського потоку в області комплексної змінної $p = s + \lambda$;

$\bar{q}$ – математичне сподівання розподілу $Q^*(p)$.

Для використання виразу (1) необхідно визначити вирази для функції $Q^*(p)$ та величини $\bar{q}$. Оскільки в даній роботі в якості одного з компонентів гібридного потоку розглядається рівномірний потік, то вираз для $Q^*(p)$ є перетворенням Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями рівномірного потоку в області комплексної змінної $p = s + \lambda$.

Оскільки рівномірний закон розподілу характеризується функцією щільності $f_p(t)$ [9]

$$f_p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le t \le b \\ 0, & t < a,\ t > b, \end{cases} \qquad (2)$$

що має графічне зображення (Рис.1),

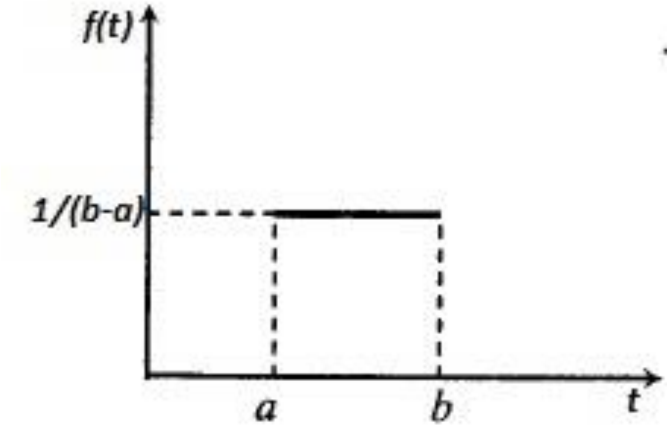

Рис 1. **Рівномірний закон розподілу**

Джерело: [9]

то перетворення Лапласа функції щільності розподілу $Q^*(s)$ буде мати такий вигляд:

$$Q^*(s) = \int_a^b f_p(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-st} dt = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s(b-a)} . \qquad (3)$$

Для визначення функції $Q^*(p)$ необхідно у виразі (3) замість комплексної змінної s підставити $p = s + \lambda$. Тоді отримаємо:

$$Q^*(p) = \frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p(b-a)} = \frac{e^{-(\lambda+s)a} - e^{-(\lambda+s)b}}{(\lambda+s)(b-a)} . \qquad (4)$$

Математичне сподівання рівномірного закону розподілу $\bar{q}$ визначаємо за допомогою відомого виразу [9]

$$\bar{q} = \frac{b+a}{2} . \qquad (5)$$

Підставивши вирази (4) та (5) у формулу (1), отримаємо вираз для перетворення Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку:

$$f_c^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{2\lambda s}{(2+\lambda(b+a))(\lambda+s)^2} + \frac{2s^2 \cdot (e^{-(\lambda+s)a} - e^{-(\lambda+s)b})}{(\lambda(b^2-a^2) + 2(b-a))(\lambda+s)^3} . \qquad (6)$$

Через зворотне перетворення Лапласа для виразу (6) отримаємо оригінал функції щільності розподілу ймовірностей інтервалів часу гібридного потоку:

$$f_c(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}+2\dfrac{1-\lambda t}{2+\lambda(b+a)}\lambda e^{-\lambda t}+\\ +H(t-a)\dfrac{(\lambda t)^2+(\lambda a)^2-4\lambda(t-a)+2(1-\lambda t)}{\lambda(b^2-a^2)+2(b-a)}e^{-\lambda t}, \quad 0\le t\le b\\ 0, \quad 0>t>b\end{cases}, \qquad (7)$$

де $H(t-a)$ – функція Гевісайда.

Вираз (7) дозволяє шляхом інтегрування отримати функцію розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку:

$$F_c(t)=\begin{cases}0, \quad t<0,\\ 1-e^{-\lambda t}+\dfrac{2\lambda t}{2+\lambda(b+a)}e^{-\lambda t}+H(t-a)\dfrac{(2-\lambda(t-a))(t-a)}{\lambda(b^2-a^2)+2(b-a)}e^{-\lambda t}, \quad 0\le t\le b,\\ 1, \quad t>b\end{cases}. \qquad (8)$$

У роботі [7] отримані вирази для перших двох початкових моментів розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку, що утворений суперпозицією пуассонівського потоку та потоку з довільним законом розподілу:

$$\overline{\alpha}_c=\frac{\overline{q}}{1+\lambda\overline{q}}, \qquad (9)$$

$$\overline{\alpha}_c^{(2)}=2\frac{Q^*(\lambda)+\lambda\overline{q}-1}{\lambda^2(1+\lambda\overline{q})}. \qquad (10)$$

Підставимо у формули (9), (10) значення $\overline{q}$ та $Q^*(\lambda)$ для рівномірного закону розподілу. Вираз для $\overline{q}$ визначається формулою (5), а залежність $Q^*(\lambda)$ знайдемо з (4), де s потрібно прирівняти до нуля:

$$Q^*(\lambda)=\frac{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}{\lambda(b-a)}.$$

Тоді:

$$\overline{\alpha}_c=\frac{\overline{q}}{1+\lambda\overline{q}}=\frac{b+a}{2+\lambda(b+a)}, \qquad (11)$$

$$\overline{\alpha}_c^{(2)}=2\frac{Q^*(\lambda)+\lambda\overline{q}-1}{\lambda^2(1+\lambda\overline{q})}=2\frac{2(e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b})+\lambda^2(b^2-a^2)-2\lambda(b-a)}{\lambda^4(b^2-a^2)+2\lambda^3(b-a)}. \qquad (12)$$

Вирази (6)-(12) описують математичну модель гібридного потоку, що утворюється внаслідок суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків. Проаналізуємо отримані результати з метою їх верифікації.

Розглянемо спочатку вплив параметра a на вирази (6)-(12). Неважко пересвідчитися, що при наближенні значення параметра a до нуля вираз для перетворення Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку буде наближатись до такого вигляду:

$$f_c^*(s)\big|_{a=0} = \frac{\lambda}{\lambda+s} + 2\frac{\lambda s}{(2+\lambda b)(\lambda+s)^2} + 2\frac{s^2(1-e^{-(\lambda+s)b})}{b(2+\lambda b)(\lambda+s)^3}, \quad (13)$$

що відповідає оригіналу

$$f_c(t)\big|_{a=0} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} + 2\dfrac{1-\lambda t}{2+\lambda b}\lambda e^{-\lambda t} + \dfrac{(\lambda t)^2 - 4\lambda t + 2}{b(2+\lambda b)}e^{-\lambda t}, & 0 \le t \le b \\ 0, & 0 > t > b \end{cases} \quad (14)$$

Функція розподілу за таких умов набуде вигляду:

$$F_c(t)\big|_{a=0} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} + 2\dfrac{\lambda t}{2+\lambda b}e^{-\lambda t} + \dfrac{t(2-\lambda t)}{b(2+\lambda b)}e^{-\lambda t}, & 0 \le t \le b, \\ 1, & t > b, \end{cases} \quad (15)$$

а перші два початкові моменти розподілу виглядатимуть так:

$$\overline{\alpha}_c\big|_{a=0} = \frac{b}{2+\lambda b}, \quad (17)$$

$$\overline{\alpha}_c^{(2)}\big|_{a=0} = 2\frac{2(1-e^{-\lambda b}) - \lambda b(2-\lambda b)}{\lambda^3 b(2+\lambda b)}. \quad (18)$$

Тепер спрямуємо значення параметра a до величини b. Зрозуміло, що граничний випадок, коли $a=b$, перетворить рівномірно розподілену випадкову величину на постійну, а значить, рівномірний потік стане регулярним. Суперпозиція пуассонівського та регулярного потоків досліджувалась у роботах [7] та [8] з побудовою математичної моделі такого гібридного потоку. Тому граничний випадок $a=b$ має перетворити суперпозицію пуассонівського та рівномірного потоків на суперпозицію пуассонівського та регулярного потоків. Перевіримо це на математичній моделі гібридного потоку (6)-(12).

Розглянемо спочатку вираз (6). Перший доданок виразу від значення a не залежить. У другому доданку заміна значення a на b не викликає жодних ускладнень. Але третій доданок при $a=b$ дасть нам невизначеність типу 0/0:

$$\frac{2s^2\cdot(e^{-(\lambda+s)a} - e^{-(\lambda+s)b})}{(\lambda(b^2-a^2)+2(b-a))(\lambda+s)^3}\Big|_{a=b} = \frac{0}{0}.$$

Розкриємо цю невизначеність за допомогою правила Лопіталя [10]:

$$\frac{2s^2}{(\lambda+s)^3}\lim_{a\to b}\frac{(e^{-(\lambda+s)a} - e^{-(\lambda+s)b})'}{(\lambda(b^2-a^2)+2(b-a))'} = \frac{2s^2(\lambda+s)e^{-(\lambda+s)b}}{2(1+\lambda b)(\lambda+s)^3} = \frac{s^2 e^{-(\lambda+s)b}}{(1+\lambda b)(\lambda+s)^2}.$$

Таким чином, після виконання усіх необхідних підстановок, вираз (6) для граничного випадку $a=b$ набуде вигляду:

$$f_c^*(s)\big|_{a=b} = \frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{\lambda + s\cdot e^{-(\lambda+s)b}}{(1+\lambda b)(\lambda+s)^2}\cdot s \quad . \tag{18}$$

Тепер розглянемо граничний випадок $a=b$ для виразу (7). Перший доданок виразу від значення a не залежить. У другому доданку заміна значення a на b не вимагає жодних пояснень. У третьому ж доданку виразу міститься функція Гевісайда $H(t-a)$. Завдяки цій функції другий доданок виразу матиме значення тільки у точці $a=b$. Тому тут величини a та t потрібно замінити на значення b. Зрештою після виконання серії таких перетворень ми отримаємо вираз (7) у такому вигляді:

$$f_c(t)\big|_{a=b} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} + \dfrac{1-\lambda t}{1+\lambda b}\cdot \lambda e^{-\lambda t}, & 0 \le t < b \\ \dfrac{\delta(t-b)}{1+\lambda b}\cdot e^{-\lambda b}, & t=b \end{cases} \quad . \tag{19}$$

Діючи за аналогією, отримаємо для граничного випадку $a=b$ також вирази (8), (11) та (12). Зокрема вираз для функції розподілу $F_c(t)$ буде мати такий вигляд:

$$F_c(t)\big|_{a=b} = \begin{cases} 0, & t<0, \\ 1-e^{-\lambda t} + \dfrac{\lambda t e^{-\lambda t} + H(t-b)e^{-\lambda b}}{1+\lambda b}, & 0 \le t \le b, \\ 1, & t>b, \end{cases} \tag{20}$$

а перші два початкові моменти розподілу виглядатимуть так:

$$\overline{\alpha}_c\big|_{a=b} = \frac{b}{1+\lambda b} \quad , \tag{21}$$

$$\overline{\alpha}_c^{(2)}\big|_{a=b} = 2\frac{\lambda b - (1-e^{-\lambda b})}{\lambda^2(1+\lambda b)} \quad . \tag{22}$$

Порівнявши вирази (18)-(22) з відповідними виразами для суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків з робіт [7] та [8], можна побачити повну їх відповідність, що свідчить про несуперечливість отриманих результатів.

Продовжимо верифікацію математичної моделі через вилучення з гібридного потоку транзакцій однієї з двох його складових. У результаті маємо отримати вирази для іншої складової цього потоку.

Спочатку вилучимо з гібридного потоку пуассонівський потік і побачимо, як це вплине на вирази (6)-(8), (11), (12), і чи будуть вони відображати характеристики рівномірного потоку. Для цього у зазначених виразах встановимо значення параметра λ=0. В результаті отримаємо:

$$f_c^*(s)\big|_{\lambda=0} = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s(b-a)} \quad , \tag{23}$$

$$f_c(t)\big|_{\lambda=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & 0 \le t \le b \\ 0, & 0 > t > b \end{cases} \quad , \tag{24}$$

$$F_c(t)\big|_{\lambda=0} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{(t-a)}{(b-a)}, & a \le t \le b, \\ 1, & t > b \end{cases} \tag{25}$$

$$\overline{\alpha}_c\big|_{\lambda=0} = \frac{b+a}{2} \quad . \tag{26}$$

При λ=0, вираз для другого початкового моменту має невизначеність типу 0/0:

$$\overline{\alpha}_c^{(2)}\big|_{\lambda=0} = 2\,\frac{2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + \lambda^2(b^2 - a^2) - 2\lambda(b-a)}{\lambda^4(b^2 - a^2) + 2\lambda^3(b-a)} = \frac{0}{0} \quad .$$

Тому застосуємо і в цьому випадку правило Лопіталя:

$$\overline{\alpha}_c^{(2)}\big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \to 0} 2\,\frac{(2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + \lambda^2(b^2 - a^2) - 2\lambda(b-a))'''}{(\lambda^4(b^2 - a^2) + 2\lambda^3(b-a))'''} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \quad . \tag{27}$$

Отже, отримавши вирази (23)-(27) можемо переконатися, що вони дійсно описують рівномірний закон розподілу тривалості інтервалів між транзакціями [11].

Тепер вилучимо з гібридного потоку рівномірний потік і з'ясуємо, як це позначиться на виразах (6)-(8), (11), (12), і чи будуть вони описувати пуассонівський потік. Для цього у зазначених виразах потрібно спрямувати значення a та b до нескінченності і знайти границі цих залежностей. При цьому очевидна нерівність $a < b$ дає можливість параметр b представити, як $b = a + c$, де c – константа. Це дає можливість при визначенні границь виразів (6)-(8), (11), (12) спрямувати до нескінченності тільки один параметр a, що значно зручніше.

Вираз (6) визначає, що перетворення Лапласа функції розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку складається з трьох доданків. Перший доданок не залежить від значення a і тому при $a \to \infty$ залишається незмінним. Другий доданок параметр a містить тільки в знаменнику, а тому його граничне значення наближається до нескінченно малої величини. В третьому доданку в чисельнику маємо нескінченно малу величину, а в знаменнику – нескінченно велику. Тому при $a \to \infty$ вираз (6) складатиметься тільки з першого доданку і матиме вигляд:

$$\lim_{a \to \infty} f_c^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \quad . \tag{28}$$

Вираз (7) визначає функцію щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку і також складається з трьох доданків. При $a \to \infty$ перший доданок змін не зазнає, оскільки параметр a не входить до його складу. Другий доданок містить параметр a тільки в знаменнику і тому при $a \to \infty$ наближається до нескінченно малої величини.

Третій доданок виразу (7) починає впливати на залежність тільки при значеннях $a < t \le b$. Тому для аналізу цього доданку представимо змінну t, як $t = a + \tau$, а параметр b, як $b = a + c$. У результаті, застосувавши правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{a\to\infty} H(\tau)\frac{(\lambda(a+\tau)^2 + (\lambda a)^2 - 4\lambda(\tau) + 2(1-\lambda(a+\tau))}{\lambda((a+c)^2 - a^2) + 2c} e^{-\lambda(a+\tau)} = 0.$$

Отже, при $a \to \infty$ вираз (7) буде складатись тільки з першого доданку і матиме вигляд:

$$\lim_{a\to\infty} f_c(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (29)$$

Вираз (8) визначає функцію розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку. Застосувавши для нього аналогічні заміни змінних і правило Лопіталя, отримаємо його границю при $a \to \infty$ у такому вигляді:

$$\lim_{a\to\infty} F_c(t) = 1 - \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (30)$$

Тепер знайдемо границю при $a \to \infty$ для перших двох початкових моментів. Перший початковий момент визначається виразом (11). Провівши заміну $b = a + c$ і застосувавши правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\alpha}_c = \frac{2a + c}{2 + \lambda(2a + c)} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (31)$$

Аналогічно знайдемо границю і для другого моменту, що був визначений виразом (12).

$$\lim_{a\to\infty} \overline{\alpha}_c^{(2)} = 2\frac{2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda(a+c)}) + \lambda^2((a+c)^2 - a^2) - 2\lambda c}{\lambda^4((a+c)^2 - a^2) + 2\lambda^3 c} = \frac{2}{\lambda^2}. \qquad (32)$$

Отже, отримавши вирази (23)-(27), можемо переконатися, що вони дійсно описують експоненціальний закон розподілу тривалості інтервалів між транзакціями, що властиво для пуассонівського потоку подій [11].

Таким чином, провівши верифікацію математичної моделі гібридного потоку, що утворюється внаслідок суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій, переконуємось у відсутності суперечностей і протиріч між отриманими математичними залежностями (6)-(8), (11), (12) і фізичною природою такого гібридного потоку.

Розглянемо тепер графічну інтерпретацію математичної моделі гібридного потоку транзакцій.

На рисунку 1 показані графіки функції щільності *f(t)*, що визначається виразом (7). Графіки побудовані при значенні параметрів λ=1 та *b=0,5* і при різних значеннях параметра a. Так залежність 1 відповідає графіку функції *f(t)* при a =0. При цих значеннях функція монотонно спадає на відрізку від a до b. Монотонність залежності 1 пояснюється рівномірним розподілом тривалості інтервалів між транзакціями одного з компонентів гібридного потоку на усьому відрізку від 0 до 0,5 (від a до b відповідно).

Залежність 2 відповідає графіку функції *f(t)* при a=0,15. Тут функція монотонно спадає на відрізку від 0 до a, де монотонність переривається стрибком, після якого знову відновлюється. Наявність стрибка з математичної точки зору пояснюється присутністю у виразі (7) доданка з функцією Гевісайда в точці $t = a$ =0,15. Фізична інтерпретація стрибка полягає у різкому збільшенні щільності ймовірності тривалості інтервалів часу гібридного потоку в точці a за рахунок впливу на результат суперпозиції рівномірного потоку транзакцій.

Область визначення функції *f(t)* на відрізку від 0 до b відповідає тому факту, що при суперпозиції пуассонівського і рівномірного потоків максимальна довжина інтервалу між транзакціями гібридного потоку не може бути більшою ніж значення b.

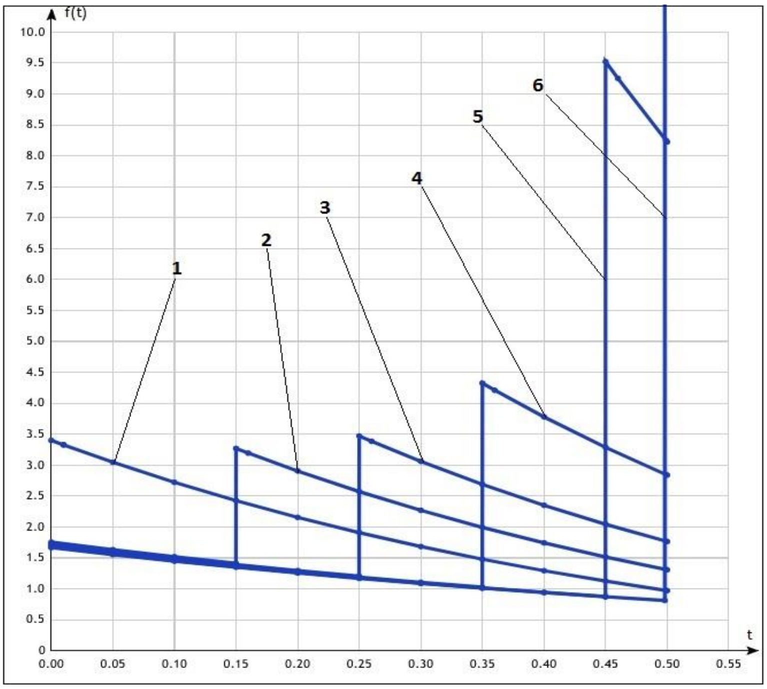

Рис. 2. **Графік функції *f(t)***

Джерело: [8]

Залежності 3-5 відповідають графікам функції *f(t)* при a =0,25; a =0,35 та a =0,45 відповідно і хоча якісно не відрізняються від залежності 2, дають можливість прослідкувати динаміку змін.

Окремо розглянемо залежність 6, що відображає графік функції *f(t)* при $a = b$ =0,5. Це граничний випадок, при якому рівномірний потік транзакцій перетворюється на регулярний потік. У результаті, замість суперпозиції пуассонівського і рівномірного потоків, ми отримаємо суперпозицію пуассонівського і регулярного потоків, яка раніше досліджувалась в роботі [8]. З цієї роботи запозичимо графік функції *f(t)* при b =0,5 (рис. 2).

Залежність 6 на рисунку 1 і залежність 1 на рисунку 2 побудовані на основі математичних моделей різних потоків, але не важко переконатись у тому, що вони є ідентичними. Це дозволяє зробити висновок про відсутність протиріччя між математичною моделлю суперпозиції пуассонівського і регулярного потоків транзакцій з роботи [8] і математичною моделлю суперпозиції пуассонівського і рівномірного потоків у вигляді виразів (6)-(12).

Отже, поведінка графіка функції *f(t),* що графічно ілюструє вирази математичної моделі, як мінімум, не суперечить фізичній природі суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків.

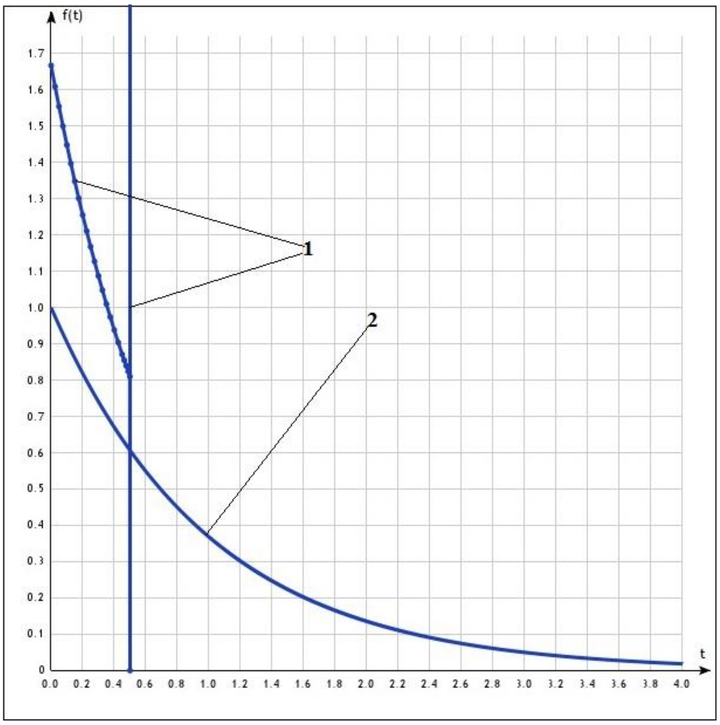

Рис. 3. **Графік функції *f(t)* при $a = b$ =0,5**

Джерело: розроблено автором

На рисунку 3 зображені графіки функції розподілу тривалості інтервалів часу гібридного потоку *F(t),* що побудовані за виразом (8) при значеннях λ=1, b=0,5 і при різних значеннях параметра a .

Функція *F(t)* визначена на відрізку від 0 до b з тієї ж причини, що і функція *f(t)*. Залежність 1 відповідає графіку функції *F(t)* при a =0. У цьому випадку функція монотонно зростає на відрізку від a до b і в точці $t = b$=0,5 досягає 1.

Залежність 2 відповідає графіку функції *F(t)* при a =0,15. Тут функція монотонно зростає на відрізку від 0 до a , після чого швидкість зростання помітно збільшується. З математичної точки зору це пояснюється присутністю у виразі (8) доданка з функцією Гевісайда в точці $t = a$=0,15. З точки зору природи процесу, це пояснюється впливом, що чинить на сумарний гібридний потік рівномірний потік транзакцій.

Залежності 3-5 відображають графіки функції *F(t)* при a =0,25; a =0,35 та a =0,45 відповідно і якісно не відрізняються від залежності 2, хоча дають можливість прослідкувати динаміку змін.

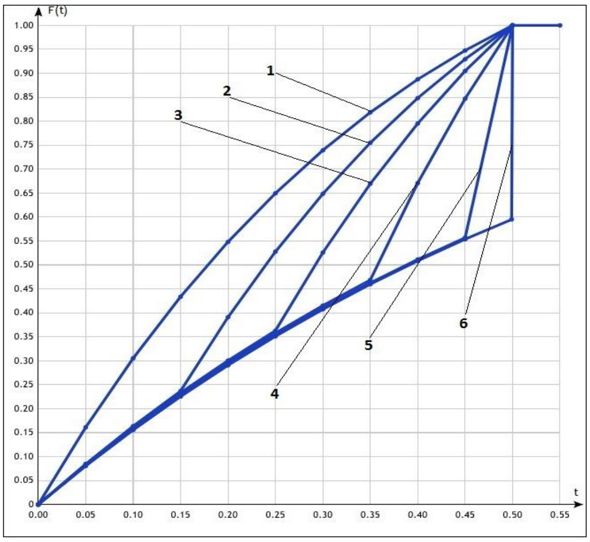

Рис. 4. **Графік функції *F(t)*.**

Джерело: розроблено автором

Залежність 6 відповідає графіку функції *F(t)* при $a=b$=0,5. Ці значення перетворюють рівномірний потік транзакцій на регулярний потік, що дасть нам суперпозицію пуассонівського і регулярного потоків транзакцій. Суперпозиція цих потоків докладно досліджувалась у роботі [8], з якої запозичимо графік функції *F(t)* при *b*=0,5 (рис. 5).

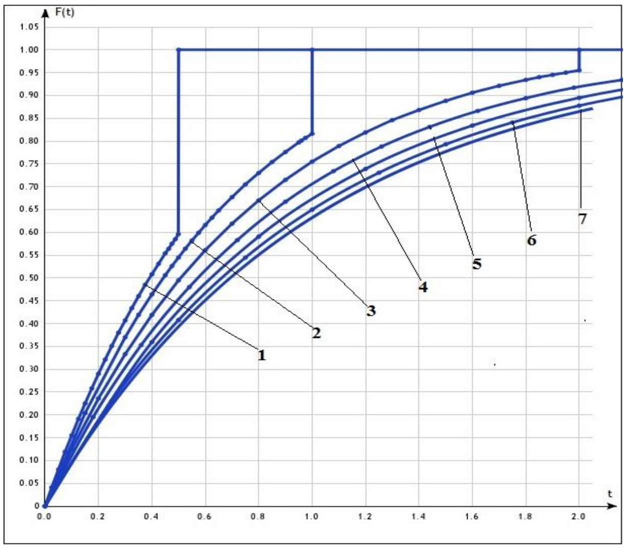

Рис. 5. **Графік функції *F(t)* при** $a=b$

Джерело: розроблено автором

Залежність 6 на рисунку 4 і залежність 1 на рисунку 5 побудовані на основі різних математичних моделей. З рисунків видно, що ці залежності є ідентичними. Це доводить спроможність математичної моделі гібридного потоку транзакцій у вигляді виразів (6)-(8), (11), (12) описувати суперпозицію пуассонівського і регулярного потоків транзакцій при очевидних граничних значеннях $a=b$.

Отже, поведінка графіка функції *f(t),* що графічно ілюструє вирази математичної моделі, як мінімум, не суперечить фізичній природі досліджуваного гібридного потоку.

Висновки. Розроблена в роботі математична модель гібридного потоку, що утворюється шляхом суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій, є цілком адекватною і, як мінімум, не містить протиріч з фізичною природою досліджуваного потоку. Про це свідчить проведений аналіз моделі з метою її верифікації. Аналіз також показав відсутність суперечностей між розробленою у роботі моделлю та математичною моделлю гібридного потоку, що утворюється шляхом суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків транзакцій, яка була розроблена у роботі [8]. При цьому математично доведено і графічно проілюстровано, що модель суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків зводиться до моделі суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків за рівних значень параметрів рівномірного потоку транзакцій a та b.

Практична цінність розробленої моделі полягає у перспективній можливості досягнення більш продуктивної генерації псевдовипадкових чисел в імітаційних моделях систем із гібридним потоком транзакцій на вході. Теоретично підвищення продуктивності генерації можливе за рахунок заміни двох генераторів псевдовипадкових чисел одним, що і буде предметом майбутніх досліджень.

Список використаних джерел

1. Гнеденко Б.В., Коваленко Н.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер с ан. А.И. Грушко /Под ред В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.
4. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 236 с.
5. Варламов І.Д. Математична модель інформаційних потоків автоматизованих систем управління / І.Д. Варламов, С.С. Гаценко // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2014. – Вип. 4. – С. 47-56.
6. Маєвський О.В. Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності / О.В. Маєвський, О.В. Мацюк, М.В. Приймак, О.М. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. – 2016. – с. 87-99.
7. Підгурський О.І. Моделювання суперпозиції неоднорідних потоків транзакцій / О.І. Підгурський // Регіональна бізнес-економіка та управління. – 2017. – №3. – С. 126-135.
8. Підгурський О.І. Дослідження суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків транзакцій / О.І. Підгурський, Л.О. Волонтир // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2017. – №5. – С. 71-84.
9. Більчук В.М. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: підручник. – Х.: ХУПС. – 2009. – 436 с.
10. Абрамчук І.В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навчальний посібник / І.В. Абрамчук, Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко // – Вінниця: ВНТУ. – 2010. – 152 с.
11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 6-е изд. стер. – М.: Высш. шк. – 1999. – 576 с.

Список використаних джерел у транслітерації/References

1. Gnedenko B.V., Kovalenko N.N. Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya. 2-e izd. – M.: Nauka, 1987. – 336 p.
2. Kleynrok L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya: Per s an. A.I.Grushko /Pod red V.I.Neymana. – M.: Mashinostroenie, 1979. – 432 p.
3. Saati T.L. Elementyi teorii massovogo obsluzhivaniya i ee prilozheniya. 2-e izd. – M.: Sovetskoe radio, 1971. – 520 p.
4. Hinchin A.Ya. Rabotyi po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya – M.: FIZMATLIT, 1963. – 236 p.
5. Varlamov I.D. Matematychna model informatsiinykh potokiv avtomatyzovanykh system upravlinnia / I.D. Varlamov, S.S. Hatsenko // Systemy upravlinnia, navihatsii ta zviazku. – 2014. – Vyp. 4. – P. 47-56.
6. Maievskyi O.V. Puassonivski periodychni kuskovo statsionarni potoky ta otsinka yikh intensyvnosti / O.V. Maievskyi, O.V. Matsiuk, M.V. Pryimak, O.M. Pryimak // Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N.Karazina. – 2016. – P. 87-99.
7. Pidhurskyi O.I. Modeliuvannia superpozytsii neodnoridnykh potokiv tranzaktsii / O.I. Pidhurskyi // Rehionalna biznes-ekonomika ta upravlinnia. – 2017. – №3. – P. 126-135.
8. Pidhurskyi O.I. Doslidzhennia superpozytsii puassonivskoho ta rehuliarnoho potokiv tranzaktsii / O.I. Pidhurskyi, L.O. Volontyr // Ekonomika. Finansy. Menedzhment: aktualni pytannia nauky i praktyky. – 2017. – №5. – P. 71-84.
9. Bilchuk V.M. Teoriia ymovirnostei, vypadkovi protsesy ta matematychna statystyka: pidruchnyk. – Kh.: KhUPS. – 2009. – 436 p.
10. Abramchuk I.V. Vstup do matematychnoho analizu. Dyferentsialne chyslennia funktsii odniiei zminnoi: navchalnyi posibnyk / I.V. Abramchuk, N.V. Sachaniuk-Kavetska, L.I. Pedorchenko // – Vinnytsia: VNTU. – 2010. – 152 p.
11. Venttsel E.S. Teoriya veroyatnostey: Ucheb. dlya vuzov. – 6-e izd. ster. – M.: Vyissh. shk. – 1999. – 576 p.

ANNOTATION
ANALYSIS OF THE SUPERPOSITION OF TRANSACTION FLOWS WITH POISSON AND UNIFORM DISTRIBUTION LAWS

PIDHURSKYI Oleksandr,
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics,
Vinnytsia National Agrarian University
(Vinnytsia)

In the article the mathematical model of heterogeneous hybrid transaction flow has been derived as the superposition of Poisson flow of time intervals between transactions with the uniform one.

Classical and developed mathematical models of nonhomogeneous flows have been analyzed. The mathematical model of hybrid flow is represented as the probability distribution function of time intervals between transactions, density function and the first two moments of the distribution. In order to verify the mathematical model of hybrid flow the boundary values of Poisson and uniform flow characteristics have been applied for which the analytical expressions of the model are reducible to the known solutions.

Both the probability distribution and the density distribution graphs were obtained for various values of flow parameters with a uniform law as well as the relation between mathematical models of homogeneous and Poisson transaction flow superposition on one hand and Poisson and regular flows on the other hand.

This work is based on and is the continuation of previous studies.

Keywords: transaction flows, superposition of flows, hybrid flows, mathematical models, probability distribution, verification of the model.

Fig. 5. Lit. 11.

АННОТАЦИЯ

АНАЛИЗ СУПЕРПОЗИЦИИ ПОТОКОВ ТРАНЗАКЦИЙ С ПУАССОНОВСКИМ И РАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ПОДГУРСКИЙ Александр Игоревич,
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры моделирования
и информационных технологий в экономике,
Винницкий национальный аграрный университет (г. Винница)

В работе разработана математическая модель неоднородного гибридного потока транзакций, который является результатом суперпозиции пуассоновского потока и потока с равномерным законом распределения интервалов времени между транзакциями.

Проанализированы классические и вновь созданные математические модели неоднородных потоков и результаты их моделирования. Математическая модель гибридного потока разработана в виде функции распределения вероятностей длительности интервалов времени между транзакциями, функции плотности распределения и первых двух начальных моментов распределения. Для верификации математической модели гибридного потока были применены предельные значения характеристик пуассоновского и равномерного потоков, при которых аналитические выражения модели упрощаются к известным решениям. Для разных значений параметров потока с равномерным законом были построены и исследованы графики функции распределения, функции плотности распределения, а также проанализирована связь математической модели суперпозиции пуассоноского и равномерного потоков транзакций с математической моделью суперпозиции пуассоновского и регулярного потоков.

Данная работа является продолжением и развитием ранее проведенных исследований.

Ключевые слова: потоки транзакций, суперпозиция потоков, гибридные потоки, математические модели, законы распределения вероятностей, верификация модели.

Рис. 5. Лит. 11.

Інформація про авторів

ПІДГУРСЬКИЙ Олександр Ігорович – кандидат технічних наук, доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці, Вінницький національний аграрний університет (e-mail paraplane@meta.ua).

PIDHURSKYI Oleksandr – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics, Vinnytsia National Agrarian University (e-mail paraplane@meta.ua).

ПОДГУРСКИЙ Александр Игоревич – кандидат технических наук, доцент кафедры моделирования и информационных технологий в экономике, Винницкий национальный аграрный университет (e-mail paraplane@meta.ua).