

УДК 536.75

**АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА  
МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ  
ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ**

*Б. Х. Драганов, доктор технических наук*

*А. А. Халатов, академик НАН Украины*

*e-mail: nni.elektrik@gmail.com*

**Аннотация.** *Приведены соотношения взаимозависимости Онсагера-Казимира, принципа Кюри. Определены соотношения термодинамических сил через потоки для турбулентных многокомпонентных смесей. Изложены соотношения потоков диффузии и тепла в виде обобщенных соотношений Стефана-Максвелла. Представлена конкретная зависимость скорости производства энтропии.*

**Ключевые слова:** *соотношения симметрии Онсагера-Казимира, тождество Гиббса, турбулентная диффузия, обобщение Стефана-Максвелла, энтропия*

Всюду вокруг нас необратимые процессы, в которых симметрия во времени нарушена. Исследование этих процессов основано на концепции неравновесной термодинамики, которая представляет собой раздел макроскопической, феноменологической физики. В этом отношении значения имеют работы Онсагера [2], сформулирующие принцип наименьшего решения энергии и работы Пригожина [2], относящиеся к положениям наименьшего производства энтропии. Дьярмати [3] решил вопрос о соотношениях между принципами Онсагера и Пригожина и их последующих приближениях. Результаты этих исследований имеют существенное значение при решении практических задач.

**Цель исследований** – анализ гидродинамики и теплообмена многокомпонентных сред на основе линейных феноменологических соотношений.

**Материалы и метод исследований.** При термодинамическом равновесии производство энтропии  $\sigma$  равно нулю, и, таким образом, независимые компоненты скалярных сил и сопряженные с ними компоненты скалярных потоков одновременно также обращаются в нуль. Это условие, а также наиболее общая связь между независимыми потоками и силами выражаются в линейном приближении с помощью линейных кинематических конститутивных уравнений Онсагера:

$$J_i = \sum_{k=1}^f L_{ik} X_k \quad (i=1,2,\dots,f). \quad (1)$$

Здесь скаляры  $J_i$  и  $X_k$  обозначают независимые скалярные термодинамические потоки и силы, а в случае векторных и тензорных процессов – все декартовы компоненты соответствующих тензорных и векторных величин, входящих в билинейные выражения для производства энтропии.

Потоками называют скалярные потоки, а в векторном и тензорном случае – плотности потоков их скалярных компонентов. Коэффициенты Онсагера  $L_{ik}$ , разумеется, являются функциями локальных параметров состояния: температуры, давления, химических потенциалов, зависящих от концентраций, или, возможно, напряженности магнитного поля и т. п. Однако в линейной теории коэффициенты считаются не зависящими от потоков и сил, входящих в конститутивные линейные уравнения (1), т. е. от градиентов параметров локального состояния.

Особенности зависимости (1) определяются принципом Кюри [2]. Основное содержание принципа Кюри состоит в следующем: благодаря возможной пространственной симметрии в анизотропных системах число коэффициентов в линейных уравнениях уменьшается таким образом, что не все декартовы компоненты потоков зависят от компонента сил. Этот принцип

особенно важен в случае изотропных систем; теорема, которая может быть сформулирована для этого случая, и есть так называемый принцип Кюри. Как показали де Гроот и Мазур [4], в изотропных системах декартовы компоненты термодинамических сил различного тензорного ранга и вида преобразуются при вращении и инверсии таким образом, что сохраняются только связи между потоками и силами одинакового тензорного ранга.

Для изотропных систем принцип Кюри может быть сформулирован следующим образом: в изотропных системах явления, которые описываются термодинамическими силами и потоками различного тензорного ранга и вида (по крайней мере в случае взаимодействий, которые описываются с помощью конститутивных линейных уравнений), не влияют друг на друга.

С помощью принципа Кюри можно, используя пространственную симметрию системы, уменьшить число независимых коэффициентов в основных линейных уравнениях. Соотношения взаимности Онсагера – Казимира, которые следуют из инвариантности как классических, так и квантовомеханических уравнений движения отдельных частиц относительно обращения времени, приводят к дальнейшему уменьшению количества коэффициентов в линейных законах. Соотношения, о которых идет речь, впервые были получены Онсагером для случая так называемых переменных « $\alpha$ »-типа, т. е. таких переменных, которые являются четными функциями скоростей молекул. Позднее Казимир модифицировал соотношения взаимности и установил их справедливость также для являющихся нечетными функциями скоростей частиц. Общая форма соотношений Онсагера — Казимира, включающая оба случая (в скалярной форме и в случае равенства нулю магнитного поля и угловых скоростей), имеет вид:

$$L_{ik} = \varepsilon_i \varepsilon_k L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, f), \quad (2)$$

где  $f$  – количество независимо скалярных потоков и сил, входящих в конститутивные линейные кинематические уравнения. Здесь  $\varepsilon_i = \varepsilon_k = 1$ , если коэффициенты  $L_{ik}$  относятся к перекрестным эффектам.

Таким образом, поскольку

$$\varepsilon_i \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{Онсагер,} \\ -1 & \text{Казимир,} \end{cases}$$

мы говорим соответственно о симметричных соотношениях взаимности Онсагера и антисимметричных соотношениях взаимности Казимира.

**Результаты исследований.** Рассмотрим билинейное уравнение для производства энтропии

$$\sigma(i, x) = \sum_{i=1}^f ix_i \geq 0 \quad (3)$$

где  $f$  – количество независимых скалярных потоков  $J_i$  и сил  $X_i$ . Поскольку производство энтропии можно всегда представить в виде суммы произведений соответствующего числа потоков и сопряженных с ними сил соотношение (3) справедливо в самом общем случае независимо от того, даны или нет линейные соотношения, связывающие потоки и силы. В случае конститутивных линейных уравнений

$$J_i = \sum_{k=1}^j L_{ik} X_k \quad (i=1, 2, \dots, f), \quad (4)$$

используя соотношения взаимности Онсагера для коэффициентов

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k=1, 2, \dots, f), \quad (5)$$

величину  $\sigma$  также можно представить в виде однородного квадратичного выражения, содержащего термодинамические силы, т.е.

$$\sigma = \sum_{i,k=1}^f L_{ik} X_i X_k \geq 0. \quad (6)$$

В отличие от (3) это выражение основано уже на справедливости конститутивных линейных уравнений (4). Приведем соотношения для молекулярных потоков диффузии и тепла. Коэффициенты диффузии и коэффициенты термодиффузии для многокомпонентной среды не являются линейно независимыми [7]:

$$\sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha} Z_{\alpha} D_{T\alpha}(\xi) = 0; \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha} I_{\alpha} D_{\alpha\beta} = 0; (\beta=0,1,\dots, N), \quad (7)$$

где  $M_{\alpha}$  – молекулярная масса частицы компонента  $\alpha$ ;  $\xi(r,t)$  – скорость протекания соответствующей химической реакции.

Для турбулентных потоков диффузии  $I_{\alpha j}^T$  ( $\alpha=0,1,\dots, N$ ) и тепла  $I_{qj}^T$ , а также для потока энтропии турбулизации  $I_{(S_F)_j}$  существуют следующие кинетические конститутивные соотношения:

$$I_{\alpha j}^T = L_{00}^T X_{0j}^T - \sum_{\beta=1}^N L_{0\beta}^T X_{\beta j}^T;$$

$$I_{ij}^T = L_{\alpha 0}^T X_{0j}^T - \sum_{\beta=1}^N L_{\alpha\beta}^T X_{\beta j}^T; \quad (8)$$

$$I_{(S_F)_j} = -L_{FF} T_{Fj}, \quad (9)$$

где скалярные феноменологические коэффициенты  $L^T$ , зависящие от осредненных параметров состояния  $\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{Z}_{\alpha}$  ( $\alpha = 0,1,\dots, N$ ) и параметра турбулизационной энергии  $\bar{e}$ , характеризующего физическую природу турбулентной среды, удовлетворяют условиям Онсагера – Казимира ( $L_{\alpha\beta}^{\Sigma} = L_{\beta\alpha}^{\Sigma}$ ) и условиям (7).

После ряда преобразований получим выражение для турбулентных потоков диффузии  $d_{\alpha j}^T$  [5]:

$$d_{\alpha j}^T = -\bar{n}_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N D_{\alpha\beta} \left[ d_{\beta j}^T + K_{t\beta}^T \frac{T_j}{T} \right], (\alpha=0,1,\dots, N). \quad (10)$$

Здесь  $K_{t\beta}^T$  – турбулентное термодиффузионное отношение.

### Выводы

В заключение заметим, что для локально-стационарного состояния турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое

внутреннее равновесие, наиболее полное описание тепломассообмена в многокомпонентной среде можно получить соотношениями Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии и соответствующим выражением для потока тепла в турбулизированном континууме [6].

Следует подчеркнуть, что при анализе гидродинамических и тепломассовых процессов феноменологический подход (основанный на положениях неравновесной термодинамики) позволяет получить определяющее соотношение для термодинамических потоков диффузии и тепла, а также удобные для расчета алгебраические формулы, связывающие между собой коэффициенты молекулярного процесса [7].

### **Список литературы**

1. Onsager L. Reciprocal relations in irreversible processes // *Chem. Rev.* – 1960. – 15–37.
2. Пригожин И. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, Д. Кандепуди. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы / И. Дьярмати. – М.: Мир, 1974. – 304 с.
4. Де Грот С. Неравновесная термодинамика / С. де Грот, М. Мазур. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
5. Колесниченко А.В. Турбулентность многокомпонентных сред / А.В. Колесниченко А.В., М.Я. Маров. – М.: Наука, 1998. – 336 с.
6. Колесниченко А.В. Термодинамический анализ течений частично ионизированных примесей идеальных газов в условиях неполного химического равновесия / А.В. Колесниченко, Г.А. Тирский // Предпринт ИПМ АН СССР. – М., 1979. – № 77. – 27 с.
7. Долинский А.А. Гидродинамика техногенных выбросов в окружающую среду / А.А. Долинский, Б.Х. Драганов. – К.: Институт технической теплофизики НАН Украины, 2015. – 104 с.

**АНАЛІЗ ГІДРОДИНАМІКИ І ТЕПЛООБМІНУ  
БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СЕРЕДОВИЩ НА ОСНОВІ ЛІНІЙНИХ  
ФЕНОМЕНОЛОГІЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ**

*Б. Х. Драганов, А. А. Халатов*

**Анотація.** *Наведено співвідношення взаємозалежності Онсагера-Казимира, принципу Кюрі. Визначення співвідношення термодинамічних сил через потоки для турбулентних багатоконпонентних сумішей. Викладено співвідношення потоків дифузії і тепла у вигляді узагальнених співвідношень Стефана-Максвелла. Представлена конкретна залежність швидкості виробництва ентропії.*

**Ключові слова:** *співвідношення симетрії Онсагера-Казимира, тотожність Гіббса, турбулентна дифузія, узагальнення Стефана-Максвелла, ентропія.*

**ANALYSIS OF MULTICOMPONENT HYDRODYNAMICS AND  
HEAT TRANSFER MEDIUM ON THE BASIS OF LINEAR  
PHENOMENOLOGICAL RELATIONS**

*B. Draganov, A. Khalatov*

**Annotation.** *An interdependent relations of Onsager-Casimir, Curie principle. Determination of the ratio of the thermodynamic forces for turbulent flows through the multi-component mixtures. Set out flow ratio of diffusion and heat in the form of generalized Stefan-Maxwell relations. The concrete dependence of the rate of entropy production.*

**Keywords:** *symmetry relations Onsager-Casimir, identity Gibbs, turbulent diffusion, synthesis Stefan-Maxwell, entropy*