УДК 621.1.0164(03)

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СТЕНКИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА.

Б. Х. Драганов, доктор технических наук

e-mail: nni.elektrik@gmail.com

Аннотация. *Приведен метод решения нелинейных нестационарных теплопередач через одну и многослойню стенку для граничних русловий III рода. Для решения сформулированой задачи используется метод, основанный на сочетании положений малого параметра и конечних интегральных преобразований.*

Ключевые слова: нелинейная нестационарная теплопроводность, метод малого параметра, теплоемкость, коэффициент линейной зависимости, интегральное преобразования, граничне условия.

Цель исследований – разработать метод решения нелинейной нестационарной задачи передачи тепла через одно- и многослойную стенку.

Материалы и методика исследований. Как показывает опыт [1, 3], для многих материалов зависимость теплофизических характеристик от температуры будет линейной в достаточно широком диапазоне изменения температур. Обрабатывая по способу наименьших квадратов экспериментальные данные, опубликованные в литературе, выразим теплопроводность и удельную теплоемкость в виде

$$\lambda = \lambda_0(1 + \varepsilon t); \tag{1}$$

$$C = C_0(1 + \beta t), \tag{2}$$

где λ_0 – теплопроводность материалов при 0^0 С; C_0 – удельная теплоемкость при 0^0 С; ε, β – коэффициенты линейной зависимости теплопроводности и удельной теплоемкости от температуры.

Тогда для одномерной теплопередачи через однослойную стенку общее нелинейное уравнение теплопроводности

$$C_v(t_i)\frac{\partial t_i(x,y,z,\tau)}{\partial_\tau} = div[\lambda(t_i grad t_i(x,y,z,\tau)] + f(x,y,z,\tau) \qquad (3)$$

примет вид

$$C_v(t_i)\frac{\partial t_i(x,\tau)}{\partial_\tau} = \frac{\varepsilon}{\partial_x}\left[\lambda(t_i)\frac{\partial t_i(x,\tau)}{\partial_x}\right] + f(x,\tau), i = 1,2,\dots,n. \qquad (4)$$

Граничные условия II и III родов, куда входит теплопроводность λ, также становятся нелинейными.

Решение этих задач стало возможным благодаря разработке эффективных математических методов решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных, с одной стороны, и достижениям науки о теплофизических свойствах веществ, с другой.

Исследования показывают [1], что параметры ε и β являются малыми в том смысле, что можно пренебречь их квадратами и произведениями. Тогда в выражении для температуры параметры ε и β останутся нулевой и первой степени, то есть температуру будем искать в виде

$$t(x,\tau) = t_0 + \varepsilon t_{1\varepsilon} + \beta t_{1\beta}\,. \qquad (5)$$

Такое представление температуры позволяет ограничиться двумя приближения нулевым и двумя первыми по каждому их параметров ε и β. Нулевое приближение получается при нулевых значениях этих параметров. Физически это означает постоянство теплофизических характеристик взятых при 0^0 С, а сама задача нулевого приближения является линейной. Задачи первого приближения по ε и β получаются при подстановки выражения в нелинейное уравнение и приравниваем коэффициентов при первых степенях ε и β. В результате решения задач I приближения получаем функции (в градусах в квадрате), которые, будучи соответственно умноженные на малые параметры ε и β (в 1 /град), определяет поправки к нулевому приближению на нелинейность температур. Так, задача I приближения по параметру εдает поправку на нелинейность, учитывающую изменение теплопроводности λ от температуры, а задача I приближения по β - поправку на изменение удельной теплоемкости С от температуры.

Все три полученные линеаризованные задачи будем решать методом конечных интегральных преобразований. Изложим основы метода конечных интегральных преобразований для решения задач теплопроводности.

Исторически методы интегральных преобразований возникли позже классических, а метод интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах появился сравнительно недавно в работах Г. А. Гринберга [2] и Н. С. Кошлякова [3], а дальше был разработан А. В. Лыковым [4, 6], Г. Ф. Мучником [7] и др. В сочетании с методом малого параметра применительно к решению нелинейных задач теплопроводности однослойных и многослойных сред он был применен в работах [8-10].

Среди интегральных наиболее удобным является метод конечных интегральных преобразований, так как он позволяет переходить от изображений к оригиналам гораздо проще, чем в случаях других интегральных преобразований. Действительно, метод конечных интегральных преобразований, являясь обобщением метода разделения переменных, не требует сведения граничных условий к однородным, с одной стороны, и не приводит к трудностям, связанным с обратным переходом и неоднородными начальными условиями при применении преобразования Лапласа, – с другой. В то же время метод конечных интегральных преобразований приводит неоднородную краевую задачу теплопроводности в области изображений в случае однослойных стенок к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого элементарно, а в случае многослойных стенок – к $(n-1)$-мерной векторной системе $(2n+1)$ интегральных уравнений Вольтерра II рода, решение которых известно. В этом проявляется новая сторона метода конечных интегральных преобразований.

Укажем, что при совместном применении метода малого параметра и конечных интегральных преобразований ядра преобразований для всех приближений по всем параметрам будут одинаковыми и определяемыми лишь граничными условиями.

В результате применения изложенного метода конечных интегральных преобразований уравнение теплопроводности в области изображений перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение I порядка.

Результаты исследований. Метод решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности многослойных стенок на основе совместного метода малого параметра и конечних интегральных преобразований приведен в [10].

Для n-слойной стенки при линейной зависимости теплопроводности λ и удельной теплоемкости *С* от температуры

$$\lambda_i = \lambda_{0i}(1 + \varepsilon_i t_i), \tag{6}$$

$$C_i = C_{0i}(1 + \beta_i t_i), i = 1,2,3,\dots,n \tag{7}$$

параметры ε_i и β_i для большинства материалов являются малыми в том смысле, что можно пренебречь их квадратами и произведениями. Тогда нелинейность задачи будет обусловлена 2*n* малыми параметрами ε_i и β_i. Температуру в каждом слое можно представить в виде ряда Тейлора по степеням этих параметров ограничиваясь в силу их малости лишь нулевой и первой степенью:

$$\boldsymbol{t_i(x,\tau) = t_{0i}(x,\tau) + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon_K t_{Ki} + \sum_{m=n+1}^{2n} \beta_{m-n} t_m i = 1, 2, \dots, n,} \tag{8}$$

Используя тот факт, что по условию сопряжения тепловой поток по абсолютной величине и направлению относительно оси $\boldsymbol{x}$ через смежные контактирующие поверхности в данный момент времени один и тот же [5], обозначим его через функцию $\boldsymbol{q_i(\tau)}$:

$$\lambda_i(t_i)\frac{\partial t_i(l_i,\tau)}{\partial x} = \lambda_{i+1}(t_{i+1})\frac{\partial t_{i+1}(l_i,\tau)}{\partial x} = q_1(\tau);$$
$$i = 1,2,\dots,(n-1), \tag{9}$$

где l_i точка контакта. Аналогично температуре представим его в виде

$$q_i(\tau) = q_{0i}(\tau) + \sum_{K=1}^{n} \varepsilon_K q_{Ki} + \sum_{m=n+1}^{2n} \beta_{m-n} q_{mi}$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (10)$$

Соотношения (7) и (10) имеют наглядный математический и физический смысл. С математической точки зрения эти соотношения рассматриваются как функции $2n$ переменных ε_i, β_i и представляют собой первые члены разложения в ряду Тейлора при пренебрежении остальными членами. С другой стороны, формулы (8) и (10) показывают, что температуры в каждом слое и тепловые потоки на границах между слоями определяются слагаемыми, обусловленными постоянными составляющими теплопроводности и удельной теплоемкости C_o, и слагаемыми, учитывающими изменение теплофизических характеристик от температуры всех слоев. Последних по числу малых параметров будет $2n$.

Такое представление температур и тепловых потоков дает возможность расщепить нелинейную n-слойную задачу на *(2n + 1)* линейных задач n-слойных стенок. Это достигается следующим образом. Полагая в нелинейном уравнении ε_i и β_i равными нулю, приходим к линейной задаче, в которой теплофизические характеристики, взятые при 0 °С, постоянны – получаем задачу нулевого приближения. Задач I приближения будет $2n$ – по числу малых параметров, умноженных на число слоев. Они получаются подстановкой (8) и (10) в исходное нелинейное уравнение и приравниванием коэффициентов при первых степенях соответствующих параметров. Так, приравнивая члены при первой степени ε_i, получаем первую задачуIприближения, учитывающую влияние параметра ε_iна общее температурное поле n-слойной стенки; приравнивая коэффициенты при первой степени ε_2 — вторую задачу I приближения, учитывающую влияние ε_2,и т. д. до n-й задачи, учитывающей влияние ε_n. Аналогично получаем задачи I приближения по параметрам β_i от $(n+1) - й$ до $2n - й$.

Итак, мы обобщаем метод малого параметра на $2n$ параметров, ограничиваясь в силу их малости лишь нулевыми и I приближениями по этим параметрам, что говорит об асимптотическом решении нелинейной задачи в общепринятом методе [11]. Отметим, что метод разложения по нескольким малым параметрам нелинейных задач известен и изложен, например, применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям [12], а к уравнениям в частных производных[13].

Так как тепловые потоки нулевого приближения$\boldsymbol{q_{0i}(\tau)}$ (аналогично тепловые функции I приближения $\boldsymbol{q_i(\tau)}$, j $=\varepsilon,\beta)$ на основании равенства (2, 4) через смежные контактирующие среды будут одни и те же в данный момент времени, запишем их отдельно через каждую поверхность

$$\boldsymbol{\lambda_{0i}(t_i)\frac{\partial t_{0i}(l_i,\tau)}{\partial x} = q_{0i}(\tau);} \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{\lambda_{0(i+1)}(t_{i+1})\frac{\partial t_{0(i+1)}(l_i,\tau)}{\partial x} = q_{0i(\tau)}.} \qquad (12)$$

Это позволит линейную задачу для n-слойной стенки разбить на *n* однослойных «несвязанных» задач. «Мостиком связи» смежных i и (i+1) слоев будут служить одинаковые по величине и направлению тепловые потоки (функции) $q_j(\tau)(\,j=0,\varepsilon,\beta)$ в точках контакта $\boldsymbol{l_i}$.

Каждою однослойную задачу будем решать методом конечных интегральных преобразований, используя разработанную методику в (1.2) и (1.3). Решение получим в виде ряда, где под знаком суммы будут стоять интегралы от 0 до т от неизвестных функций $\boldsymbol{q_i(\tau)}$, одинаковых для смежных сред. Используяоставшиеся условия сопряжения, для 2-х полубесконечных тел в случае идеального контакта

$$\lambda_{01}(0,\tau) = \lambda_{02}(-0,\tau) \qquad (13)$$

получим систему трех интегральных уравнений Абеля; для n-слойной неограниченной пластины при идеальном контакте,

$$\lambda_{01}(0,\tau) = \lambda_{02}(-0,\tau) \qquad (14)$$

В итоге получим систему трех интегральных уравнений Абеля для n – слойной неограниченной пластины при идеальном контакте:

$$\boldsymbol{t_{0i}(l_i,\tau) = t_{0(i+1)}(l_i,\tau);\ i = 1,2,\dots,(n-1)} \qquad (15)$$

--- $(n—\mathrm{I})$-мерную векторную системы- (2n+1) интегральных уравнений Вольтерра I рода типа свертки, а при неидеальном контакте

$$\mathbf{q_{01}}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_i}}\left[\mathbf{t}_{0(i+1)}(\mathbf{l_i}, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{t_{0i}}(\mathbf{l_i}, \boldsymbol{\tau})\right];$$

$$i = 1,2, \dots, (n-1) \tag{16}$$

- такую же систему интегральных уравнений Вольтерра II рода.

Будем рассматривать неидеальный тепловой контакт как наиболее общий (от него можно перейти к идеальному, положив R достаточно малым, порядка 10^{-7}). Для тепловых потоков на границах слоев, введем $(n—\mathrm{I})$-мерный вектор-столбец

$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} \mathbf{q_1} \\ \mathbf{q_2} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{q_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Тогда выражение для потока (2.5) примет вид

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{q_0} + \sum_{K=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_K q_K} + \sum_{m=n+1}^{2n} \boldsymbol{\beta_{(m-n)} q_m}\,. \tag{18}$$

Для разработки общей методики нелинейного теплотехнического расчета многослойных стенок следует рассматривать конкретные задачи.

Выводы

Анализ результатов исследования зависимости теплофизических характеристик строительных материалов от температуры показал возможность их аппроксимации линейными функциями в диапазоне температур, характерных для реальных условий эксплуатации зданий. При этом коэффициенты зависимости теплопроводности и удельной теплоемкости от температуры ε и β имеют порядок 10^{-3}.

Список литературы

1. Фокин К. Ф. Строитеная теплотехника ограждающих частей зданий / К. Ф. Фокин. – М. Стройиздат, №973. – 287 с.

2. Гринберг Г. А. Изюранные вопросы математической теории эллектрических и магнитных явлений / Г. А. Гринберг. – М.–Л: Изд-во АН СССР, 1948. – 254 с.

3. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б.Глиер, М. М.Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

4. Лыков А. В. Конечные интегральные преобразования и их применения к решению задач теплопроводности / А. В.Лыков, А. В.Иванов // Тепло – и массообмен в процессах исперания. – М., 1958. – С. 105 – 148.

5. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

6. Лыков А. В. Методы решений нединейных уравнений нестационарной теплопроводности / А. В. Лыков // Изв. АН ССР. – 1970. – №5. – С. 109 – 150.

7. Мучник Г. Ф. Методы теории теплообмена / Г. Ф.Мучник, И. Б. Рубушов . – М.: Высшая школа, 1970. – Ч.1. – 288 с.

8. Айзен А. М. Проперіодичне нагрівання рідини через пластину у випадку залежності теплофізичних характеристик від температури / А. М. Айзен , М. М. Назарчук, Л. П. Чери. – К.: Наук. думка, 1972. – С. 44-48.

9. Айзен А. Н. Метод малого параметра в нелийных задачах теплопроводнсоти / А. М. Айзен, М. М. Назарчук, Л. Ф Черных // Тр. Киев. Зон. НИИ эксперимент. проектирования. – К., 1972. – Вып. 1. – С. 153-160.

10. Драганов Б. Х. Методика расчета теплового режима наружных ограждающих конструкций селькохозяйственных зданий / Б. Х. Драганов, Л. Ф. Черных, А. Р. Ферыш. – К.: Изд-во УСХА, 1991. – 126 с.

11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М.: Мир, 1972. – 274 с.

12. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях / А. Н. Крылов. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 400 с.

13. Метропольский Ю. А. Лекции по применению асимптоматических методов к решению уравнений в частных производных / Ю. А. Метропольский, Б. И. Моисенко. – К.: Наук. думка, 1968. – 414 с.

НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНА СТІНКА ЗА ГРАНИЧНИХ УМОВ III РОДУ

Б. Х. Драганов

Анотація. *Наведено метод розв'язання нелінійних нестаціонарних теплопередач через одну і багатошарову стінку для граничних умов III роду. Для вирішення сформульованого завдання використовується метод, заснований на поєднанні положень малого параметра і звичайних інтегральних перетворень.*

Ключові слова: ***нелінійна нестаціонарна теплопровідність, метод малого параметра, теплоємність, коефіцієнт лінійної залежності, інтегральне перетворення, граничні умови***

NONLINEAR TRANSIENT HEAT CONDUCTION WALL IN KIND BOUNDARY CONDITIONS III.

B. Draganov

Annotation. *A method for solution of nonlinear transient heat transfer through a single and multi-layer wall for the boundary of channel III kind. For the formulation of a problem solving method is used on the basis of the provisions of the promptness of a small parameter and finite integral transformation.*

Keywords: ***nonlinear transient heat transfer, small parameter method, the specific heat, the coefficient of linear dependence, the integral transformation of the boundary conditions***