УДК 621.1:536.2

ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕНОК

В. Г. Демченко, кандидат технических наук

Институт технической теплофизики НАН Украины

Б. Х. Драганов, доктор технических наук, профессор

e-mail: vit1986@ua.fm

Аннотация. *Разработан метод решения нелинейных нестационарных задач теплопередачи через однослойные и многослойные наружные ограждающие конструкции зданий с учетом зависимости их теплофизических характеристик от температуры, основанный на сочетании метода малого параметра и конечных интегральных преобразований.*

Предложены эффективные методы сведения нестационарных задач теплопередачи через многослойные стенки с учетом зависимости теплофизических характеристик от температуры к векторным интегральным уравнениям, а затем к системе алгебраических уравнений. Поставлены и решены задачи нестационарной теплопередачи через однослойные и многослойные ограждения с идеальными и неидеальными тепловыми контактами между слоями для условий резкого перепада температур наружного и внутреннего воздуха.

Ключевые слова: ***нестационарная теплопроводность, малого параметра, интегральных преобразований, ряд Тейлора, обобщенная зависимость***

Актуальность. Учет реальных значений теплофизических характеристик материалов в зависимости от температуры приводит к необходимости решения нелинейных I рода нестационарных задач теплопередач через однослойную и многослойную стенку наружных ограждений зданий. При этом необходимо учитывать влияние зависимости теплофизических характеристик материалов от их температуры на теплопередачи через наружные ограждающие конструкции зданий.

Анализ последних достижений и публикаций. Исторически методы интегральных преобразований возникли позже классических, а метод интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах появился сравнительно недавно в работах Г.А. Гринберга [1], а дальше был разработан А.В. Лыковым [2,3]. В сочетании с методом малого параметра он был применён применительно к решению нелинейных задач теплопроводности однослойных и многослойных сред [4 – 6].

Цель исследования – разработать метод решения задач нелинейных нестационарных теплопроводности многослойной стенки.

Материалы и методы исследования. Среди интегральных наиболее удобным является метод конечных интегральных преобразований, так как он позволяет переходить от изображений к оригиналам гораздо проще, чем в случаях других интегральных преобразований. Действительно, метод конечных интегральных преобразований, являясь обобщением метода разделения переменных, не требует сведения граничных условий к однородным, с одной стороны, и не приводит к трудностям, связанных с обратным переходом и одними начальными условиями при применении преобразования Лапласа, – с другой. В тоже время метод конечных интегральных преобразований приводит неоднородную краевую задачу теплопроводности в области изображений в случае однослойных стенок к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого элементарно, в случае многослойных стенок – к $(n — 1)$ мерной векторной системе $(2n+1)$ интегральных уравнений Вольтерра II рода, решение которых известно. В этом проявляется новая сторона метода конечных интегральных преобразований.

Результаты исследований. Приведенный выше метод используем для решения нелинейной нестационарной задачи теплопроводности многослойной стенки.

Для n-слойной стенки при линейной зависимости теплопроводности λи удельной теплоемкости C от температуры

$$\lambda_i = \lambda_{0i}(1 + \varepsilon_i t_i), \tag{1}$$

$$\text{C}_i = C_{0i}(1 + \beta_i t_i), \qquad i = 1,2,3 \dots, n \qquad (2)$$

Параметры ε_i и β_iдля большинства материалов являются малыми в том смысле,

что можно пренебречь их квадратами и произведениям

и. Тогда нелинейность задачи будет обусловлена $2n$ малыми параметрамиε_i и β_i. Температуру в каждом слое можно представить в виде ряда

Тейлора по степеням этих параметров ограничиваясь в силу их малости лишь нулевой и первой степенью.

$$t_i(x,\tau) = t_{0i}(x,\tau) + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon_K t_{Ki} + \sum_{m=n+1}^{2n} \beta_{m-n} t_m;$$

$$i = 1,2,3 \dots, n, \qquad (3)$$

Используя тот факт, что по условию сопряжения тепловой поток по абсолютной величине и направлению относительно оси X через смежные контактирующие поверхность в данный момент времени один и тот же, обозначим его через функцию $q_i(\tau)$

$$\lambda_i(t_i)\frac{\partial t_i(l_i,\tau)}{\partial x} = \lambda_{i+1}(t_{i+1})\frac{\partial t_{i+1}(l_i,\tau)}{\partial x} = q_1(\tau);$$

$$i = 1,2, \dots, (n-1), \qquad (4)$$

гдеl_i– точка контакта.

Аналогично температуре его можно представить в виде

$$q_i(\tau) = q_{0i}(\tau) + \sum_{K=1}^{n} \varepsilon_K q_{Ki} + \sum_{m=n+1}^{2n} \beta_{m-n} q_{mi};$$

$$i = 1,2, \dots, (n-1), \qquad (5)$$

Соотношения (3) и (5) имеют наглядный математический и физический смысл. С математической точки зрения эти соотношения рассматриваются как функции 2*n* переменных ε_i,β_i и представляют собой первые члены разложение в ряду Тэйлора при пренебрежении остальными членами. С другой стороны, (3) и (5) показывают, что температуры в каждом слое и тепловые потоки на границах между слоями определяются слагаемыми, обусловленными постоянными составляющими теплопроводности λ_0, удельной теплоемкости C_0, и слагаемыми, учитывающими изменение теплофизических характеристик от температуры всех слоев. Последних по числу малых параметров будет 2*n*.

Такое представление температур и тепловых потоков дает возможность расщепить нелинейную *n*-слойную задачу на (2*n*+1) линейных задач *n*-слойных стенок. Это достигается следующим образом. Полагая в нелинейном уравнении ε_i и β_iравными нулю, приходим к линейной задаче, в которой теплофизические характеристики, взятые при 0 ^{0}C, постоянны – получаем задачу нулевого приближения. Задач I приближения будет 2*n*. Они получаются подстановкой (3) и (5) в исходное нелинейное уравнение и приравниванием коэффициентов при первых степенях соответствующих параметров. Так, приравнивая члены при первой степени ε_i, получаем первую задачу I приближения, учитывающую влияние параметра ε_i на общее температурное поле *n*-слойной стенки; приравнивая коэффициенты при первой степени $\varepsilon_2 -$ вторую задачу Iприближения, учитывающую влияние ε_2, и т. д. до *n*–й задачи, учитывающей влияние ε_n. Аналогично получаем задачи I приближения по параметрамβ_iот

(n+1)-й до 2n-й. Итак, мы обобщаем метод малого параметра на 2n параметров, ограничиваясь в силу их малости лишь нулевым и I приближениями по этим параметрам, что говорит об асимптотическом решение нелинейной задачи в общепринятом методе [2,10]. Отметим, что метод разложения по нескольким малым параметром нелинейных задач известен и изложен, например, применительно к обыкновенным дифференциальным уравнением в [11], а к уравнениям в частных производных в [12].

Так как тепловые потоки нулевого приближения $q_{0i}(\tau)$ (аналогично тепловые функции I приближения $q_j(\tau), j = \varepsilon, \beta$) на основании равенства (4) через смежные контактирующие среды будут одни и те же в данный момент времени, запишем их отдельно через каждую поверхность

$$\lambda_{0i}(t_i)\frac{\partial t_{0i}(l_i,\tau)}{\partial x} = q_{0i}(\tau); \tag{6}$$

$$\lambda_{0(i+1)}(t_{i+1})\frac{\partial t_{0(i+1)}(l_i,\tau)}{\partial x} = q_{0i}(\tau). \tag{7}$$

Это позволит линейную задачу для n-слойной стенки разбить на n однослойных "несвязанных" задач. "Мостиком связи " смежных i и (i+1) слоев будут служить одинаковые по величине и направлению тепловые потоки (функции) $q_j(\tau)(j = 0, \varepsilon, \beta)$в точках контакта$l_i$. Каждую однослойную задачи будем решать методом конечных интегральных преобразований, используя разработанную методику. Решение получим в виде ряда, где под знаком суммы будут стоять интегралы от 0 доτ от неизвестных функций $q_j(\tau)$, одинаковых для смежных сред. Используя оставшиеся условия сопряжения, для двух полубесконечных тел в случае идеального контакта

$$t_{01}(0,\tau) = t_{02}(-0,\tau)\,, \tag{8}$$

получим систему трех интегральных уравнений Абеля.

Для *n*-слойной неограниченной пластины при идеальном контакте

$$t_{01}(l_i,\tau) = t_{0(i+1)}(l_i,\tau)\,; \quad i = 1,2,\dots,(n-1) \tag{9}$$

и имеем (*n*–1) мерную векторную систему (2*n*+1) интегральных уравнений Вольтерра I рода типа свертки, а при неидеальном контакте

$$q_{0i}(\tau) = \frac{1}{R_j}\left[t_{0(i+1)}(l_i,\tau) - t_{0i}(l_i,\tau)\right];$$

$$i = 1,2,\dots,(n-1), \tag{10}$$

т. е. такую же систему интегральных уравнений Вольтерра II рода. Будем рассматривать неидеальный тепловой контакт как наиболее общий (от него можно перейти к идеальному, положив *R* достаточно малым). Для тепловых потоков слоев введем (*n*–1) мерный вектор столбец

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ . \\ q_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда выражение для потока (10) примет вид

$$q(\tau) = q_0 + \sum_{K=1}^{n} \varepsilon_K q_K + \sum_{m=n+1}^{2n} \beta_{(m-n)} q_m. \tag{12}$$

Выводы

Приведенные теоретические исследования позволяют объяснить физические процессы, происходящие в легких конструкциях в летних и зимних условиях. Тем самым можно указать пути и средства для повышения эффективности теплоснабжения конкретного объекта.

Список литературы

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. А. Гринберг. – М.: Изд –во АН СССР, 1948. – 254 с.

2. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.

3. Лыков А.В. Некоторые аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности / А. В. Лыков // Изд- во АН СССР, 1970. – №5. –С. 109-150.

4. Табунщиков Ю.А. Теплоустойчивость и требуемое сопротивление теплопередачи / Ю. А. Табунщиков // Тр. НИИ строит. физики. – М., 1975. – Вып.10. – С. 52-59.

5. Драганов Б. Х. Методика расчёта теплового режима наружных ограждающих конструкций сельскохозяйственных зданий // Драганов Б. Х. , Л. Ф. Черных, А. Р. Ферт. – К.: Изд-во УСХА, 1991. –126 с.

6. Черных Л. Ф. К вопросу нестационарной теплопередачи через наружные ограждающие конструкции при переменных теплофизических характеристиках / Л. Ф. Черных. – К.: Будивельник, 1972. – С.18-191.

7. Фаренюк Р. Г. Оценка и повышение теплофизический качеств и надежности по теплозащите ограждающих конструкций зданий. Автореферат канд. наук.- / Р. Г. Фаренюк. – М., 1969. – 136 с.

8. Фокин К. Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий / К. Ф. Фокин. – М.:Стройиздат, 1973. – 287 с.

9. Ван Дейк М. Методы возмещений в механике жидкостей / М. Ван Дейк. – М.: Мир, 1967. – 311 с.

10. Коул Дж. Метод возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М.: Мир, 1972. –274 с.

11. Крылов А. Н. Лекции о приближённых вычислениях / А. Н. Крылов. – М.: Гостехиздат, 1954. – 400 с.

12. Митропольский Ю. А. Лекции по применению асимптоматических методов к решению уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Моисенков. – К.: Наук. думка, 1968. – 414 с.

References

1. Grinberg, G. A. (1948). Izbrannyye voprosy matematicheskoy teorii elektricheskikh i magnitnykh yavleniy [Selected questions of the mathematical theory of electrical and magnetic phenomena] – Moskow: Izd –vo AN SSSR, 254.

2. Lykov, A. V. (1967). Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conduction]. Moskow: Vysshaya shkola, 599.

3. Lykov, A. V. (1970). Nekotoryye analiticheskiye metody resheniya zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti [Some analytical methods for solving non-stationary heat conduction problems]. Izd- vo AN SSSR, 5, 109-150.

4. Tabunshchikov, Y.A. (1975). Teploustoychivost' i trebuyemoye soprotivleniye teploperedachi [Heat resistance and required heat transfer resistance]. Tr. NII stroit. Fiziki,10, 52-59.

5. Draganov, B. Kh., Chernykh, L. F., Fert, A. R.(1991). Metodika raschëta teplovogo rezhima naruzhnykh ograzhdayushchikh konstruktsiy sel'skokhozyaystvennykh zdaniy [Method for calculating the thermal conditions of external enclosing structures of agricultural buildings]. Kysv: Izd-vo USKHA, 126.

6. Chernykh, L. F. (1972). K voprosu nestatsionarnoy teploperedachi cherez naruzhnyye ograzhdayushchiye konstruktsii pri peremennykh teplofizicheskikh kharakteristikakh [To the problem of non-stationary heat transfer through external enclosing structures under variable thermophysical characteristics]. Kyiv: Budivel'nik,.18-191.

7. Farenyuk, R. G. (1969). Otsenka i povysheniye teplofizicheskiy kachestv i nadezhnosti po teplozashchite ograzhdayushchikh konstruktsiy zdaniy [Evaluation and improvement of thermal and physical properties and reliability of thermal protection of building envelopes.]. Moskow, 136.

8. Fokin, K. F. (1973). Stroitel'naya teplotekhnika ograzhdayushchikh chastey zdaniy [Building heat engineering of enclosing parts of buildings]. Moskow: Stroyizdat, 287.

9. Van Deyk , M. (1967). Metody vozmeshcheniy v mekhanike zhidkostey [Methods of compensation in the mechanics of liquids]. Moskow: Mir, 311.

10. Koul, Dzh. (1972). Metod vozmushcheniy v prikladnoy matematike [The perturbation method in applied mathematics]. Moskow: Mir, 274.

11. Krylov, A. N. (1954). Lektsii o priblizhënnykh vychisleniyakh [Lectures on approximate calculations]. Moskow: Gostekhizdat, 400.

12. Mitropol'skiy, Y. A., Moisenkov, B. I.(1968). Lektsii po primeneniyu asimptomaticheskikh metodov k resheniyu uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Lectures on the application of asymptotic methods to the solution of partial differential equations]. Kyiv: Naukova dumka, 414.

ОСНОВИ РОЗВЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ СТІНОК

В. Г. Демченко, Б. Х. Драганов

Анотація. *Розроблено метод розв'язання нелінійних нестаціонарних задач теплопередачі через одношарові і багатошарові зовнішні огороджувальні конструкції будівель з урахуванням залежності їх теплофізичних характеристик від температури, заснований на поєднанні методу малого параметра і кінцевих інтегральних перетворень.*

Запропоновано ефективні методи зведення нестаціонарних задач теплопередачі через багатошарові стінки з урахуванням залежності теплофізичних характеристик від температури до векторних інтегральних рівнянь, а потім до системи алгебраїчних рівнянь. Поставлені і вирішені задачі *нестаціонарної теплопередачі через одношарові і багатошарові огорожі з ідеальними і недосконалими тепловими контактами між шарами для умов різкого перепаду температур зовнішнього і внутрішнього повітря.*

Ключові слова: ***нестаціонарна теплопровідність, малого параметра, інтегральних перетворень, ряд Тейлора, узагальнена залежність***

FUNDAMENTALS SOLVING NONLINEAR NONSTATIONARY PROBLEMS THE HEAT MULTILAYER WALL

V. G. Demchenko, B. H. Draganov

Abstract. *A method for solving nonlinear nonstationary heat transfer problems through single-layer and multi-layer external building envelopes is developed, taking into account the dependence of their thermophysical characteristics on temperature, based on a combination of the small parameter method and finite integral transformations.*

Effective methods are proposed for reducing non-stationary heat transfer problems through multilayer walls, taking into account the dependence of thermal characteristics on temperature to vector integral equations, and then to a system of algebraic equations. The problems of non-stationary heat transfer through single-layered and multilayer fences with ideal and non-ideal thermal contacts between layers for the conditions of sharp temperature difference of the external and internal air have been solved and solved.

Keywords*: transient heat transfer, small parameter, integral transformations, Taylor series, generalized dependence*