

УДК 514.18

РУХ ЧАСТИНКИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ, ЯКА ЗДІЙСНЮЄ КОЛИВАЛЬНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПРОСТОРІ

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Анотація. *Наведено траєкторно-кінематичні властивості руху частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальні переміщення в просторі. Встановлено, що для такої площини, найшвидше абсолютну та відносну траєкторії стабілізують частинки за найбільшим коефіцієнтом тертя. Початкова швидкість та напрям кидання впливає на час та місце стабілізації руху. Кут нахилу шорсткої коливальної площини значно впливає на форму абсолютної та відносної траєкторії частинок після стабілізації їх переміщення – вони є зигзагоподібними, амплітуда яких залежить від параметрів коливання.*

Ключові слова: *рух частинки, горизонтальна площина, коливальні переміщення, система диференціальних рівнянь, траєкторія, швидкість*

Актуальність. Встановлення закономірностей руху частинки по різних поверхнях дозволяє провести розрахунок параметрів багатьох робочих органів сільськогосподарських машин. Дослідження траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки потребує формування системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та її наближеного розв'язку, що є досить трудомісткими процесами і без застосування сучасних пакетів символічної алгебри здійснити практично не можливо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В праці [1] було досліджено рух частинки по горизонтальній шорсткій площині, яка здійснює поступальні переміщення по колу. Розширення цих досліджень можливе тільки за рахунок використання сучасних комп'ютерних технологій моделювання [2 - 4].

Мета дослідження – розробити для середовища символічної алгебри Maple комп'ютерну модель руху частинки по горизонтальній площині, яка

здійснює коливальні переміщення в просторі, та за допомогою обчислювальних експериментів з'ясувати її траєкторно-кінематичні властивості.

Матеріали і методи дослідження. Дослідження виконувалися з використанням комп'ютерної технології формування закону руху та аналізу траєкторно-кінематичних характеристик із співставленням їх з відомими результатами. Лістинг maple-моделі *PlaneOxyMoveOx_t* формування закону руху частинки по шорсткій горизонтальній площині у часі та дослідження її траєкторно-кінематичних властивостей представлено на сайті geometry.com.ua.

Результати досліджень та їх обговорення. Існує необмежена кількість поступальних переміщень горизонтальної площини в просторі *Oxyz*, закони яких можуть бути представлені вектор-функцією $\mathbf{M}[x(t), y(t), z(t)]$. Найпростішими із них є:

- прямолінійне вздовж осі *Ox* - $\mathbf{M}[vt, 0, 0]$;
- рівноприскорене вздовж осі *Ox* - $\mathbf{M}\left[vt + \frac{wt^2}{2}, 0, 0\right]$;
- коливальне вздовж осі *Ox* - $\mathbf{M}\left[l \cos(vt) + \sqrt{L^2 - \sin^2(vt)}, 0, 0\right]$;
- коливальне по колу в площині *Oxy* - $\mathbf{M}[l \cos(vt), l \sin(vt), 0]$ та інші.

Нехай площина здійснює поступальний рух по колу, наприклад:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}[l \sin(vt), l \cos(vt), 0], \quad (1)$$

де $v, \text{с}^{-1}$ - кутова швидкість; $l, \text{м}$ - амплітуда коливань.

Підставимо вирази $u = u(t)$, $v = v(t)$ шуканої траєкторії частинки у внутрішніх u, v -координатах до рівняння рухомої горизонтальної площини $\mathbf{R}[u, v, 0]$. Тоді отримаємо абсолютну $\mathbf{r}(t)$ та відносну $\boldsymbol{\rho}(t)$ траєкторії частинки у системі декартових координат *Oxyz*, відповідно:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}[u(t), v(t), 0] + \mathbf{M}[l \sin(vt), l \cos(vt), 0] = \mathbf{r}[u(t) + l \sin(vt), v(t) + l \cos(vt), 0], \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{\rho}[u(t), v(t), 0]. \quad (3)$$

В проекціях на орти $u \equiv R'_u$ і $v \equiv R'_v$ тригранника $OuvN$ векторне рівняння руху частинки у функції параметра часу t буде мати вигляд:

$$\begin{cases} Ou := m W \cos(\widehat{R'_u, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{R'_u, \mathbf{G}}) - f F_N \cos(\widehat{R'_u, \boldsymbol{\tau}}) \\ Ov := m W \cos(\widehat{R'_v, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{R'_v, \mathbf{G}}) - f F_N \cos(\widehat{R'_v, \boldsymbol{\tau}}), \end{cases} \quad (4)$$

а в проекціях на орти T і P тригранника $OTPN$:

$$\begin{cases} OT := m W \cos(\widehat{T, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) \\ OP := m W \cos(\widehat{P, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, P}) \end{cases}, \quad (5)$$

де $W = |\mathbf{w}|$ - величина абсолютного прискорення \mathbf{w} частинки; R'_u, R'_v - вектори дотичних відповідно до u, v - координатних ліній поверхні вздовж траєкторії у відносному русі частинки;

$T \equiv \boldsymbol{\tau}, P$ - вектори Дарбу вздовж траєкторії у відносному русі частинки;

N - вектор нормалі поверхні вздовж траєкторії у відносному русі частинки.

За рівнянням абсолютної траєкторії $\mathbf{r}(t)$ знайдемо всі залежності, які входять до систем рівнянь (4) - (5), зокрема:

- вектор $\mathbf{w}(t)$ прискорення та його величину:

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{w} \left[\frac{d^2}{dt^2} u(t) - v^2 l \sin(vt), \frac{d^2}{dt^2} v(t) - v^2 l \cos(vt), 0 \right], \quad (6)$$

$$W(t) = \left| \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) \right| = \sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) + v l \cos(vt) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) - v l \sin(vt) \right)^2}, \quad (7)$$

- косинуси кутів між вектором \mathbf{w} і векторами $R'_u \equiv u$ і $R'_v \equiv v$ дотичних u, v - координатних ліній площини $R(u, v)$:

$$\cos(\widehat{\mathbf{w}, R'_u}) = \frac{\frac{d^2}{dt^2} u(t) - v^2 l \sin(vt)}{\sqrt{v^2 l \left(v^2 l - 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \cos(vt) + \frac{d^2}{dt^2} u(t) \sin(vt) \right) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)^2}}, \quad (8)$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{w}, R'_v}) = \frac{\frac{d^2}{dt^2} v(t) - v^2 l \cos(vt)}{\sqrt{v^2 l \left(v^2 l - 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \cos(vt) + \frac{d^2}{dt^2} u(t) \sin(vt) \right) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)^2}}. \quad (9)$$

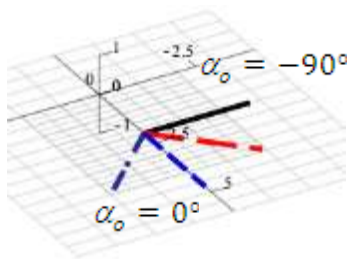
Підстановка вище одержаних виразів до (4) і (5) приводить до систем диференціальних рівнянь законів руху частинки в проекціях на орти відповідно: u і v тригранника $OuvN$:

$$\begin{cases} Ou := m(-l \sin(vt) v^2 + \frac{d^2}{dt^2} u(t)) = -\frac{f mg \frac{d}{dt} u(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} \\ Ov := m(-l \cos(vt) v^2 + \frac{d^2}{dt^2} v(t)) = -\frac{f mg \frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} \end{cases}, \quad (10)$$

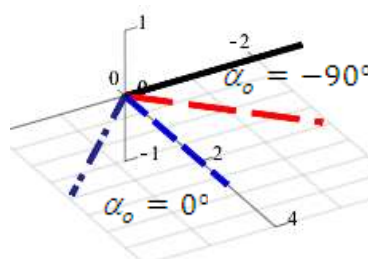
T і P тригранника $OTPN$:

$$\begin{cases} OT := \frac{m\left(\frac{d}{dt} u(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) - v^2 l \sin(vt)\right) + \frac{d}{dt} v(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) - v^2 l \cos(vt)\right)\right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} = -fmg \\ OP := \frac{d}{dt} u(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) - v^2 l \cos(vt)\right) - \frac{d}{dt} v(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) - v^2 l \sin(vt)\right) = 0 \end{cases}. \quad (11)$$

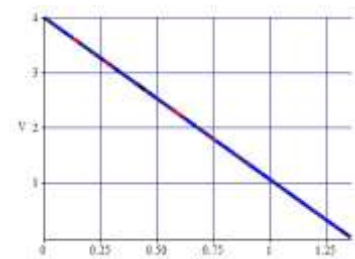
На рис.1 побудовано абсолютну $r(t)$, відносну $\rho(t)$ траєкторії частинки, графіки її абсолютної швидкості $V(t)$ траєкторії залежно від кута кидання частинки $\alpha_o = -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ за вихідних умов: коефіцієнт тертя $f = 0.3$, початкова швидкість $V_o = 4\text{м/с}$, амплітуда $l = 2\text{м}$ і кутова швидкість обертання $v = 0\text{с}^{-1}$ - площина нерухома. Зрозуміло, що за цих вихідних умов абсолютні та відносні траєкторії і швидкості частинки збігаються.



а)



б)



в)

Рис.1. Абсолютні $r(t)$, відносні $\rho(t)$ траєкторії та швидкості $V(t)$ частинки

Візьмемо кутову швидкість обертання рівною $v = 2$. Із рис.2 випливає, що абсолютні $r(t)$ та відносні $\rho(t)$ траєкторії через проміжок часу $t \approx 12$

переходять у кола, а абсолютні $V(t)$ та відносні $V_\rho(t)$ швидкості частинок стають постійними величинами. Після стабілізації радіуси кіл абсолютних траєкторій $r(t)$ дорівнюють $R_r = \frac{fg}{v^2} = 0.74$, а швидкість частинки $V_r = \frac{fg}{v} = 1.47$. Для відносних траєкторій $\rho(t)$ та швидкості $V_\rho(t)$ ці значення є більшими - $R_\rho = l\sqrt{1 - \left(\frac{fg}{lv^2}\right)^2} = 1.84$ і $V_\rho = R_\rho v = 3.72$ [1]. Звернемо увагу на суттєвий вплив кута α_o кидання частинок на положення та форму абсолютних $r(t)$ та відносних $\rho(t)$ траєкторій, на характер графіків абсолютної $V(t)$ та відносної $V_\rho(t)$ швидкостей частинок до стабілізації їх руху.

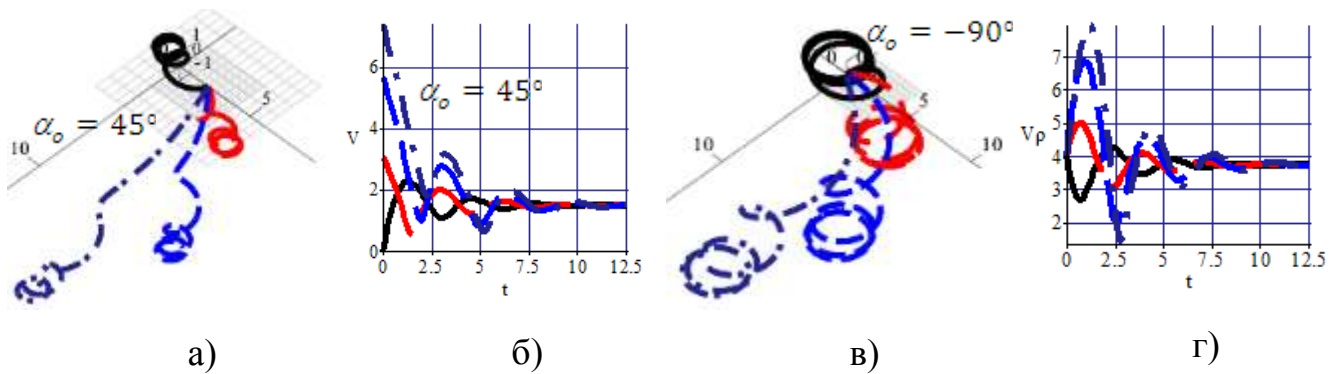


Рис. 2. Траєкторії $r(t)$, $\rho(t)$ та графіки швидкостей $V(t)$, $V_\rho(t)$ частинки залежно від кута α_o кидання

Якщо кинути частинки в одному напрямі $\alpha_o = -45^\circ$, але з різним коефіцієнтом тертя $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$, то частинки з більшим коефіцієнтом тертя швидше виходять на траєкторію по колу (рис.3).

Частинки, кинуті з різною початковою швидкістю $V_o = 1, 2, 4, 8$ в одному напрямі $\alpha_o = -45^\circ$ з однаковим коефіцієнтом тертя $f = 0.3$ майже одночасно стабілізують власні траєкторії, але їх положення від місця кидання пропорційне початковій швидкості V_o (рис.4).

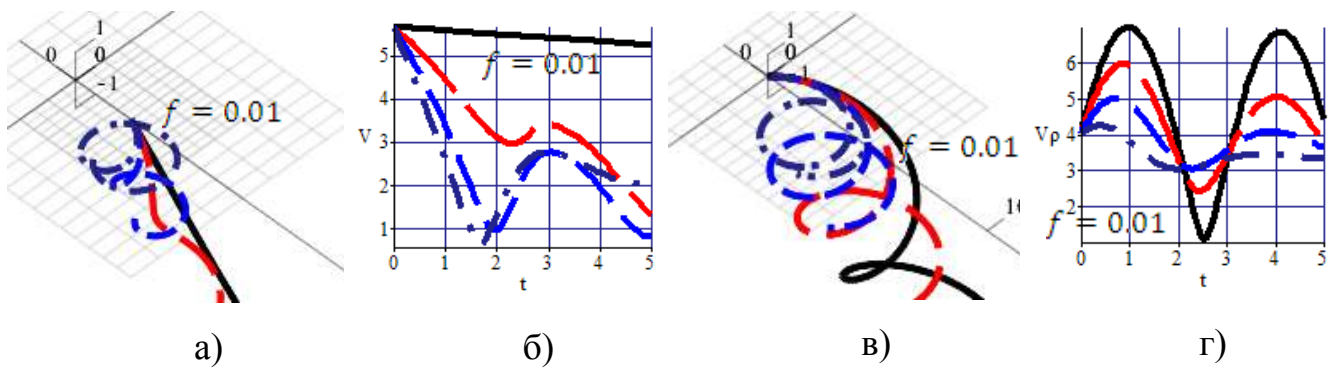


Рис.3. Траєкторії $r(t)$, $\rho(t)$ та графіки швидкостей $V(t)$, $V_p(t)$ частинки залежно від коефіцієнта тертя f

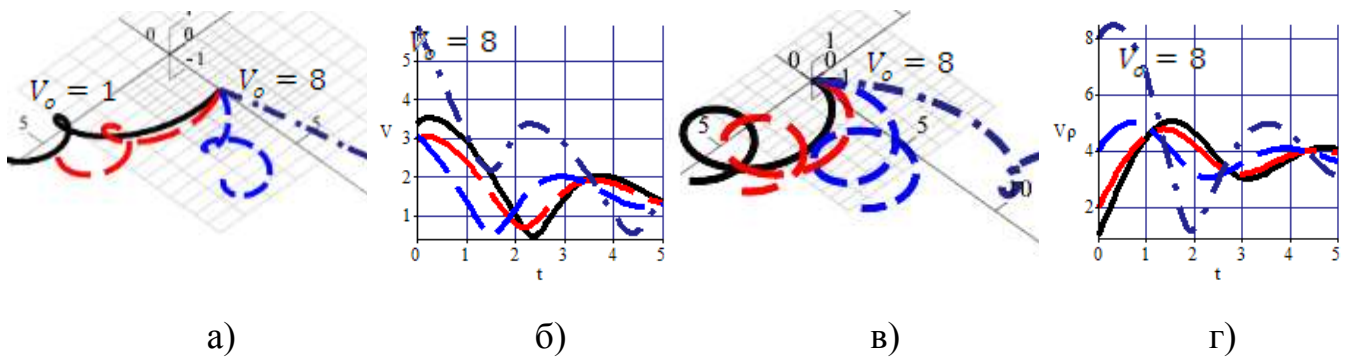


Рис. 4. Траєкторії $r(t)$, $\rho(t)$ та графіки швидкостей $V(t)$, $V_p(t)$ частинки залежно від початкової швидкості V_0

Зменшимо кутову швидкість обертання $\nu = 1$ площини ($f = 0.3, V_0 = 4$). Прямування графіків відносних швидкостей $V_p(t)$ до нуля (рис.5, г) говорить про те, що частинки зупиняються в площині - перестають ковзати в ній $lv^2 < fg$ [1].

Цікавим є рух частинки із характерним співвідношенням амплітуди l , кутової швидкості ν обертання площини і коефіцієнта тертя f , зокрема щоб виконувалася тотожність $lv^2 = fg$. Це можна виконати одним із трьох способів - визначити третій за двома вихідними параметрами: 1) амплітуду $l = \frac{fg}{\nu^2}$; 2)

швидкість обертання $v = \sqrt{\frac{f g}{l}}$; 3) коефіцієнт тертя $f = \frac{l v^2}{g}$. На рис.6 побудовано траєкторії і графіки їх швидкостей за першим способом: $f = 0.3, v = 2$, тоді $l = 0.736$. Стабілізація руху відбулась вже через проміжок часу $t \approx 2$.

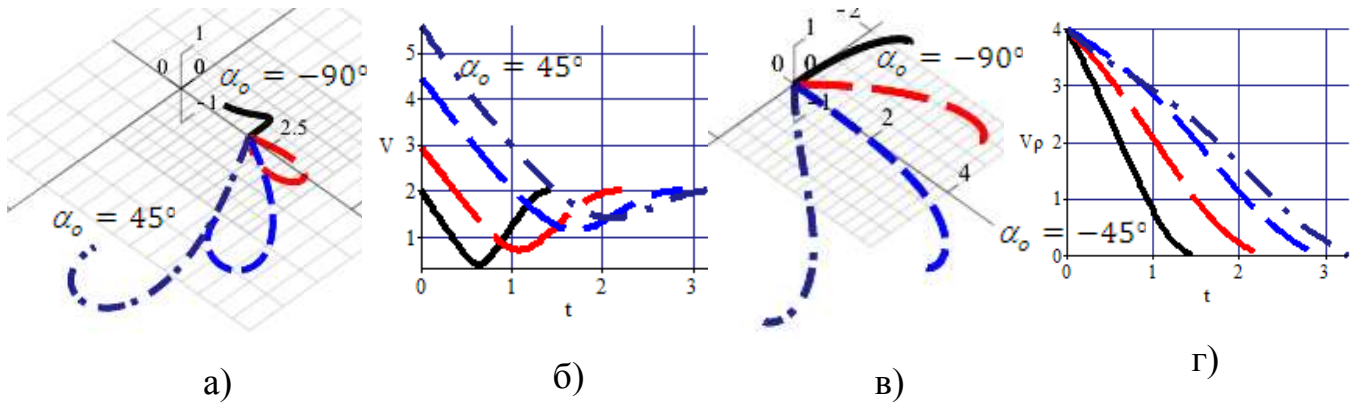


Рис.5. Траєкторії $r(t), \rho(t)$ та графіки швидкостей $V(t), V_\rho(t)$ частинки залежно від кута кидання α_0

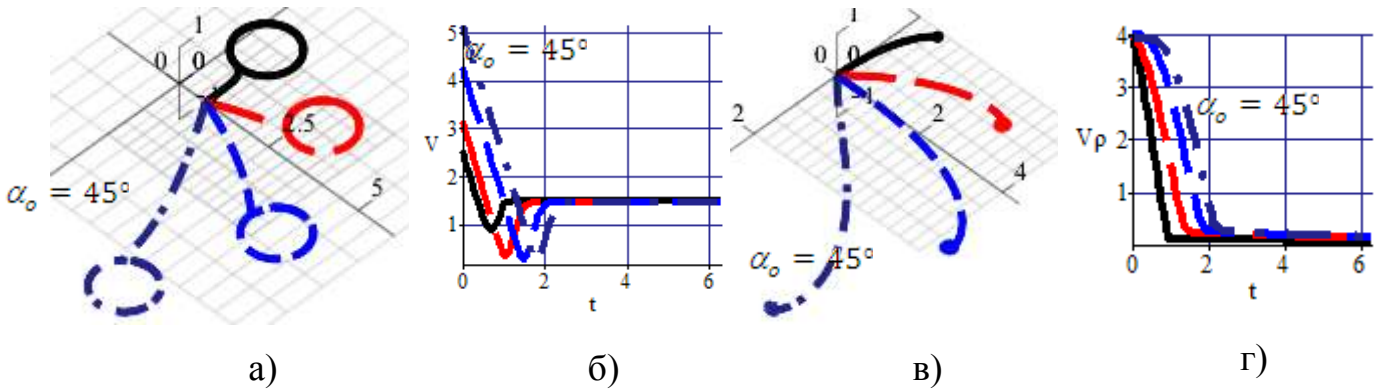


Рис.6. Траєкторії $r(t), \rho(t)$ та графіки швидкостей $V(t), V_\rho(t)$ частинки в граничному режимі вихідних параметрів

Якщо в моделі (1) встановити переносний рух горизонтальної площини так, щоб амплітуда вздовж осі Oy була у два рази більша амплітуди вздовж осі Ox :

$$M = M[l \sin(vt), 2l \cos(vt), 0], \quad (12)$$

то після стабілізації руху частинок їх траєкторіями будуть криві еліптичної форми, положення яких залежить від кута α_0 їх кидання (рис. 7). Графіки абсолютних $V(t)$ та відносних $V_p(t)$ швидкостей частинок є зигзагоподібними.

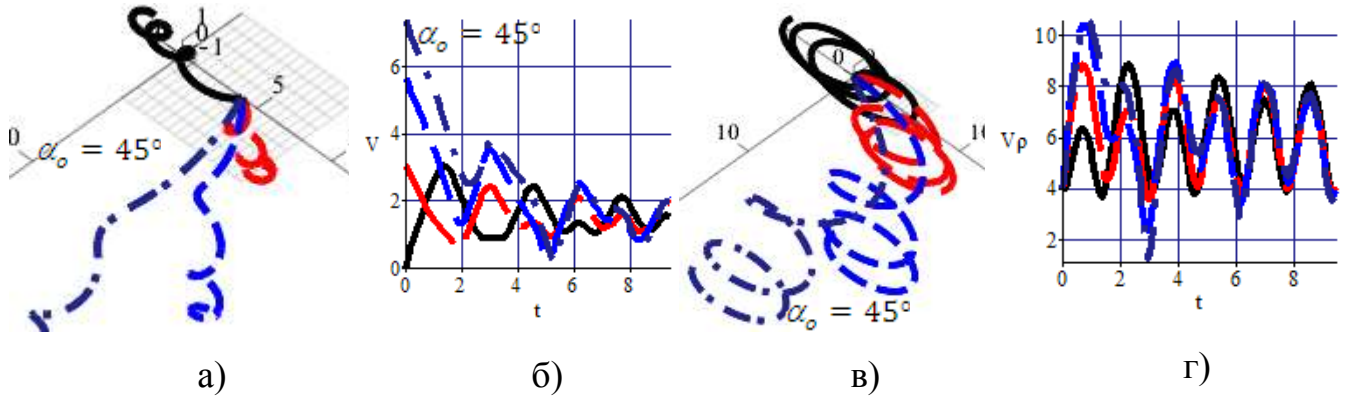


Рис. 7. Траєкторії $r(t)$, $\rho(t)$ та графіки швидкостей $V(t)$, $V_p(t)$ частинки за різної амплітуди коливання площини

Висновки і перспективи. 1. Розділення зернового вороху на окремі фракції на шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює коливальні переміщення в площині, можна здійснити тільки за рахунок неоднакових коефіцієнтів тертя частинок, або ж різного напрямку їх кидання по площині. Вплив початкової швидкості кидання частинки впливає тільки на час стабілізації її руху. При певних відношеннях кутової швидкості кривошипа та коефіцієнта тертя частинки можлива її зупинка в коливальній площині, що для сепарації є неприпустимим.

2. Показано, що для горизонтальної шорсткої площини, яка здійснює зворотно-коливальні переміщення, найшвидше стабілізують абсолютну та відносну траєкторії частинки за найбільшим коефіцієнтом тертя. Частинки з меншим коефіцієнтом тертя мають меншу амплітуду абсолютної траєкторії. Початкова швидкість та напрям кидання впливає на час та місце стабілізація руху.

3. Кут нахилу шорсткої коливальної площини значно впливає на форму абсолютної та відносної траєкторії частинок після стабілізації їх переміщення – вони є зигзагоподібними, амплітуда яких залежить від параметрів колювання.

Список літератури

1. Войтюк Д.Г. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій площині, яка здійснює горизонтальні криволінійні поступальні колювання / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Техніка АПК. - 2004. - № 1011. - С.26-28.
2. Несвідомін А.В. Моделювання руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює прямолінійні коливальні переміщення / А.В. Несвідомін // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць МДПУ ім. Б. Хмельницького. - 2015. - Вип.4. - С.100-104.
3. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба. - Гродно: ГрГУ, 2007.- 458 с.
4. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. - Гродно-Таллин, 2007. - 458 с.

References

1. Voitiuk, D.H., Pylypaka, S.F. (2014). Doslidzhennia rukhu materialnoi chastynky po shorstkii ploshchyni, yaka zdiisniuie horyzontalni kryvoliniini postupalni kolyvannia [Investigation of motion of a material particle on a rough plane, which performs horizontal curvilinear forward oscillations]. Tekhnika APK, 1011, 26-28.
2. Nesvidomin, A.V. (2015). Modeliuvannia rukhu chastynky po shorstkii horyzontalnii ploshchyni, yaka zdiisniuie priamoliniini kolyvalni peremishchennia [Modeling of motion of a particle on a rough horizontal plane, which carries out straight-line oscillatory displacements]. Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk prats MDPU im. B. Khmelnytskoho, 4, 100-104.
3. Alad'yev, V.Z., Boyko, V.K., Rovba, E.A. (2007). Programmirovaniye i razrabotka prilozheniy v Maple [Programming and developing applications in Maple]. Grodno: GrGU, 458.
4. Alad'yev, V.Z., Boyko, V.K., Rovba, E.A. (2007). Programmirovaniye i razrabotka prilozheniy v Maple [Programming and developing applications in Maple]. Grodno-Tallin, 458.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Несвидомин

Аннотация. Приведены траекторных-кинематические свойства движения частиц по горизонтальной плоскости, совершающей колебательные

перемещения в пространстве. Установлено, что для такой плоскости быстрее абсолютную и относительную траектории стабилизируют частицы с наибольшим коэффициентом трения. Начальная скорость и направление бросания влияет на время и место стабилизации движения. Угол наклона шероховатой колебательной плоскости значительно влияет на форму абсолютной и относительной траектории частиц после стабилизации их перемещения - они являются зигзагообразными, амплитуда которых зависит от параметров колебания.

Ключевые слова: *движение частицы, горизонтальная плоскость, колебательные перемещения, система дифференциальных уравнений, траектория, скорость*

PARTICLE MOVEMENT BY THE HORIZONTAL PLANE WHICH MAKES VIBRATIONAL DISPLACEMENTS IN SPACE

A. Nesvidomin

Abstract. *Trajectory-kinematic properties of particle motion along a horizontal plane that performs vibrational displacements in space are presented. It is established that for such a plane the absolute and relative trajectories faster stabilize the particles with the greatest coefficient of friction. The initial speed and direction of the cast affect the time and place of stabilization of the movement. The angle of inclination of a rough vibrational plane significantly affects the shape of the absolute and relative trajectory of the particles after stabilization of their motion - they are zigzag, whose amplitude depends on the vibration parameters.*

Key words: *particle motion, horizontal plane, vibrational displacements, system of differential equations, trajectory, speed*