УДК 681.5.07

# ПРО ПРОЕКТУВАННЯ МАЛОЧУТЛИВИХ ПРИСКОРЮВАЛЬНО-ФОКУСУЮЧИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ

***Л.А.Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук, доцент***

***Національний університет біоресурсів і природокористування України***

*E-mail:nubip.ea@gmail.com*

**Анотація.** *Розглянуто математичні моделі задач, що входять у комплекс задач проектування малочутливих прискорювально-фокусуючих систем. При такому підході розрахунок оптимальних параметрів керування здійснено з урахуванням можливих відхилень їх розрахункових значень на реальних режимах. Для урахування вимог до чутливості застосовано алгоритми практичної стійкості для параметричних систем у просторі функцій чутливості. У рамках сформульованих задач досліджено рівняння руху частинок у прискорювальному полі напруги за відсутності сил кулонівської взаємодії. Наведено постановки задач для розрахунку структури прискорювача з оптимальними характеристиками пучка у динаміці на реальних режимах. Для випадку релейного керування вихідні задачі оптимізації зведено до задач оптимального вибору точок перемкнення за наявності вимог до чутливості.*

**Ключові слова:** ***математична модель, чутливість, практична стійкість, параметрична система, динамічні обмеження***

**Актуальність.** До розв’язання задач оптимізації за допомогою методів параметризації призводять проблеми проектування різних складених систем [1]. При цьому вихідну задачу керування зводять до скінченновимірної задачі нелінійного програмування відносно параметрів, що характеризують перехідний процес, функції керування та структуру об’єкта керування.

На практиці, в силу різного роду фізичних і технологічних причин, значення реальних параметрів завжди відрізняються від розрахункових (оптимальних), що веде до змінювання характеристик і якості функціонування системи. Якщо величини відхилень характеристик виявляться досить великими, то досліджувана система стає взагалі непрацездатною. У зв'язку з цим набувають актуальності задачі проектування малочутливих (нечутливих) систем керування та розрахунку гарантованої чутливості [2, 3].

Виявляється поширені при проектуванні реальних систем задачі чутливості тісно зв'язані з постановками задач практичної стійкості параметричних систем. Останнє дозволяє застосовувати алгоритми практичної стійкості у відповідному просторі функцій [2, 3]. Конкретизацією такого підходу виступають задачі, що входять у комплекс задач проектування малочутливих прискорювально-фокусуючих систем для рівняння руху частинок у прискорювальному полі напруги без урахування сил кулонівської взаємодії.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Одним із напрямків розвинення теорії стійкості є чисельне розв'язання задач стійкості на скінченному проміжку часу [1]. На відміну від інших постановок [1, 2], аналіз стійкості параметричних систем [2, 3] дозволяє значно розширити коло досліджуваних задач та розв'язувати їх чисельно. Крім того, такі постановки є важливою складовою задач проектування малочутливих систем керування.

**Мета дослідження —** розробка чисельних методів розв'язання задач проектування малочутливих прискорювально-фокусуючих систем методами практичної стійкості.

**Матеріали та методика дослідження.** У роботі застосовуються методи теорії стійкості, чутливості та структурно-параметричної оптимізації.

**Результати досліджень та їх обговорення.** Розглянемо одну з моделей рівнянь руху заряджених частинок [1] вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = A(x,t,\alpha)y,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

де $x$ − вектор поздовжніх координат вимірності 2; $y$ − вектор радіальних складових вимірності 2 у випадку аксіального симетричного руху і вимірності 4 у загальному випадку; $\alpha$ − вектор параметрів керування.

Конкретизацією рівнянь (1) руху частинок у прискорювальному полі напруги $E$ без урахування сил кулонівської взаємодії є рівняння вигляду

$$\frac{d(mv)}{dt} = ZeE\,. \tag{2}$$

Тут Z − зарядове число, $m$ − динамічна маса ($m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0$, $m_0$ − маса покою), $c$ − швидкість світла, $\beta = \frac{|v|}{c}$ − зведена швидкість частинки, $\gamma = \frac{m}{m_0}$ − її зведена енергія, $|v|$− абсолютне значення швидкості, $e$ − заряд частинки.

Припустимо тепер, що змінювання зовнішнього поля описуються за законом $E = \overline{E}\cos\varphi$, де $\overline{E}$ − амплітуда напруги прискорювального поля; $\varphi$ − фаза прискорювальної хвилі, що діє на частинку в момент часу $t$. Оскільки кулонівські сили у рівняннях руху (2) не враховуються, то $div\overline{E} = 0$. Здійснюючи перехід до незалежної змінної $z$ з урахуванням малих змінювань для поперечних координат вздовж осі OZ ($\frac{dx}{dz} = 0$, $\frac{dy}{dz} = 0$), дістанемо рівняння руху частинок у вигляді

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{Ze}{m_0c^2}\cdot E_z\cos\varphi,\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi\gamma}{\lambda\sqrt{\gamma^2-1}},$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0c^2}\cdot\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial z} + g(z)\right)x - E_z\frac{dx}{dz}\right]\cdot\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0c^2}\cdot\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial z} - g(z)\right)y - E_z\frac{dy}{dz}\right]\cdot\cos\varphi,\ z\in[0,T]. \tag{3}$$

Тут перші два рівняння характеризують поздовжній рух, а останні два − поперечний. $E_z$− амплітуда поздовжньої складової напруги прискорювального поля; $x$, $y$, $z$ – просторові координати частинок; $g(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x}-\frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y}\right]$ – функція, що додатково забезпечує фокусування за радіальними координатами; $\lambda$ – довжина хвилі високочастотного поля; $T$ – довжина прискорювача.

Іноді замість незалежної змінної $z$ вводять нову безрозмірну координату $\xi=\frac{z}{\lambda}$ [1, 2]. Тоді рівняння (3) набувають вигляду

$$\frac{d\gamma}{d\xi}=\alpha(\xi)\cos\varphi,\ \frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}},$$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\alpha}{d\xi}+g(\xi)\right)x-\alpha(\xi)\frac{dx}{d\xi}\right]\cdot\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\alpha}{d\xi}-g(\xi)\right)y-\alpha(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right]\cdot\cos\varphi,\ \xi\in[0,T]. \tag{4}$$

При $g(z)=0$ рівняння руху у площинах $(x,x')$, $(y,y')$ співпадають, тому замість (4) доцільно моделювати таку систему рівнянь:

$$\frac{d\gamma}{d\xi}=\alpha(\xi)\cos\varphi,\ \frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}},$$

$$\frac{d^2r}{d\xi^2}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{d\alpha}{d\xi}\cdot r-\alpha(\xi)\cdot\frac{dr}{d\xi}\right)\cdot\cos\varphi,\ \xi\in[0,T]. \tag{5}$$

Сформулюємо послідовність задач для розрахунку структури прискорювача з оптимальними характеристиками пучка у динаміці з урахуванням реальних умов експлуатації.

Задача 1. Визначити параметри прискорювальної структури так, щоб захоплення частинок у процес прискорення за фазою та енергією був максимальним за заданим фазово-енергетичним розкидом пучка у кінцевій частині прискорювача.

Задача 2. З урахуванням радіальних коливань для пучка частинок визначити таку структуру прискорювально-фокусуючої системи, щоб на виході одержати мінімальний розкид за фазовими координатами та виконувались вимоги (обмеження) щодо функцій чутливості у динаміці.

Задача 3. Для пучка траєкторій для заданої початкової множини захоплення знайти параметри прискорювально-фокусуючої системи, що мінімізують чутливість вектора станів на проміжку функціонування.

Оптимальний розрахунок структури прискорювальної системи являє перший етап розв'язання задачі керування пучком заряджених частинок [1,2]. При цьому одержані у результаті оптимізації поздовжнього руху параметри доцільно вибирати в якості вихідних для розв'язання більш складних задач на наступному етапі.

Запишемо рівняння поздовжнього руху

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \ \xi \in [0, T], \tag{6}$$

де $\gamma$, $\varphi$ − поздовжні координати частинок, $\alpha(\xi)$ − функція керування, що відповідає амплітуді напруги прискорювального поля. Функцію $\alpha(\xi)$ будемо вибирати у структурно-заданому вигляді за наявності таких обмежень:

$$\alpha(\xi) \in \Omega_\alpha = \{\alpha(\xi): \ 0 \le \alpha(\xi) \le c, \ \xi \in [0, T]\}. \tag{7}$$

Припустимо, що початкова енергія інжекції стала $\gamma(0) = \gamma_0$, а за фазою в початковий момент $\xi = 0$ частинки мають деякий розкид:

$$\Omega_\varphi = \{\varphi(0): \ a \le \varphi(0) \le b\}.$$

Одна із задач оптимізації полягатиме у тому, щоб мінімізувати максимальне відхилення частинок за енергією від заданої $\gamma_T$:

$$\min_{\alpha \in \Omega_\alpha} \max_{\varphi(0) \in \Omega_\varphi} (\gamma(T, \alpha, \varphi(0)) - \gamma_T)^2. \tag{8}$$

Більш складна у цьому плані задача полягає у мінімізації максимального відхилення частинок за енергією від заданої при максимальному захопленні їх у прискорення за фазою

$$\min_{\alpha\in\Omega_\alpha}\ \max_{b-a}\ \max_{\varphi(0)\in\Omega_\varphi}\ \left(\gamma(T,\alpha,\varphi(0))-\gamma_T\right)^2, \tag{9}$$

причому розкид за енергією та фазою у кінцевій частині прискорювача не має перевищувати наперед заданого значення відносно $\bar{\gamma}(T)$, $\bar{\varphi}(T)$:

$$\max_{\varphi(0)\in\Omega_\varphi}\ \left|\gamma(T,\varphi(0))-\bar{\gamma}(T)\right|\le\gamma_1,$$

$$\max_{\varphi(0)\in\Omega_\varphi}\ \left|\varphi(T,\varphi(0))-\bar{\varphi}(T)\right|\le\varphi_1. \tag{10}$$

Вочевидь, сформульовані задачі (8) − (10) є конкретизацією задачі 1. Для випадку релейного керування (7) вихідні задачі оптимізації (8), (9) зводять до задач оптимального вибору точок перемкнення $0\le t_1\ \le t_2\ \ \ldots\le t_N\le T$ функції керування $\alpha(\xi)$ $[1,2]$. При цьому напрям спуску у відповідній градієнтній процедурі доцільно визначати за допомогою функцій чутливості. Такий підхід дозволятиме у подальшому здійснювати проектування малочутливої прискорювальної системи сумісним розв'язанням задачі траєкторної оптимізації (8) або (9) та задачі мінімізації максимальної чутливості $[4]$ на усьому проміжку функціонування:

$$\min_{t_1,t_2,\ldots t_N}\ \max_{\xi;k;\varphi(0)\in\Omega_\varphi}\ \Phi\left(u^{(k)}(\xi,t_1,t_2,\ldots,t_N,\varphi(0))\right).$$

Розглянемо математичну постановку задачі 2 для системи (5). Вважаємо, що початкові умови вибрано із деякої заданої множини $M_0$. Тоді точки перемкнення необхідно вибирати так, щоб мінімізувати функціонал

$$I(t_1,t_2,\ldots,t_N)=\max_{M_0}\ \left[(\gamma(T)-\gamma_T)^2+r_1^2(T)+r_2^2(T)\right]$$

та виконати обмеження на функції чутливості, наприклад, вигляду

$$u(\xi,\bar{t})\in\Gamma_\xi=\left\{u(\xi,\bar{t}):\ \left|\sum_{j=1}^{n}l_s^{(j)^*}u^{(j)}(\xi,\bar{t})\right|\le 1,\ s=1,2,\ldots,\bar{N}\right\}.$$

($r_1(\xi)=r(\xi)$, $r_2(\xi)=r'(\xi)$, $u^{(j)}(\xi,\bar{t})$ − вектор чутливості по $j$ - тій координаті).

Наведені задачі відносять до класу задач недиференційованої оптимізації [1,2,4], а обмеження на функції чутливості враховують за допомогою алгоритмів практичної стійкості [2,3].

**Результати досліджень та їх обговорення.** Для рівнянь руху частинок у прискорювальному полі напруги без урахування сил кулонівської взаємодії досліджено послідовність задач розрахунку структури прискорювача з оптимальними характеристиками пучка у динаміці з урахуванням реальних умов експлуатації методами практичної стійкості. Розглянуто постановки задач з обмеженою та мінімальною чутливістю.

**Висновки і перспективи.** Сформульовано постановки задач малочутливих прискорювально-фокусуючих систем. Для розв'язання задач з обмеженою чутливістю запропоновано алгоритми практичної стійкості параметричних систем. Такий підхід можна запровадити також для інших типів моделей прискорювачів та оптимального керування.

## Список літератури

1. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.

2. Гаращенко Ф.Г. Аналіз та оцінка параметричних систем: Навч. посібник / Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталієнко. – К.:ІСДО, 1995. – 140 с.

3. Панталієнко Л.А. Дослідження задач обмеженої чутливості методами практичної стійкості / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2014. – Вип. 194. Част.2. – С. 243−248.

4. Панталієнко Л.А. Недиференційовні задачі оптимізації чутливості динамічних систем / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2015. – Вип. 224. – С. 239−243.

## References

1. Bublyk, B.N., Harashchenko, F.H., Kyrychenko, N.F. (1985). Strukturno-parametrycheskaia optymyzatsyia y ustoichyvost dynamyky puchkov [Structural-parametric optimization and stability of beam dynamics]. Kyiv, Ukraine: Scientific thought, 304.

2. Harashchenko F.H., Pantalienko L.A. (1995). Analiz ta otsinka parametrychnykh system: Navch. posibnyk [Analysis and evaluation of parametric systems: Teach. Manual]. Kyiv, Ukraine: 140. / F.H. Harashchenko, L.A. Pantalienko. – K.:ISSE, 1995. – 140 s.

3. Pantaliienko L.A. (2014). Doslidzhennya zadach obmezhenoyi chutlyvosti metodamy praktychnoyi stiykosti [Investigation of the problems of limited sensitivity by methods of practical stability]. Scientific Journal NUBaN Ukraine. A series of «Technology and Energy AIC», 194(2), 243−248.

4. Pantaliienko L.A. (2015). Nedyferentsiiovni zadachi optymizatsii chutlyvosti dynamichnykh system [Undifferentiated problems of optimization the sensitivity of dynamical systems]. Scientific Journal NUBaN Ukraine. A series of «Technology and Energy AIC», 224, 239−243.

## О ПРОЕКТИРОВАНИИ МАЛОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ УСКОРИТЕЛЬНО-ФОКУСИРУЮЩИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

***Л.А. Панталиенко***

**Аннотация.** *Рассмотрены математические модели задач, входящих в комплекс задач проектирования малочувствительных ускорительно-фокусирующих систем. При таком подходе расчет оптимальных параметров управления осуществлено с учетом возможных отклонений их расчетных значений на реальных режимах. Для учета требований к чувствительности применено алгоритмы практической устойчивости для параметрических систем в пространстве функций чувствительности. В рамках сформулированных задач исследованы уравнения движения частиц в ускорительном поле напряжения при отсутствии сил кулоновского взаимодействия. Приведены постановки задач для расчета структуры ускорителя с оптимальными характеристиками пучка в динамике на реальных режимах. Для случая релейного управления исходные задачи оптимизации сведено к задачам оптимального выбора точек переключения при наличии требований к чувствительности.*

**Ключевые слова:** ***математическая модель, чувствительность, практическая устойчивость, параметрическая система, динамические ограничения***

## ON THE DESIGN OF LOW-SENSITIVITY ACCELERATING-FOCUSING SYSTEMS USING METHODS OF PRACTICAL STABILITY

***L. Pantalienko***

**Abstract.** *The mathematical models of problems which are included in the complex of problems of designing of low-sensitive accelerating-focusing systems are considered. With this approach, the calculation of optimal control parameters is made* *taking into account possible deviations of their calculated values in real modes. To account for the sensitivity requirements, algorithms of practical stability for parametric systems in the space of sensitivity functions were applied. In the framework of the formulated problems, the equations of motion of particles in an accelerating voltage field in the absence of Coulomb interaction forces are investigated. The formulation of tasks for calculating the structure of an accelerator with optimal beam characteristics in dynamics in real modes is given. For the case of relay control, the original optimization tasks are reduced to the tasks of optimal selection of switching points in the presence of sensitivity requirements.*

**Keywords:** ***mathematical model, sensitivity, practical stability, parametric system, dynamic constraints***