УДК 515.164

КОМБІНАТОРНИЙ ІНВАРІАНТ ДЛЯ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ НА КОЛІ

Т. Г. Криворот, кандидат педагогічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

e-mail: tania.krivorot@gmail.com

Анотація. *Розглянуто випадок неперервних функцій із скінченною кількість локальних екстремумів, які задані на одновимірному компактному многовиді без краю. Досліджено умови топологічної еквівалентності неперервних функцій на S^1. Побудовано комбінаторний інваріант для функції f і визначено, що для розглядуваного класу функцій мають співпадати повні комбінаторні інваріанти. Показано, що для довільної функції f існує із точністю до циклічного порядку дуг, єдине розбиття та доведено, що необхідною та достатньою умовою топологічної еквівалентності двох функцій на колі є ізоморфізм їх розбиттів.*

Ключові слова: ***розбиття, дуга, функція на колі, інваріант, топологічна еквівалентність, локальний екстремум***

Актуальність. Однією із задач топології є дослідження умов топологічної еквівалентності функцій на многовидах. Визначення кількості топологічно нееквівалентних функцій на колі зводиться до комбінаторики перестановок. Але у природі виникають функції, для яких одному критичному значенню відповідає принаймні два локальні екстремуми. У такому випадку варто ввести набір періодичних альтернуючих послідовностей. Проте,кількість таких періодичних альтернуючих послідовностей не визначено, тому саме побудова інваріантудасть змогу точно вказати число класів функцій на колі та отримати оцінки для загального випадку.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Класифікації та дослідженню топологічної еквівалентності функцій присвячено роботи О. В. Болсінова [1], С. І. Максименка [3], А. А. Ошемкова [4], В. В. Шарка [5]. Для розглядуваного класу функцій, у роботі О. П. Андріюк [2] введено комбінаторний інваріант – набір періодичних альтернуючих послідовностей, які циклічно впорядковані.Проте, задача класифікації для багатовимірного випадку залишається докінця не розв'язаною.

Мета дослідження – дослідити залежність між неперервними функціями на колі та їх комбінаторними інваріантами для визначення топологічної еквівалентності функцій.

Матеріали і методи дослідження. Нехай $f: S^1 \to R$ деяка неперервна функція зі скінченною ($2n$) кількістю локальних екстремумів, серед яких $-m$ глобальних максимумів та $к$різних значень, які приймає функція в $2n$ екстремумах ($к<2n$). Зрозуміло, що тоді серед локальних екстремумів існує принаймні два, значення функції в яких, співпадають. Далі, під функцією fбудемо розуміти лише таку, що задовольняє вказані вище умови.

Побудуємо комбінаторний інваріант для функції f. Зафіксуємо деякий напрям обходу на колі і позначимо m глобальних максимумів через x_0, x_1, …, x_{m-1}.Для кожного x_iзнайдемо дугу S_i^0таку, що значення функції y_iв локальних екстремумах дуги S_i^0є різними. Причому, кінцями даних дуг будуть локальні мінімуми. Нехай $x_{1,i}$ – перший локальний екстремум (мінімум), що лежить на колі за максимумом x_i в напрямі, що протилежний до напрямку обходу, а $x^{i,1}$ – перший локальний екстремум (мінімум) в напрямі, що співпадає з напрямком обходу, $x_{2,i}$ і $x^{i,2}$відповідно другі. Утворимо наступну послідовність локальних екстремумів $x_{l^i,i}$, $x_{1,i}$, x_i, $x^{i,1}$, …, $x^{i,ri+1}$, що відповідає глобальному максимуму x_i і належить дузі S_i^0, кінцями якої є $x_{l^i,i}$ і $x^{i,ri+1}$ (локальні мінімуми). Кожній такій послідовності екстремумів відповідає послідовність значень функції, оскільки вони є різними і локальний мінімум чергується з локальним максимумом, то справедлива наступна система нерівностей $y_{l^i,i}<\ldots>y_{1,i}< y_i> y^{i,1}<\ldots<y^{i,ri}$ (відкинемо значення $y^{i,ri+1}$, що відповідає $x^{i,ri+1}$), а це є елементарна змія $L_{k-1}^{l^i+r^i}$. Відмітимо, що можливі такі випадки:

I)$S_j^0 \cap S_{j+1}^0 = \emptyset$;

II) $S_j^0 \cap S_{j+1}^0 = x^{j,t_2^j+1} = x_{t_1^{j+1},j+1}$;

III) $S_j^0 \cap S_{j+1}^0 = S_{j,j+1}^0$, де$S_{j,j+1}^0 \subset S_j^0 \cup S_{j+1}^0$.

Найпростішими є випадки I та II, в яких дуги, що відповідають глобальним максимумам x_i, або не мають спільних точок, або мають лише одну – локальний мінімум. У випадку III послідовність екстремумів дуги $S^0_{j,j+1}$можемо записати у виглядi$x^{j,r'},\dots,x^{j,r^i+1}$ або $x_{l^{j+1},j+1},\dots,x_{l',j+1}$, де$x_{k,j+1}\in S^0_{j+1}$, $x^{j,k}\in S^0_j$, зрозуміло, що значення функції в цих локальних екстремумах утворюють елементарну змію.

Тоді, з двох даних дуг утворимо три, одна з яких –$S^0_{j,j+1}$, а решта дві такі, що $S^0_j\backslash S^0_{j,j+1}$ і $S^0_{j+1}\backslash S^0_{j,j+1}$. Зауважимо, що для пари дуг S^0_j та $S^0_{j,j+1}$справедливий випадок II. Перепозначимо отримані дуги і запишемо наступне розбиття$\Gamma_0=\bigcup_{i=0}^{n}\widetilde{S^0_i}$(у загальному випадку $n\geq m$–1).

Далі, розглянемо $S^1\backslash\Gamma_0=\bigcup\gamma_i^0$, де $\bigcap\gamma_i^0=\emptyset$. Для кожної з дуг γ_i^0знайдемо локальні максимуми, значення функції в яких найбільше, та утворимо розбиття дуг γ_i^0 на $\Gamma_1^i=\bigcup_s S^1_{i,s}$, де кожній дузі $S^1_{i,s}$ відповідаєелементарна змія, утворена значеннями функції в локальних екстремумах, які їй належать. Далі розглянемо $S^1\backslash\Gamma_0\cup\Gamma_1^i=\gamma_i^1$та по аналогії, для кожноїз дуг γ_i^1 знайдемо локальні максимуми, значення функції в яких найбільше. Оскільки кількість локальних екстремумів скінченна, то за деяке число кроків ми розіб'ємо коло S^1 на дуги$\widetilde{S}_\iota$, яким відповідають елементарні змії$L^{a_i}_{k-1}$. Варто зазначити, що для довільної пари сусідніх дуг $\widetilde{S}_{\iota-1}$, та $\widetilde{S}_\iota$ справедливий випадокII.

Будемо вважати, що деякій функції f відповідає розбиття кола$\Omega(f)$ на дуги S_i, у яких кінці в локальних мінімумах, а значення функції в локальних екстремумах цих дуг, утворюють елементарні змії $L^{a_i}_{k-1}$.

Лема 1. Для довільної функції f існує і з точністю до циклічного порядку дуг S_i, єдине $\Omega(f)$ –розбиття.

Два розбиття $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ кола назвемо ізоморфними ($\Omega(f)\sim\Omega(g)$), якщо:

1) для кожної дуги $S_i\subset\Omega(f)$ можна знайти єдину дугу $S'_j\subset\Omega(g)$ таку, що відповідні цим дугам елементарні змії $L^{a_i}_{k-1}$ та $L^{b_j}_{k-1}$співпадають;

2) циклічний порядок відповідних дуг розбиттів $\Omega(f)$ та$\Omega(g)$співпадає.

Теорема. Дві функції f та g на колі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\Omega(f) \sim \Omega(g)$.

Доведення. Необхідність. Доведення необхідності випливає з леми 1 та означення топологічної еквівалентності.

Достатність. Нехай f та g деякі функції на колі такі, що $\Omega(f) \sim \Omega(g)$, де $\Omega(f)$, $\Omega(g)$ розбиття кола, що їм відповідають. Доведемо, що функції f та g топологічно еквівалентні. Зрозуміло, що кількість дуг для $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ одна й та ж сама, і покладемо її рівною q. Оскільки набори чисел $\{a_i\}$ і $\{b_j\}$ співпадають, то числа локальних екстремумів функцій f та g, які визначаються за допомогою рівностей $\sum_i a_i + q$ та $\sum_j b_j + q$, відповідно, рівні між собою.

Не обмежуючи загальності, розглянемо $S_0 \subset \Omega(f)$, тоді згідно означення існує $S'_i \subset \Omega(g)$ така, що $L_{k-1}^{a_0} = L'^{b_i}_{k-1}$ і $a_0 = b_i$. Запишемо наступні дві послідовності, що утворені елементарними зміями $(L_{k-1}^{a_0}, L_{k-1}^{a_1}, \dots, L_{k-1}^{a_q})$ та $(L'^{b_i}_{k-1}, L'^{b_{i+1}}_{k-1}, \dots, L'^{b_{i+q-1}}_{k-1})$ зрозуміло, що вони співпадають і $f \sim g$.

Знайдемо верхню оцінку числа $N(f, q)$ топологічно нееквівалентних функцій із заданим інваріантом: $\Omega(f) = L_{k-1}^{t_0}, L_{k-1}^{t_1}, \dots, L_{k-1}^{t_q}$. Справедливо $L_{k-1}^{t_i} = C_k^{t_i+1} \cdot a_{t_i}$. Проте, варто зауважити, що вибір t_{i+1} значень із набору $\{0,1,\dots,k-1\}$ для змії $L_{k-1}^{t_{i+1}}$ залежить від вибору чисел, що утворюють попередню змію $L_{k-1}^{t_i}$, тому число таких можливостей менше за коефіцієнт $C_k^{t_i+1}$. Другий істотній момент, що не всі змії типу A_{t_i} можливі, оскільки положення останнього максимуму змії $L_{k-1}^{t_i}$ залежить від положення першого мінімуму наступної змії $L_{k-1}^{t_{i+1}}$. Тому, враховуючи циклічний порядок $(q+1)$ кількості дуг на колі, отримуємо наступну оцінку зверху:

$$\theta(q) = q! \cdot C_k^{t_0+1} \cdot a_{t_0} \cdot C_k^{t_1+1} \cdot a_{t_1} \cdot \dots \cdot C_k^{t_q+1} \cdot a_{t_q}. \quad (1)$$

Лема 2. Для числа $N(f, q)$ – топологічно нееквівалентних функцій із заданим інваріантом $\Omega(f) = L_{k-1}^{t_0}, L_{k-1}^{t_1}, \dots, L_{k-1}^{t_q}$ справедлива нерівність $N(f, q) < \theta(q)$.

Зауважимо, що $N(f, q) = \theta(q)$ у випадку, коли $q = 1$, тобто f є спеціальною функцією.

Позначимо через $G(2n,k)$ кількість топологічно нееквівалентних функцій на S^1з 2*n* локальними екстремумами та *к* різними значеннями. Тоді справедлива наступна оцінка $G(2n,k) < R_{2n-1}^{k-1}$, оскільки, дві різні змії задають одну і ту саму функцію на колі.

Результати дослідження та їх обговорення. Отже, інваріантом функції, який дає відповідь на поставлені питання, є альтернуючі послідовності, за допомогою яких будується послідовність значень функції.У випадку, коли кількість локальних екстремумів функції співпадає з кількістю критичних значень, то інваріантом є A_{2n-1} змія.Але не всі змії типу A_{t_i} можливі, оскільки положення останнього максимуму змії $L_{k-1}^{t_i}$залежить від положення першого мінімуму наступної змії $L_{k-1}^{t_{i+1}}$.

Висновки і перспективи.У статті розглянуто загальний випадок, коли кількість критичних значень функції не дорівнює кількості локальних екстремумів та функція має *m* глобальних максимумів (мінімумів). Інваріантом такої функції є $\Omega(f)$– розбиття S^1 на дуги S_i, значення функції в їх локальних екстремумах, утворюють L_m^n елементарні змії. Доведено, що необхідною та достатньою умовою топологічної еквівалентності двох функцій на колі є ізоморфізм розбиттів $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$, що їм відповідають.

Список літератури

1. Bolsinov, A. On classification of flow sonmanifolds / A. Bolsinov, A. Oshemkov, V. Sharko // Methods of Functional Analysisand Topology. – 1996. – Vol.2,Issue2 – P.51–60.
2. Андріюк О.П. Функції на одновимірних многовидах: автореф.дис. … канд.фіз.-мат.наук: 01.01.01 / О.П. Андріюк. – К.,2006. – 19с.
3. Максименко, С.И. Класификация*m*–функций на поверхностях / С. И. Максименко // Укр.мат.журн. – 1999. – №8.– С.1129–1135.
4. Ошемков, А. А. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях / А. А. Ошемков, В. В. Шарко // Матем. сборник. – 1998.–№ 7.– С.93–140.
5. Шарко В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В.Шарко // Укр.мат.жур.– 2003. – № 5. – С.687–700.

References

1. Bolsinov, A., Oshemkov, S., Sharko, V. (1996). On classification of flow

sonmanifolds, 2 (2), 51–60.

2. Andriiuk, O. P. (2006). Funktsii na odnovymirnykh mnohovydakh [Functionson one-dimensionalmanifolds]. Kyiv, 19.

3. Maksimenko, S. Y. (1999). Klasifikaciya *m*–funkcij na poverhnostyah [Classification of *m*–functions on surfaces]. Ukrainskyi matematychnyi zhurnal, 8, 1129–1135.

4. Oshemkov, A. A., Sharko, V. V. (1998). O klassifikacii potokov Morsa-Smejla na dvumernyh mnogoobraziyah [On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds]. Mathematical collection, 7, 93–140.

5. Sharko, V. V. (2003) Gladkaya i topologicheskaya ehkvivalentnost' funkcij na poverhnostyah [Smooth and topological equivalence of functions on surfaces]. Ukrainskyi matematychnyi zhurnal, 5, 687–700.

КОМБИНАТОРНЫЙ ИНВАРИАНТДЛЯ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА КРУГУ

Т. Г. Криворот

Аннотация. *Рассмотрен случай непрерывных функций с конечным количество локальных экстремумов, заданных на одномерном компактном многообразии без края. Исследованы условия топологической эквивалентности непрерывных функций на S^1. Построен комбинаторный инвариант для функции f и определено, что для рассматриваемого класса функций должны совпадать полные комбинаторные инварианты. Показано, что для произвольной функции f существует с точностью до циклического порядка дуг, единственное разбиение и доказано, что необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности двух функций на круге есть изоморфизм их разбиений.*

Ключевые слова: ***разбиения, дуга, функция на кругу, инвариант, топологическая эквивалентность, локальный экстремум***

COMBINATORY INVARIANT FOR FUNCTION DETERMINED ON A CIRCLE

T. Krivorot

Abstract. *The article deals with the case of continuous functions with a finite number of local extreme a defined on a one-dimensional compact manifold without boundary. The conditions of topological equivalence of continuous functions on S^1 are investigated. A combinatorial invariant for the function f is constructed and it is determined that for the class of functions in question the complete combinatorial invariants must coincide. It is shown that for an arbitrary function f there exists up to a cyclic order of arcs, a single partition and it is proved that a necessary and sufficient condition for the topological equivalence of two functions on a circle is an isomorphism of their partitions.*

Keywords: ***partitions, arc, function on a circle, invariant, topological equivalence, local extremum***