УДК 517.51

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДУЛІВ ГЛАДКОСТІ

О. Ю. Дюженкова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

e-mail: oduzen@ukr.net

Анотація. *Останнім часом у теорії наближень широко використовують DT-модулі гладкості, які було введено З. Дітзіаном і В.Тотіком для функцій, неперервних на відрізку [-1;1]. Актуальним було питання про наближення функцій на множинах комплексної площини за допомогою модулів, аналогічних DT-модулям гладкості. В результаті чого було введено аналог DT-модуля гладкості на областях комплексної площини з кусково-гладкою межею та досліджено його властивості для подальшої побудови конструктивної характеристики рівномірного наближення функцій в термінах введеного модуля гладкості. Означення D-модуля гладкості порядку k вводиться як супремум від різниці значень функції та многочлена Лагранжа, де внутрішній супремум береться по всіх наборах точок, які задовольняють певні умови. У проведених дослідженнях було використано методи рівномірного наближення функцій, зокрема інтерполювання функцій многочленами Лагранжа, розділені різниці, многочленні ядра Джексона та Дзядика, тотожність Поповічіу.*

Основним результатом дослідження є властивість нормальності введеного модуля гладкості, яку сформульовано у вигляді теореми і доведено. Розглянутий модуль гладкості планується використовувати для побудови конструктивної характеристики рівномірного наближення класів неперервних функцій на областях комплексної площини з кусково-гладкою межею.

Ключові слова: ***наближення функцій, комплексна площина, множини з кусково-гладкою межею,*** D ***-модуль гладкості***

Актуальність. Останнім часом у теорії наближень широко використовують DT –модулі гладкості, які було введено З. Дітзіаном і В.Тотіком для функцій, неперервних на відрізку $[-1;1]$ ([5]). У роботах В.К.Дзядика, Г.А. Алібекова, Ю.І. Волкова розглядалась конструктивна характеристика рівномірного наближення функцій на множинах комплексної площини з кусково-гладкою межею у термінах модулів гладкості функції $\widetilde{f}(\omega) = f(\psi(\omega))$, де $\psi(\omega)$ – конформне відображення зовнішності круга на зовнішність розглядуваної множини. Актуальним стало питання про наближення функцій на множинах комплексної площини за допомогою модулів, які є аналогічними DT –модулям гладкості.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Велику увагу наближенню функцій на множинах комплексної площини було приділено в роботах В.К. Дзядика [1], Шевчука І.О. [4], Тамразова П.М.[3] та інших. У термінах модулів гладкості $\omega_k(t,f)$ було розглянуто прямі та обернені теореми, в результаті чого була побудована конструктивна характеристика рівномірного наближення функцій на континуумах комплексної площини.

Мета дослідження – аналіз теорії гладкостей З.Дітзіана і В.Тотіка для її поширення на множини комплексної площини з кусково-гладкою межею, введення аналога DT-модуля гладкості $\overline{\omega}_k(f,t)$ на областях з кутами та дослідження його властивостей для подальшої побудови конструктивної характеристики в термінах введеного D-модуля гладкості функції f.

Матеріали та методи дослідження. У роботі використовуються методи рівномірного наближення функцій ([1], [3], [4]), зокрема інтерполювання функцій многочленами Лагранжа, розділені різниці, многочленні ядра Джексона та Дзядика, тотожність Поповічіу.

Результати досліджень та їх обговорення. Для функцій, неперервних на кусково-гладких кривих комплексної площини, введено D-модуль гладкості, який є аналогом модуля гладкості Дітзіана–Тотіка. Досліджено деякі важливі властивості цього модуля, зокрема доведено властивість нормальності D-модуля гладкості.

Нехай $M \subset \mathbf{C}$ – замкнена обмежена множина, межа Γ якої є жордановою кривою і складається із скінченного числа гладких дуг Γ_j, які утворюють у точках стику a_j зовнішні кути $\alpha_j\pi,\ 0<\alpha_j<2$.

Для всіх $z \in \Gamma$ і $h>0$ позначимо

$$\rho_h(z) := h(|z-a_{j_*}|^{\frac{1}{\alpha_{j*}}} + h)^{\alpha_{j*}}, \tag{1}$$

де j_* – індекс найближчої до z точки стику.

Нехай $L(z,f):=L(z,f;z_1,...,z_k)$ – многочлен Лагранжа степеня $\leq k-1$, який інтерполює функцію f у k різних точках $z_i \in \mathbf{C}$, $i=\overline{1,k}$.

Означення. D*-модулем гладкості порядку* k на кривій Γ неперервної на Γ функції f назвемо функцію

$$\overline{\omega}_k(\tau,f,\Gamma):=\sup_{h\in[0;\tau]}\ \sup_{\widetilde{z}\in\Gamma}\ \sup_{\{z_0,z_1,...,z_k\}}\left|f(z_0)-L(z_0,f;z_1,...,z_k)\right|, \tag{2}$$

де внутрішній супремум береться по всіх наборах $\{z_0,z_1,...,z_k\}$ точок z_i, які задовольняють нерівності

$$\left|z_i-\widetilde{z}\right|\leq\rho_h(\widetilde{z})\leq(3k+1)\left|z_i-z_j\right|,\quad i,j=\overline{0,k}, i\neq j. \tag{3}$$

Основним результатом роботи є теорема, в якій доведено, що D-модуль, як і класичний модуль гладкості, має властивість нормальності.

Теорема. Якщо функція f є неперервною на Γ, то для всіх $n\in N,\tau\geq 0$ має місце нерівність

$$\overline{\omega}_k(n\tau,f,\Gamma)\leq cn^{\overline{\alpha}k}\overline{\omega}_k(\tau,f,\Gamma), \tag{4}$$

де $\overline{\alpha}$ – найбільше серед чисел α_j; c – стала, що не залежить від n,τ,f.

Для доведення теореми скористаємося допоміжними лемами.

Позначимо через $U[z,r]:=\{\zeta:\left|\zeta-z\right|\leq r\}$, $v[z,r]:=\{\zeta:\left|\zeta-z\right|=r\}$ відповідно *круг* і *коло* радіусом $r>0$ з центром у точці $z\in\mathbf{C}$.

Лема 1. Нехай M – зв'язна множина, $z\in M$ і точки $z_0,z_1,...,z_k$ містяться в $M\cap U[z,r]$. Якщо $M\cap v[z,r]\neq\emptyset$, то знайдеться k точок $z_1',...,z_k'$, для яких виконуються співвідношення:

$$z_i'\in M\cap U[z,r],\qquad i=\overline{1,k};$$

$$r\leq(3k+1)\left|z_i'-z_j'\right|,\ i,j=\overline{1,k}, i\neq j; \tag{5}$$

$$r\leq(3k+1)\left|z_i-z_j'\right|, i=\overline{0,k},\ j=\overline{1,k}. \tag{6}$$

Лема 2. Нехай $C = const > 0$, $\widetilde{z} \in \Gamma$, $z_0,...,z_k \in \Gamma$. Якщо при всіх $i, j = \overline{1,k}$, $i \neq j$ виконується $\rho_h(\widetilde{z}) \le C|z_i - z_j|$ і при всіх $i = \overline{0,k}$ – $|\widetilde{z} - z_i| \le \rho_h(\widetilde{z})$, то

$$|f(z_0) - L(z_0, f; z_1,...,z_k)| \le (1 + k(2C)^k)\,\overline{\omega}_k(h, f, \Gamma). \tag{7}$$

Лема 3. Нехай функція f задана в точках z_j, $j = \overline{j_*, j^*}$. Для довільного набору $\{j_1,...,j_k\}$ індексів має місце тотожність

$$L(z, f; \zeta_{j_1},...,\zeta_{j_k}) = L(z, f; \zeta_{j_*}, \zeta_{j_*+1},...,\zeta_{j_*+k-1}) +$$

$$+ \sum_{j=j_*}^{j^*-k} (L(\zeta_j, f; \zeta_{j+1},...,\zeta_{j+k}) - f(\zeta_j)) \cdot A_j(z), \tag{8}$$

де
$$A_j(z) := \sum_{p=1}^{k} \prod_{q=1}^{k-1} \frac{(\zeta_{j_p} - \zeta_{j+q})_+}{(\zeta_j - \zeta_{j+q})} \prod_{q=1, q\neq p}^{k} \frac{(z - \zeta_{j_q})}{(\zeta_{j_p} - \zeta_{j_q})}, \tag{9}$$

$$(\zeta_i - \zeta_j)_+ := \begin{cases} \zeta_i - \zeta_j, & i > j, \\ 0, & i \le j. \end{cases}$$

Зауважимо, що в лемі 3 наведено у зручній формі відому тотожність Поповічіу [3], [4].

Надалі для зручності вважатимемо, що $a_1 := 0$ є точкою стику дуг Γ_1 і Γ_2, при цьому $\alpha := \alpha_1$.

Лема 4. Існує число $R = R(\Gamma) > 0$, яке задовольняє умови:

1) для всіх точок $z \in U[0, R]$ точка 0 є найближчою точкою стику;

2) частина кривої Γ, що потрапила до круга $U[0, R]$, складається з двох гладких дуг γ_1 і γ_2, які є частинами відповідно дуг Γ_1 і Γ_2;

3) коливання кута дотичної до кривої γ_1 не перевищує $\frac{\pi}{6}$, тобто має місце нерівність

$$|z' - z''| \le 2\big|\,|z'| - |z''|\,\big| \tag{10}$$

для всіх $z'\in\gamma_1$, $z''\in\gamma_1$; так само коливання кута дотичної до γ_2 не перевищує $\frac{\pi}{6}$, отже виконується нерівність (9) для всіх $z'\in\gamma_2$, $z''\in\gamma_2$;

4) для відстані $d(z,\Gamma_1)$ від точки $z\in\gamma_2$ до дуги Γ_1 має місце нерівність

$$|z|\le cd(z,\Gamma_1), \tag{11}$$

де c – стала, що залежить тільки від α.

Візьмемо точку $\tilde z\in\Gamma$, числа $h>0, n\in\mathbf{N}$ і розглянемо набір точок $\{z_0,z_1,...,z_k\}$, що задовольняють умову (3). Через c позначатимемо різні сталі, які можуть залежати тільки від k і Γ. Для доведення теореми достатньо довести нерівність

$$\left|f(z_0)-L(z_0,f;z_1,...,z_k)\right|\le cn^{\overline{\alpha}k}\,\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma), \tag{12}$$

при цьому обмежимось розглядом тільки основного випадку: $\tilde z\in\gamma_2$, $|\tilde z|\le\frac{1}{2}R$, $nh<c$, де γ_2 і R визначені в лемі 4, а стала c задовольняє нерівність (16).

При $i\le l\le j$ з нерівностей (10) і (11) леми 4 випливає

$$c\left|\zeta_i-\zeta_j\right|\le\rho_{|i-j|h}(\zeta_l)\le c\left|\zeta_i-\zeta_j\right|. \tag{13}$$

Зокрема $\left|\zeta_j-\zeta_{j+k}\right|=\rho_{\theta_j h}(\zeta_j)$, $\theta_j<c$ і для всіх $l,p=\overline{1,k}, l\ne p$

$$\left|\zeta_j-\zeta_{j+k}\right|\le c\left|\zeta_l-\zeta_p\right|,$$

тоді за лемою 2 одержуємо

$$\left|f(\zeta_j)-L(\zeta_j,f;\zeta_{j+1},...,\zeta_{j+k})\right|\le c\,\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma). \tag{14}$$

Позначивши через j_1 найбільше серед чисел j таких, що $\zeta_{j-1}\in U[\tilde z,\rho_{nh}(\tilde z)]$, припустимо, що $j_p:=j_1+pn$.

Для довільної точки $z\in(\gamma_1\cup\gamma_2)\cap U[\tilde z,\rho_{nh}(\tilde z)]$ позначимо через j_* індекс найближчої до z серед точок ζ_j з $j\le j_1$. Аналогічно до (14) одержимо

$$\left|f(z)-L(z,f;\zeta_{j_*},\zeta_{j_*+1},...,\zeta_{j_*+k-1})\right|\le c\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma). \tag{15}$$

Для всіх $p,q=\overline{1,k}$, $p\ne q$ та $j=j_*,...,j_k-k$ з умови (14) знаходимо:

$$\frac{|z-\zeta_{j_q}|}{|\zeta_{j_p}-\zeta_{j_q}|}<c, \qquad \frac{|\zeta_{j_p}-\zeta_{j+q}|}{|\zeta_j-\zeta_{j+q}|}\le c\frac{\rho_{nh}(\zeta_j)}{\rho_h(\zeta_j)}\le cn\left(\frac{n+|j|}{1+|j|}\right)^{\alpha-1},$$

звідки маємо

$$\left|A_j(z)\right|\le cn^{k-1}\left(\frac{n+|j|}{1+|j|}\right)^{(\alpha-1)(k-1)} \tag{16}$$

де $A_j(z)$ визначається рівністю (9). Тоді з рівностей (15), (16) і (14) за лемою 3 одержимо

$$\left|f(z)-L(z,f;\zeta_{j_1},...,\zeta_{j_k})\right|\le\left|f(z)-L(z,f;\zeta_{j_*},\zeta_{j_*+1},...,\zeta_{j_*+k-1})\right|+$$

$$+\sum_{j=j_*}^{j_1+k(n-1)}|(f(\zeta_j)-L(\zeta_j,f;\zeta_{j+1},...,\zeta_{j+k})|\cdot|A_j(z)|\le$$

$$\le c\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)+c\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)n^{k-1}\sum_{j=j_*}^{j_1+k(n-1)}\left(\frac{n+|j|}{1+|j|}\right)^{(\alpha-1)(k-1)}\le$$

$$\le cn^k\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)+cn^{\alpha k}\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)n^{k-1}\sum_{j=1}^{cn}\left(\frac{1}{j}\right)^{(\alpha-1)(k-1)}\le cn^{\alpha k}\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma).$$

Звідси випливає нерівність (12). Отже, теорему доведено.

Властивості введеного D-модуля гладкості $\overline{\omega}_k(f,t)$, а також пряма теорема наближення функцій алгебраїчними многочленами на областях з кутами розглядаються також у роботі [2].

Висновки та перспективи. У роботі поширено означення модулів гладкості З.Дітзіана і В.Тотіка на функції, неперервні на кусково-гладких кривих комплексної площини. При цьому досліджено основні властивості введеного D-модуля гладкості, зокрема доведено властивість нормальності, сформульовану у вигляді теореми. Розглянутий модуль гладкості планується використовувати для побудови конструктивної характеристики рівномірного наближення класів неперервних функцій на областях комплексної площини з кусково-гладкою межею.

Список літератури

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

2. Дюженкова О.Ю. DT-модулі гладкості на областях з кутами/ О.Ю. Дюженкова, І.О.Шевчук// Теория приближения функций.: Тр. Ин-та прикладной математики и механики. – Донецк, 1998. – Т.3.– С.65–70.

3. Тамразов П.М. Гладкости и полиномиальные приближения/ П.М. Тамразов. – К.: Наук. думка, 1975. – 272 с.

4. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций/ И.А.Шевчук. – К.: Наук. думка, 1992. – 223 с.

5. Ditzian Z. Moduli of smoothness/ Ditzian Z., Totik V. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1987. – 300 p.

References

1. Dzyadyk, V. K. (1977). Vvedenye v teoryyu ravnomernoho pryblyzhenyya funktsyy polynomamy [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moskow: Nauka, 512.

2. Dyuzhenkova, O.Yu. (1998). DT-modulI gladkosti na oblastyah z kutami [DT modules of smoothness in areas with angles]. Ukr. mat. Zhurnal, 47 (12), 1627–1638.

3. Tamrazov, P.M. (1975). Gladkosti i polinomialnyie priblizheniya [Smoothness and polynomial approximations]. Kyiv: Nauk. dumka, 272.

4. Shevchuk, Y.A. (1992). Pryblyzhenye mnohochlenamy y sledy nepreryvnykh na otrezke funktsyy [Approximation by polynomials and traces of functions continuous on the interval]. Kyiv: Nauk. dumka, 223.

5. Ditzian Z. (1987). Moduli of smoothness. Springer-Verlag, New York/Berlin,. 300.

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ

О. Ю. Дюженкова

Аннотация. *В последнее время в теории приближений широко используются DT-модули гладкости, которые были введены С. Дитзианом и В.Тотиком для функций, непрерывных на отрезке [-1; 1]. Актуальным был вопрос о приближении функций на множествах комплексной плоскости с помощью модулей, аналогичных DT-модулям гладкости. В результате чего было введено аналог DT-модуля гладкости на областях комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей и исследованы его свойства для дальнейшего построения конструктивной характеристики равномерного приближения функций в терминах введенного модуля гладкости. Определение D-модуля гладкости порядка k вводится как супремум от разности значений функции и многочлена Лагранжа, где внутренний супремум берется по всем наборам точек, удовлетворяющих определенные условия. В проведенных исследованиях были использованы методы равномерного приближения функций, в частности интерполяции функций многочленами Лагранжа, разделенные разности, многочленов ядра Джексона и Дзядыка, тождество Поповичу.*

Основным результатом исследования является свойство нормальности введенного модуля гладкости, которое сформулировано в виде теоремы и доказано. Рассмотренный модуль гладкости планируется использовать для построения конструктивной характеристики равномерного приближения классов непрерывных функций на областях комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей.

Ключевые слова: ***приближение функций, комплексная плоскость, множества с кусочно-гладкой границей, D-модуль гладкости***

REMARK TO FUNCTION APPROXIMATION BY MODULES OF SMOOTHNESS

O. Dyuzhenkova

Abstract. *Recently, in the approximation theory, the DT-modules of smoothness, which was introduced by Z. Ditsian and V.Totik are widely used for functions continuous on the segment [-1; 1]. The question of the approximation of functions on complexes of complexes was actual by means of modules analogous to the DT-modules of smoothness. As a result, an analog of the DT-module of smoothness was introduced in the regions of a complex plane with a piecewise smooth boundary and its properties were investigated for the further construction of the constructive characteristic of the uniform approximation of functions in terms of the introduced smoothness module. The definition of the D-module of the order of k smoothness is introduced as a supremum of the difference between the values of a function and the Lagrange polynomial, where the inner supremum is taken over all sets of points that satisfy certain conditions. In the conducted researches methods of uniform approximation of functions were used, in particular interpolation of functions by Lagrange polynomials, separated differences, polynomials of the Jackson and Dzyadyk nuclei, and the identity of Popovichiu.*

The main result of the research is the property of the normality of the introduced smoothness module, which is formulated as a theorem and proved. The considered modulus of smoothness is planned to be used to construct a constructive characteristic of the uniform approximation of classes of continuous functions on regions of a complex plane with a piecewise smooth boundary.

Keywords: *function approximation, complex plane, piecewise smooth curves, modules of smoothness*