

MAPLE-МОДЕЛЬ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ В ФУНКЦІЇ ПАРАМЕТРА ЇЇ ПОЛОЖЕННЯ

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: a.nesvidomin@gmail.com

Анотація. У багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва має місце рух частинок матеріалу по похилій площині. Розуміння закономірностей руху частинки по площині довільного положення в тривимірному просторі дозволяє цілеспрямовано провести розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Комп'ютерне моделювання руху частинки дозволяє відкинути громіздкі аналітичні перетворення і забезпечити діалоговий режим для проведення необхідних обчислювальних експериментів з аналізу руху частинки за різними вихідними умовами її кидання по будь-якій шорсткій поверхні, яка певним чином розташована в просторі.

Мета дослідження – розробка Maple-моделі руху частинки по похилій площині у функції параметра її положення.

Застосування супровідних тригранників траєкторії частинки дозволило звести закон руху частинки до системи із двох диференціальних рівнянь, шуканими якими є внутрішні u , v - координати поверхні траєкторії частинки.

Отриманий закон руху частинки по шорсткій похилій площині у функції її положення її на площині в проекціях на орти T і P тригранника Дарбу **OTPN**.

Отримані траєкторії $r(u)$ та графіки швидкостей $V(u)$ частинки по похилій площині з різним кутом нахилу її від вертикального положення для різного кута кидання, початкової швидкості та коефіцієнта тертя. Проаналізований рух частинки за відповідних початкових умов.

Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні у функції її положення дозволяє дослідити її траєкторно-кінематичні властивості на заданій ділянці поверхні.

Вибір супровідного тригранника траєкторії **OuvN** чи **OTPN** не впливає на одержані результати траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки, хоча позначається в послідовності виведення її закону руху.

Ключові слова: супровідний тригранник, матеріальна точка, похила площина, траєкторія руху

Актуальність. У багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва має місце рух частинок матеріалу по шорстких робочих поверхнях плоскої форми, зокрема, у вигляді похилої площини. Розуміння закономірностей руху частинки (як матеріальної точки) по шорсткій поверхні довільного положення в тривимірному просторі дозволяє цілеспрямовано провести розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Аналітичне виведення закону руху частинки по будь-якій шорсткій поверхні зводиться до складання системи диференціальних рівнянь 2-го порядку, шуканими залежностями яких є траєкторія частинки, її швидкість, прискорення, довжина пройденого шляху, сила нормальної реакції, час руху до її зупинки та інші траєкторно-кінематичні характеристики. Послідовність аналітичних перетворень при виведення системи диференціальних рівнянь і способи її розв'язку є досить трудомісткими. За останні десятиріччя суттєвих змін в автоматизації методів виведення законів руху частинки по шорсткій поверхні складної форми не відбулося. В існуючих дослідженнях кожен науковець індивідуально здійснює аналітичні перетворення з метою отримання закону руху частинки у вигляді систем диференціальних рівнянь 2-го порядку, складність яких суттєво залежить від форми поверхні.

Комп'ютерне моделювання руху частинки по шорстких поверхнях дозволяє відкинути громіздкі аналітичні перетворення і забезпечити науковця зручним діалоговим режимом для проведення необхідних обчислювальних експериментів з аналізу руху частинки за різними вихідними умовами її кидання по будь-якій шорсткій поверхні, яка певним чином розташована в просторі [2]. Але розробка комп'ютерних моделей руху частинки по поверхні потребує вирішення низки питань теоретичного і практичного характеру, які складають актуальність досліджень. Насамперед, це розробка загального алгоритму автоматичного виведення системи диференціальних рівнянь закону руху частинки по будь-якій поверхні, довільно розташованої в просторі; аналіз траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки не тільки у часі, але і положення частинки та напряму

її переміщення по поверхні; реалізація наближених методів розв'язування систем диференціальних рівнянь для унаочнення результатів досліджень у вигляді числових даних, графічних зображень та імітаційних моделей відтворення руху частинки по поверхні [3].

Мета дослідження – розробка Maple-моделі руху частинки по похилій площині у функції параметра її положення.

Матеріали і методи дослідження. Для виведення закону руху частинки по шорсткій похилій площині у функції незалежного параметра u (положення частинки на площині) в проєкціях на орти T і P тригранника Дарбу **OTPN** підставимо вирази $u = u, v = v(u)$ до рівняння цієї площини (лістинг моделі *PlaneOxaR_u* див. на geometry.com.ua), звідки одержимо шукану траєкторію $r(u)$ у наступному вигляді:

$$r(u) = r[u, -v(u) \sin(\xi), v(u) \cos(\xi)]. \quad (1)$$

За рівнянням (1) визначимо:

- вектор дотичної $\tau(u)$ траєкторії $r(u)$ та швидкість $V(u)$ частинки:

$$\tau(u) = \tau \left[1, -\frac{d}{du} v(u) \sin(\xi), \frac{d}{du} v(u) \cos(\xi) \right], \quad (2)$$

$$V(u) = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{du} v(u) \right)^2}; \quad (3)$$

- орт P тригранника Дарбу **OTPN**:

$$P(u) = P \left[-\frac{d}{du} v(u), -\sin(\xi), \cos(\xi) \right]; \quad (4)$$

- косинуси кутів φ і ψ між векторами сили тяжіння $G[0, 0, -1]$, $\tau(u)$ і $P(u)$:

$$C\varphi(u) = \cos(\varphi) = \cos(\vec{G}, \vec{\tau}) = -\frac{\left(\frac{d}{du} v(u) \right) \cos(\xi)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{du} v(u) \right)^2}}; \quad (5)$$

$$C\psi(u) = \cos(\psi) = \cos(\vec{G}, \vec{P}) = -\frac{\cos(\xi)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{du} v(u) \right)^2}}; \quad (6)$$

- нормальну $k_n(u)$ та геодезичну $k_g(u)$ кривини траєкторії $r(u)$:

$$k_n(u) = 0; \quad (7)$$

$$k_g(u) = \frac{\frac{d^2}{du^2} v(u)}{\left(1 + \left(\frac{d}{du} v(u)\right)^2\right)^{3/2}}; \quad (8)$$

- диференціал дуги ds траєкторії $r(u)$ за умови $dv = \frac{d}{du} v(u) du$:

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{du} v(u)\right)^2} du. \quad (9)$$

Використавши вирази (1)-(9), одержимо закон руху частинки в проекціях на орти T і P тригранника $OTPN$ у вигляді:

$$\begin{cases} OT: = mV(u) \frac{d}{du} V(u) = -mg \left(\frac{d}{du} v(u) \cos(\xi) + f \sin(\xi) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{du} v(u)\right)^2} \right) \\ OP: = mV(u)^2 = - \frac{mg \left(1 + \left(\frac{d}{du} v(u)\right)^2\right) \cos(\xi)}{\frac{d^2}{du^2} v(u)} \end{cases}. \quad (10)$$

Шуканими залежностями на відміну від попередніх систем диференціальних рівнянь закону руху частинки є швидкість $V(u)$ частинки та $v(u)$ -координата її положення на похилих прямолінійних твірних площини у функції незалежної змінної u . Початковими умовами розв'язку системи (10) є:

$$OI: = \frac{d}{du} v(u_o) = \cot(\alpha_o), v(u_o) = v_o, V(u_o) = V_o. \quad (11)$$

Знайти координату $v(u)$ і швидкість $V(u)$ частинки із системи рівнянь (10) можна тільки наближено, скористаємося методом Рунге-Кутта [4]:

$$dsolve \left(\left\{ OT, OP, OI, \frac{d}{du} v(u_o) = \cot(\alpha_o), v(u_o) = v_o, V(u_o) = V_o \right\}, \left\{ V(u), v(u) \right\}, numeric, range = u_o..u_n \right). \quad (12)$$

Отримані залежності $V(u)$ і $v(u)$ представляються множиною дійсних чисел на інтервалі незалежної змінної $u \in [u_o, u_n]$ - між заданими початковою u_o і кінцевою

u_n похилими прямолінійними твірними площини. Причому, оператор *dsolve* з опцією *numeric* генерує помилку «singularity error» із значенням правої межі u_n , якщо частинка зупиняється або виходить на «прямолінійну» траєкторію.

Результати досліджень та їх обговорення. На рис. 1 побудовано траєкторії $r(u)$ та графіки швидкостей $V(u)$ частинки по похилій площині з кутом $\xi = 60^\circ$ нахилу її від вертикального положення в залежності від: а) кута кидання $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ з початковою швидкістю $V_0 = 4$ м/с і коефіцієнтом тертя $f = 0.3$; б) коефіцієнта тертя $f = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ з початковою швидкістю $V_0 = 4$ м/с і кутом кидання $\alpha_0 = 60^\circ$; в) початкової швидкості $V_0 = 2, 4, 6, 8$ м/с з коефіцієнтом тертя $f = 0.3$ і кутом кидання $\alpha_0 = 60^\circ$. Побудовані зображення демонструють, що всі частинки при цих умовах в похилій площині не зупиняються - швидкості частинок спочатку спадають до певної величини, а потім зростають. Наприклад, при коефіцієнті тертя $f = 0.3$ найменша швидкість $V = 0.88$ м/с частинки буде в момент її положення на твірній $u = 1.42$, а опісля вона розганяється майже по прямій лінії (рис. 1, а). Звернемо увагу, що використання незалежного параметра u (на відміну від параметра t), забезпечує можливість всі траєкторії $r(u)$ частинки на похилій площині обмежити однією прямолінійною твірною $u_n = 2.5$ (рис. 1, б).

Траєкторії $r(u)$ частинки та графіки її швидкості $V(u)$ за вище прийнятими умовами, але вже для іншого кута $\xi = 75^\circ$ нахилу площини, побудовано на рис. 2. Частинка з коефіцієнтом тертя $f = 0.3$ завжди зупиниться і місце зупинки буде залежати від кута α_0 кидання, наприклад при $\alpha_0 = 90^\circ$ це відбудеться на твірній $u \cong 4$ (рис.2, а). Швидкість частинок з однаковим коефіцієнтом тертя буде

зменшуватися найбільше при куту її кидання $\alpha_o = 30^\circ$, чим при $\alpha_o = 90^\circ$. Кинуті під кутом $\alpha_o = 60^\circ$ частинки з коефіцієнтами тертя $f = 0.01, 0.15$ після певного зменшення швидкості, починають її набирати на відміну від частинок з коефіцієнтами тертя $f = 0.3, 0.45$, які зупиняться на твірних $u \cong 3$ і $u \cong 3.8$ відповідно (рис. 2, б). Графічні залежності швидкості $V(u)$ частинки в залежності від її початкової швидкості кидання $V_o = 2, 4, 6, 8$ м/с дозволяють ще раз переконатися, що частинки із більшою початковою швидкістю V_o проходять більшу відстань до її зупинки (рис. 2, в). Причому, чим більша початкова швидкість V_o , тим з більшою мінімальною V_{min} швидкістю частинка приходить до місця зупинки.

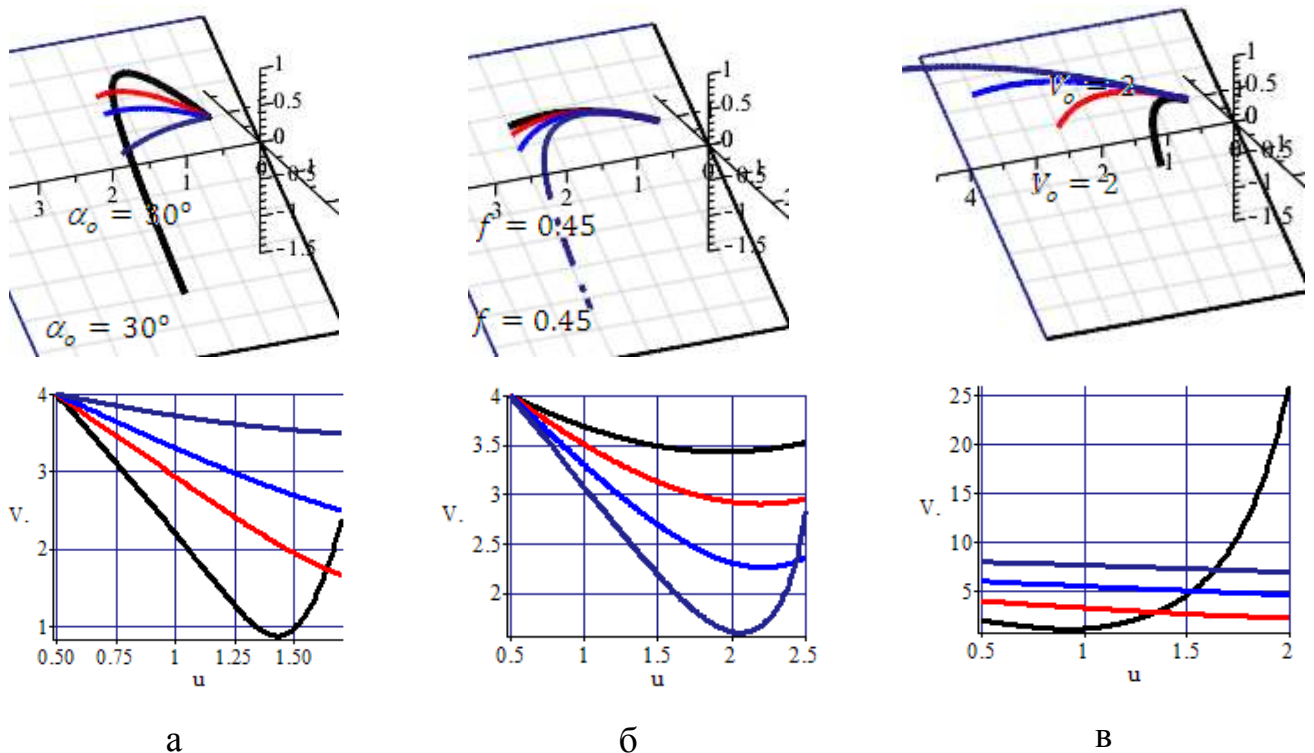


Рис. 1. Траєкторії $r(u)$ та швидкість $V(u)$ частинки по похилій $\xi = 60^\circ$ площині

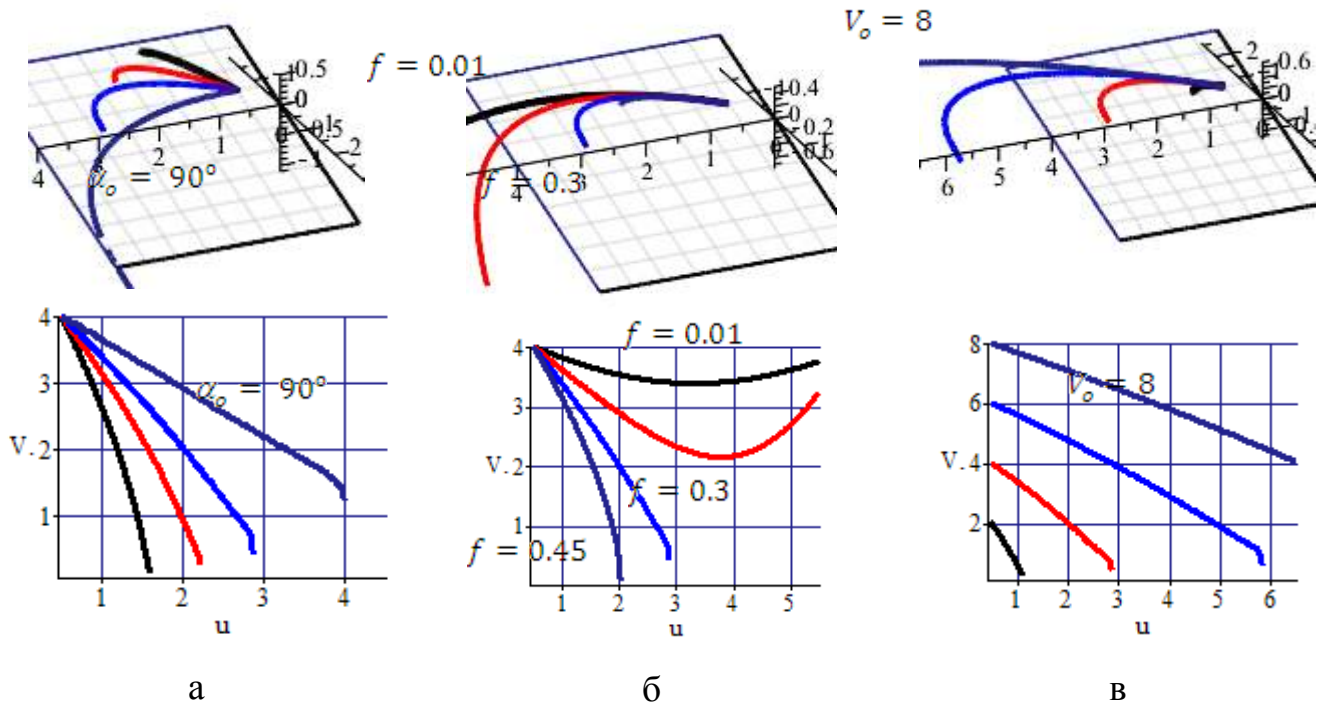


Рис.2. Траєкторії $r(u)$ та швидкість $V(u)$ частинки по площині $\xi = 70^\circ$

Для вертикальної площини ($\xi = 0^\circ$) система диференціальних рівнянь (10) набуває більш простішого вигляду:

$$\begin{cases} OT: = m V(u) \frac{d}{du} V(u) = -mg \left(\frac{d}{du} v(u) \right) \\ OP: = m \frac{V(u)^2 \frac{d^2}{du^2} v(u)}{1 + \left(\frac{d}{du} v(u) \right)^2} = -mg \end{cases}, \quad (13)$$

що дозволяє одержати вже явні залежності швидкості $V(u)$ частинки і координату $v(u)$ її положення у функції параметра u :

$$V(u) = V_0 \sin(\alpha_0) \sqrt{1 + \left(-\frac{g(u-u_0)}{V_0^2 \sin(\alpha_0)^2} + \text{ctg}(\alpha_0) \right)^2}, \quad (14)$$

$$v(u) = -\frac{g(u-u_0)^2}{2 V_0^2 \sin(\alpha_0)^2} + (u - u_0) \text{ctg}(\alpha_0) + v_0. \quad (15)$$

На рис. 3 побудовано траєкторії частинки $r(u)$, їх кривини $k(u)$ та швидкість $V(u)$ за початковою швидкістю $V_0 = 4$ м/с та різним кутом кидання

$\alpha_o = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ на інтервалі параметра $u \in [u_o, u_n]$. Ще раз акцентуємо, що значення незалежного параметра u знаходиться в межах $[u_o, u_n]$, де параметр u_o визначає v -координатну пряму, на якій знаходиться початкове положення частинки. Тому побудовані графіки швидкостей $V(u)$ частинки та кривин $k(u)$ траєкторії $r(u)$ зміщені вздовж осі Ou на величину u_o (рис. 3, б, в). Зрозумілим є те, що швидкість $V(u)$ частинки кинутої під кутом α_o в межах $]0; 90^\circ]$ буде спочатку падати до певної величини V_{min} у її найвищій точці, а потім збільшуватися до нескінченності при $u \rightarrow \infty$. Значення кривин $k(u)$ приймають найбільші значення у найвищій точці, а при падінні наближаються до нуля.

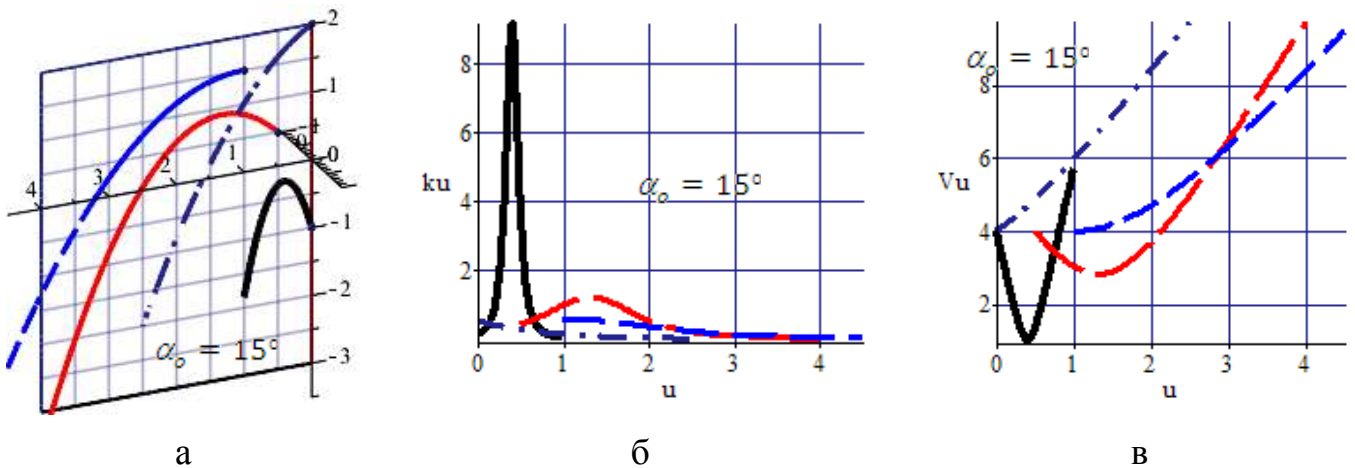


Рис. 3. Траєкторії $r(u)$ частинки, графіки кривини $k(u)$ та швидкості $V(u)$ в залежності кута α_o кидання у функції незалежного параметра u

Для горизонтальної площини ($\xi = 90^\circ$) система диференціальних рівнянь (10) з урахуванням залежності (3) швидкості $V(u)$ частинки має вигляд:

$$\begin{cases} OT: = \frac{d}{du} V(u) = -fg \\ OP: = \frac{\frac{d^2}{du^2} v(u)}{V(u)} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Застосування оператора $dsolve(\{OT, OP, OI\}, \{V(u), v(u)\})$ приводить до шуканих залежностей швидкості $V(u)$ частинки та її положення $v(u)$:

$$V(u) = V_o - fg(u - u_o), \quad (17)$$

$$v(u) = v_o + \cot(\alpha_o)(u - u_o). \quad (18)$$

Із рівняння (17) швидкості $V(u)$ частинки випливає, що при будь-якому значенні коефіцієнта тертя $f > 0$ частинка обов'язково зупиниться. Кінцеве значення u_n параметра u місця зупинки частинки знайдемо за умови $V(u) = 0$:

$$u_n = \frac{V_o}{fg} + u_o. \quad (19)$$

Пройдений шлях $S(u)$ частинкою у функції параметра u визначимо рішенням диференціального рівняння виду:

$$dsolve\left(\left[\frac{d}{du}S(u) = V(u), S(u_o) = 0\right], S(u)\right), \quad (20)$$

звідки одержимо:

$$S(u) = (V_o + fg u_o)(u - u_o) + \frac{fg}{2}(u^2 - u_o^2). \quad (21)$$

Побудовані графіки (рис. 4, б) швидкостей $V(u)$ частинки показують її рівносповільнений рух при значеннях коефіцієнта тертя $f = 0.05, 0.15, 0.3, 0.45$ і початкової швидкості частинки $V_o = 4$ м/с. В околі зупинки частинки, величина її пройденого шляху $S(u)$ зменшується по параболічному закону (рис. 4, в). Зрозуміло, що для найменшого значення коефіцієнта тертя f , величина параметра u буде найбільшою до повної зупинки частинки.

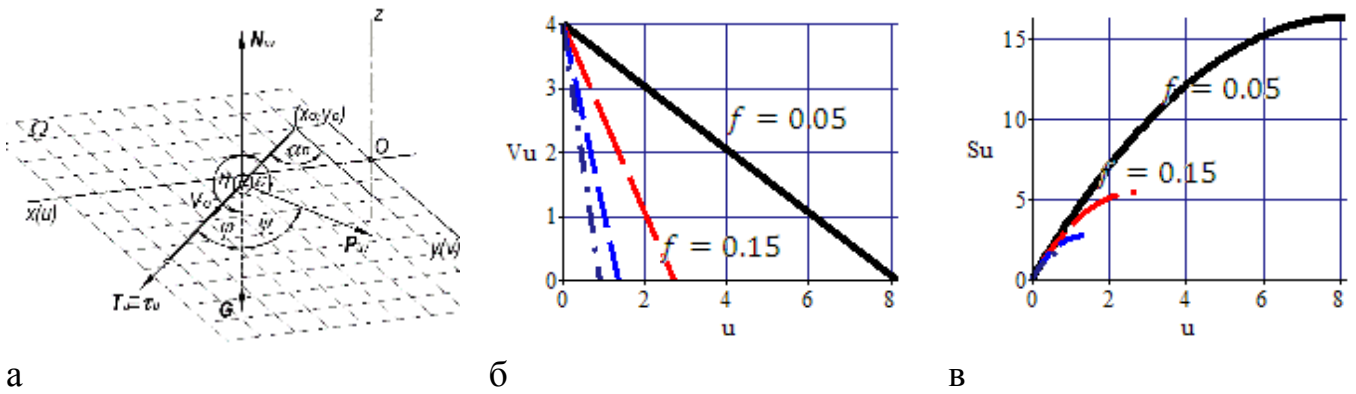


Рис. 4. Рух частинки по горизонтальній площині:

а – вихідні умови; б – швидкість $V(u)$; в – пройдений шлях $S(u)$ в залежності коефіцієнта тертя f

Траєкторію $r(u)$ частинки по горизонтальній площині можна отримати підстановкою виразу $v = v(u)$ до рівняння (2), звідки матимемо:

$$r(u) = r[u, v_0 + \cot(\alpha_0)(u - u_0), 0], \quad (22)$$

або ж множенням $S(u) \cdot r_e$:

$$r(u) = S(u) r_e = r [S(u) \sin(\alpha_0), S(u) \cos(\alpha_0), 0], \quad (23)$$

де r_e - одиничний вектор напрямку кидання частинки в площині $R(u, v)$, який визначається кутом α_0 .

Другий спосіб є доцільнішим при імітаційному відтворенні руху частинки в горизонтальній площині, при якому на моніторі комп'ютера відображається характер переміщення руху частинки.

Висновки і перспективи.

1. Показано, що орієнтований на комп'ютерну реалізацію метод моделювання руху частинки по шорсткій поверхні є загальним і результативним.

2. Застосування супровідних тригранників траєкторії частинки дозволило звести закон руху частинки до системи із двох диференціальних рівнянь, шуканими якими є внутрішні u, v - координати поверхні траєкторії частинки. Траєкторія

частинки r в декартовій системі координат $Oxyz$ отримується підстановкою знайдених u, v - координат до рівняння $R(u, v)$ поверхні.

3. Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні у функції незалежного параметра u - її положення дозволяє дослідити її траєкторно-кінематичні властивості на заданій ділянці поверхні.

4. Вибір супровідного тригранника траєкторії $OuvN$ чи $OTPN$ не впливає на одержані результати траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки, хоча позначається в послідовності виведення її закону руху.

5. Використання супровідного тригранника $OTPN$ є більш природнім для опису руху частинки по поверхні у функції незалежних параметрів u – та α .

Список літератури

1. Адамчук В.В. Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений: монография / В.В. Адамчук. - К.: Аграрна наука, 2010. - 178 с.
2. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. - Гродно-Таллин, 2007. - 458 с.
3. Пилипака С.Ф. Автоматизация моделирования руху частинки по гравітаційних поверхнях на прикладі похилої площини в системі Maple / С.Ф. Пилипака, А.В. Несвідомін // Прикл. геом. та інж. граф. - К.: КНУБА, 2011. - Вип.86. - С.64-69.
4. Аушева Н.М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикл. геом. та інж. граф. - К.: КНУБА, 2013. - Вип.91. - С.56-57.

References

1. Adamchuk, V. V. (2010). Teoriya tsentrobezhnykh rabochikh organov mashin dlya vneseniya mineral'nykh udobreniy: monografiya [Theory of centrifugal working bodies of machines for the application of mineral fertilizers]. Kyiv: Agrarna nauka, 178.
2. Alad'yev, V. Z., Boyko, V. K., Rovba, E. A. (2007). Programmirovaniye i razrabotka prilozheniy v Maple [Programming and application development in Maple]. Grodno-Tallin, 458.
3. Pylypaka, S. F., Nesvidomin, A. V. (2011). Avtomatyzatsiia modeliuvannia rukhu chastynky po hravitatsiinykh poverkhniakh na prykladi pokhyloi ploshchyny v systemi Maple [Automation of modeling of a particle motion on gravitational surfaces on an example of an inclined plane in the system Maple]. Prykl. heom. ta inzh. hraf. Kyiv: KNUBA, 86, 64-69.
4. Ausheva, N. M., Demchyshyn, A. A. (2013). Pobudova poverkhon z ortohonalnymy koordynatnymy sitkamy na osnovi izotropnykh kryvykh [Construction of

surfaces with orthogonal coordinate grids on the basis of isotropic curves] Prykl. heom. ta inzh. hraf. - Kyiv: KNUBA, 91, 56-57.

MAPLE-МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ В ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА ЕЕ ПОЛОЖЕНИЯ

А. В. Несвидомин

Аннотация. Во многих технологических процессах сельскохозяйственного производства имеет место движение частиц материала по наклонной плоскости. Понимание закономерностей движения частицы по плоскости произвольного положения в трехмерном пространстве позволяет целенаправленно провести расчет конструктивно-кинематических параметров рабочих органов.

Компьютерное моделирование движения частицы позволяет отбросить громоздкие аналитические преобразования и обеспечить диалоговый режим для проведения необходимых вычислительных экспериментов по анализу движения частицы с различными исходными условиями ее бросания по любой шершавой поверхности, определенным образом расположенной в пространстве.

Цель исследования - разработка Maple-модели движения частицы по наклонной плоскости в функции параметра ее положения.

Применение сопроводительных трёхгранников траектории частицы позволило свести закон движения частицы в систему из двух дифференциальных уравнений, искомыми каковых являются внутренние u , v - координаты поверхности траектории частицы.

Полученный закон движения частицы по шероховатой наклонной плоскости в функции положения ее на плоскости в проекциях на орты T и P трёхгранника Дарби $OTPN$.

Полученные траектории $r(u)$ и графики скоростей $V(u)$ частицы по наклонной плоскости с разным углом наклона ее от вертикального положения для различных углов бросания, начальной скорости и коэффициента трения. Проанализировано движение частицы при соответствующих начальных условиях.

Моделирование движения частицы по шероховатой поверхности в функции ее положения позволяет исследовать ее траекторных-кинематические свойства на заданном участке поверхности.

Выбор сопроводительного трёхгранника траектории $OuvN$ или $OTPN$ не влияет на полученные результаты траекторных-кинематических свойств движения частицы, хотя сказывается в последовательности вывода закона ее движения.

Ключевые слова: *сопроводительный трёхгранник, материальная точка, наклонная плоскость, траектория движения*

MAPLE-MODEL OF MOVEMENT OF PARTICIPANTS IN A PASSENGER PLANE IN THE FUNCTION OF THE PARAMETER OF ITS PROVISIONS

A. Nesvidomin

Abstract. *In many agricultural technological processes there is movement of material particles on an inclined plane. Understanding the patterns of motion of a particle in the plane of arbitrary position in a three-dimensional space allows us to deliberately calculate the structural and kinematic parameters of the working bodies.*

Computer simulation of the motion of a particle allows to discard bulky analytical transformations and provide a dialogue mode for carrying out the necessary computational experiments on the analysis of the motion of a particle under different initial conditions of its throw on any rough surface, which in a certain way is located in space.

The purpose of the research is to develop Maple-model of motion of a particle on an inclined plane in the function of its position parameter.

Application of accompanying triangles of the particle trajectory allowed us to reduce the law of motion of a particle to a system of two differential equations, the internal ones u, v are the coordinates of the surface of the particle's trajectory.

The law of motion of a particle over a rough sloping plane in the function of positioning it on a plane in projections on the orcs T and P of the Darbu triangular OTPN is obtained.

The trajectories $r(u)$ and graphs of velocities $V(u)$ of the particle on an inclined plane with different angles of its inclination from the vertical position for different angles, initial speed and coefficient of friction are obtained. The motion of the particle under the appropriate initial conditions is analyzed.

Simulation of the motion of a particle on a rough surface in the function of its position allows us to investigate its trajectory-kinematic properties on a given section of the surface.

The choice of the accompanying triangular of the $OuvN$ or OTPN trajectory does not affect the results of the trajectory-kinematic properties of the particle motion, although it is indicated in the sequence of the derivation of its motion law.

Key words: *accompanying triangular, material point, inclined plane, trajectory of motion*