

MAPLE-МОДЕЛЬ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ В ФУНКЦІЇ ЧАСУ

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: a.nesvidomin@gmail.com

Анотація. *Взаємодія рухомої частинки з шорсткою поверхнею має місце у багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва і є предметом багатьох досліджень. Визначення закономірностей руху частинки по площині довільного положення в тривимірному просторі дозволяє виконати розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.*

Комп'ютерне моделювання руху частинки дозволяє замінити громіздкі аналітичні перетворення і забезпечити діалоговий режим для проведення необхідних обчислювальних експериментів з аналізу руху частинки за різними вихідними умовами її кидання по будь-якій шорсткій поверхні, яка певним чином розташована в просторі.

Мета дослідження – розробка Maple-моделі руху частинки по похилій площині в функції часу.

Застосування супровідного тригранника Дарбу дозволило звести закон руху частинки до системи із двох диференціальних рівнянь для визначення швидкості та кривизни траєкторії частинки.

*Отриманий закон руху частинки по шорсткій похилій площині у функції часу в проекціях на орти T і P тригранника Дарбу **ОТРН**.*

Отримані траєкторії $r(u)$ та графіки швидкостей $V(u)$ частинки по похилій площині з різним кутом нахилу її від вертикального положення для різного кута кидання, початкової швидкості та коефіцієнта тертя. Проаналізований рух частинки за відповідних початкових умов.

Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні у функції часу дозволяє дослідити її траєкторно-кінематичні властивості на заданій ділянці поверхні.

*Вибір супровідного тригранника траєкторії **ОuvN** чи **ОТРН** не впливає на одержані результати траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки, хоча позначається в послідовності виведення її закону руху.*

Ключові слова: *супровідний тригранник, матеріальна точка, похила площина, траєкторія руху*

Актуальність. Взаємодія рухомої частинки з шорсткою поверхнею має місце у багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва і є предметом багатьох досліджень [1].

Встановлення закономірностей руху частинки (як матеріальної точки) по шорсткій поверхні довільного положення в тривимірному просторі дозволяє провести розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Складність аналітичного опису руху частинки по шорсткій поверхні приводить до застосування простих за формою поверхонь та їх частковими положеннями в просторі. Для спрощення аналітичних перетворень виведення закону руху частинки по шорсткій поверхні у вигляді системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та їх розв'язку, кожен науковець індивідуально приймав ту чи іншу систему віднесення - декартову прямокутну, циліндричну, сферичну тощо.

Сучасні комп'ютерні технології дозволяють ефективно вирішити певні етапи моделювання руху частинки по шорсткій поверхні, наприклад, наближено розв'язати систему диференціальних рівнянь будь-якої складності, графічно унаочнити траєкторно-кінематичні характеристики тощо [2]. Але як створити єдину модель дослідження руху частинки по довільній шорсткій поверхні в середовищах комп'ютерної математики - питання залишається не вирішеним.

Розвиток комп'ютерних технологій символічного обчислення дозволяє повністю виключити науковця виконання ним трудомістких аналітичних перетворень для формування закону руху частинки по шорсткій поверхні, а залишити йому тільки інтерактивний обчислювальний експеримент. Запрограмувати цей процес можливо на основі єдиної геометро-математичної моделі руху частинки по широкому колу шорстких поверхонь [3].

Мета дослідження – розробка Maple-моделі руху частинки по похилій площині у функції часу.

Матеріали і методи дослідження. Якщо на шорстку похилу площину Ω під деяким кутом ξ від вертикального положення кинути частинку, то вона опише певну

криволінійну траєкторію, форма якої залежить від співвідношень значень: 1) початкової швидкості V_0 ; 2) кута α_0 напрямку кидання частинки; 3) положення $[u_0, v_0]$ частинки в площині $R(u, v)$ на початку її руху; 4) коефіцієнта f зовнішнього тертя; 4) коефіцієнта q опору повітря.

Системи диференціальних рівнянь законів руху частинки по похилій площині в проекціях на орти мають вигляд:

u і v тригранника $OuvN$ (рис. 1, а):

$$\left\{ \begin{array}{l} Ou: = m \frac{d}{dt^2} u(t) = - \frac{\frac{d}{dt} u(t) \left(f mg \sin(\xi) + q \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} \\ Ov: = m \frac{d}{dt^2} v(t) = - \frac{f mg \sin(\xi) \frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - mg \cos(\xi) - q \frac{d}{dt} v(t) \sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2} \end{array} \right. ; \quad (1)$$

T і P тригранника $OTPN$ (рис. 1, б):

$$\left\{ \begin{array}{l} OT := \frac{m \left(\frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} = - \frac{mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - fmg \sin(\xi) - q \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right) \\ OP: = m \left(\frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = -mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} u(t) \end{array} \right. . \quad (2)$$

Початкові умови розв'язку одержаної системи диференціальних рівнянь визначимо за умови, що напрям початкової швидкості V_0 у внутрішніх u, v -координатах площини $R(u, v)$ задано кутом α_0 , наприклад до вектора R'_v . Тоді довжина дуги ds траєкторії $r(t)$ на початку руху частинки дорівнює:

$$ds = V_0 dt, \quad (3)$$

а відношення диференціалів координатних ліній до довжини дуги ds будуть:

$$\frac{\sqrt{E} \frac{d}{dt} u(t)}{ds} = \frac{\sqrt{E} \frac{d}{dt} u(t)}{V_0 dt} = \sin(\alpha_0), \quad \frac{\sqrt{G} \frac{d}{dt} v(t)}{ds} = \frac{\sqrt{G} \frac{d}{dt} v(t)}{V_0 dt} = \cos(\alpha_0), \quad (4)$$

звідки:

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{V_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{E}}, \quad \frac{d}{dt} v(t) = \frac{V_0 \cos(\alpha_0)}{\sqrt{G}}. \quad (5)$$

Враховуючи положення частинки у внутрішніх u, v -координатах в момент $t_0 = 0$ - на початку її руху рівними $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$, а також значення $\sqrt{E} = \sqrt{G} = 1$ коефіцієнтів 1-ї квадратичної форми площини, матимемо:

$$O_i := \frac{d}{dt} u(0) = V_0 \sin(\alpha_0), u(0) = u_0, \frac{d}{dt} v(0) = V_0 \cos(\alpha_0), v(0) = v_0, \quad (6)$$

де: α_0 - кут між напрямом початкової швидкості V_0 і віссю R'_v ; u_0, v_0 - внутрішні координати початкового положення частинки на площині.

Наведені початкові умови (6) не залежать від положення площини в системі координат $Oxyz$ та вибору супровідного тригранника $OuvN$ чи $OTPN$.

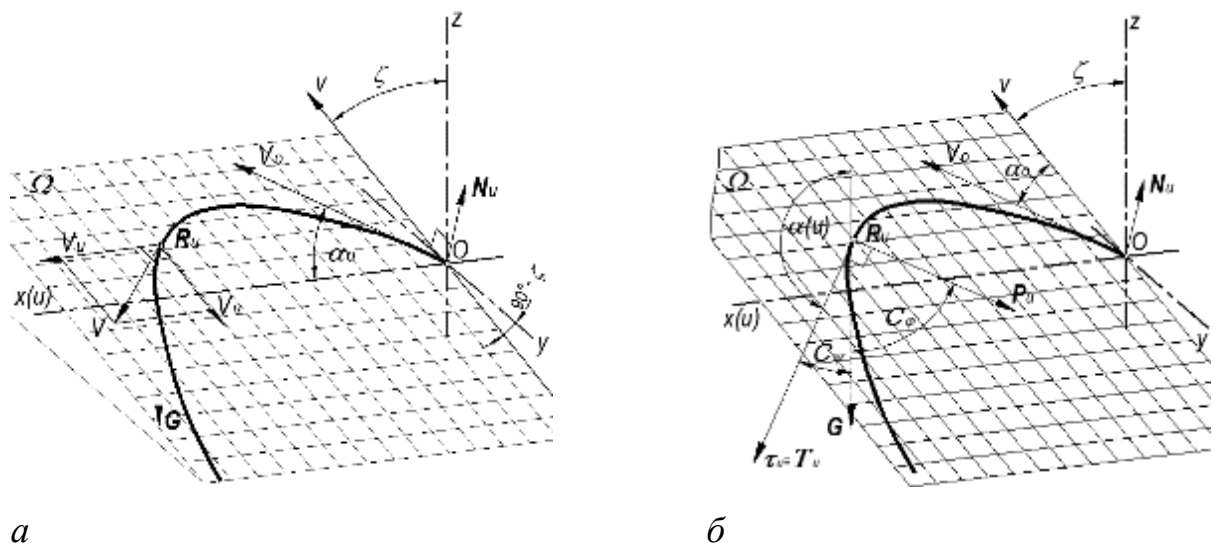


Рис.1. Формування закону руху частинки по похилій площині в проекціях на осі:

a - u і v локальної системи $OuvN$; b - T і P тригранника Дарбу $OTPN$

Для абсолютно гладенької похилої площини ($f = 0$) і без врахування опору повітря ($q = 0$) системи рівнянь (1) і (2) приймають наступні вигляди:

$$\begin{cases} Ou: = m \frac{d}{dt^2} u(t) = 0 \\ Ov: = m \frac{d}{dt^2} v(t) = -mg \cos(\xi) \end{cases}, \quad (7)$$

та

$$\begin{cases} OT := m \left(\frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = -mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} v(t) \\ OP := m \left(\frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = -mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} u(t) \end{cases}, \quad (8)$$

розв'язок яких є однаковим і виражається у наступному явному вигляді:

$$u(t) = V_o t \sin(\alpha_o) + u_o, \quad (9)$$

$$v(t) = V_o t \cos(\alpha_o) - \frac{g t^2 \cos(\xi)}{2} + v_o. \quad (10)$$

У гладенькій похилій площині рух частинки вздовж u -координатної лінії відбувається рівномірно, а вздовж v -координатної лінії (прямої найбільшого нахилу площини) за нелінійним законом.

Без врахування опору повітря ($q = 0$), але з врахуванням коефіцієнта тертя ($f \neq 0$) систем диференціальних рівняння (1) і (2) матимуть вигляди:

$$\begin{cases} Ou := m \frac{d}{dt^2} u(t) = -f mg \frac{\frac{d}{dt} u(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} \sin(\xi) \\ Ov := m \frac{d}{dt^2} v(t) = -mg \cos(\xi) - f mg \frac{\frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} \sin(\xi) \end{cases}, \quad (11)$$

та

$$\begin{cases} OT := \frac{m \left(\frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} = -\frac{mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} - fmg \sin(\xi) \\ OP := m \left(\frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = -mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} u(t) \end{cases}. \quad (12)$$

Застосування оператора *dsolve* [2] до систем диференціальних рівнянь (11) і (12), на відміну від попередніх систем (7) і (8), вже не приводить до шуканих виразів $u(t)$ і $v(t)$ у явному вигляді, оскільки ці системи рівнянь не мають точного розв'язку. Єдиний вихід - це скористатися наближеними методами Maple [2], результат яких представляється або ж поліноміальною інтерполяцією або ж у вигляді набору числових даних. Дослідимо обидва підходи.

Перевага методу Рунге-Кутта в точності є вирішальною його застосування в наближених розв'язках законів руху частинки, для чого було створено відповідні програмні функції *RtTrajOuv*, *RtTrajOTP* та інші), які дискретні числові значення трансформують в графічні зображення.

Результати досліджень та їх обговорення. За їх допомогою проведемо обчислювальні експерименти з аналізу впливу вихідних умов на характер руху частинки по шорсткій площині. На рис.2 побудовано траєкторії $\mathbf{r}(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$ залежно від: а) кута кидання $\alpha_o = 1^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ при $V_o = 4$ м/с, $f = 0.3$, $\xi = 60^\circ$; б) початкової швидкості $V_o = 2, 4, 6, 8$ м/с, $f = 0.3$, $\xi = 60^\circ$; в) кута нахилу $\xi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ при $\alpha_o = 30^\circ$, $f = 0.3$, $V_o = 4$ м/с. Можна стверджувати зокрема, що: а) частинка кинута в протилежний напрямок нахилу площини спочатку зменшує свою швидкість до повної зупинки, а потім її починає набирати; б) частинка з найменшою початковою швидкістю V_o швидше сповільнює свій рух, а потім скоріше розганяється; в) чим менш похилена площина від її вертикального положення, тим швидше частинка набирає швидкість.

Графіки швидкості $V(t)$ частинки по шорсткій площині з кутом $\xi = 75^\circ$ її нахилу від вертикального положення в залежності від коефіцієнта тертя $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$ при постійних значеннях $V_o = 4$ м/с і $\alpha_o = 30^\circ$ показують (рис. 3, а), що частинки з коефіцієнтами тертя $f = 0.3, 0.45$ зупиняться в площині через проміжки часу $t \cong 0.7, 1.4$ с, а частинки з коефіцієнтами тертя $f = 0.01, 0.15$ -не зупиняються. Взагалі, всі частинки з коефіцієнтом тертя $f = 0.3 > \tan(90^\circ - \xi)$ зупиняться в площині, але час їх зупинки буде залежати як від кута $\alpha_o = 1^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ їх кидання (рис. 3, б), так і від їх початкової швидкості $V_o = 2, 4, 6, 8$ м/с (рис. 3, в). Найшвидше зупиниться частинка, яка кинута в протилежному напрямі нахилу площини і з найменшою початковою швидкістю.

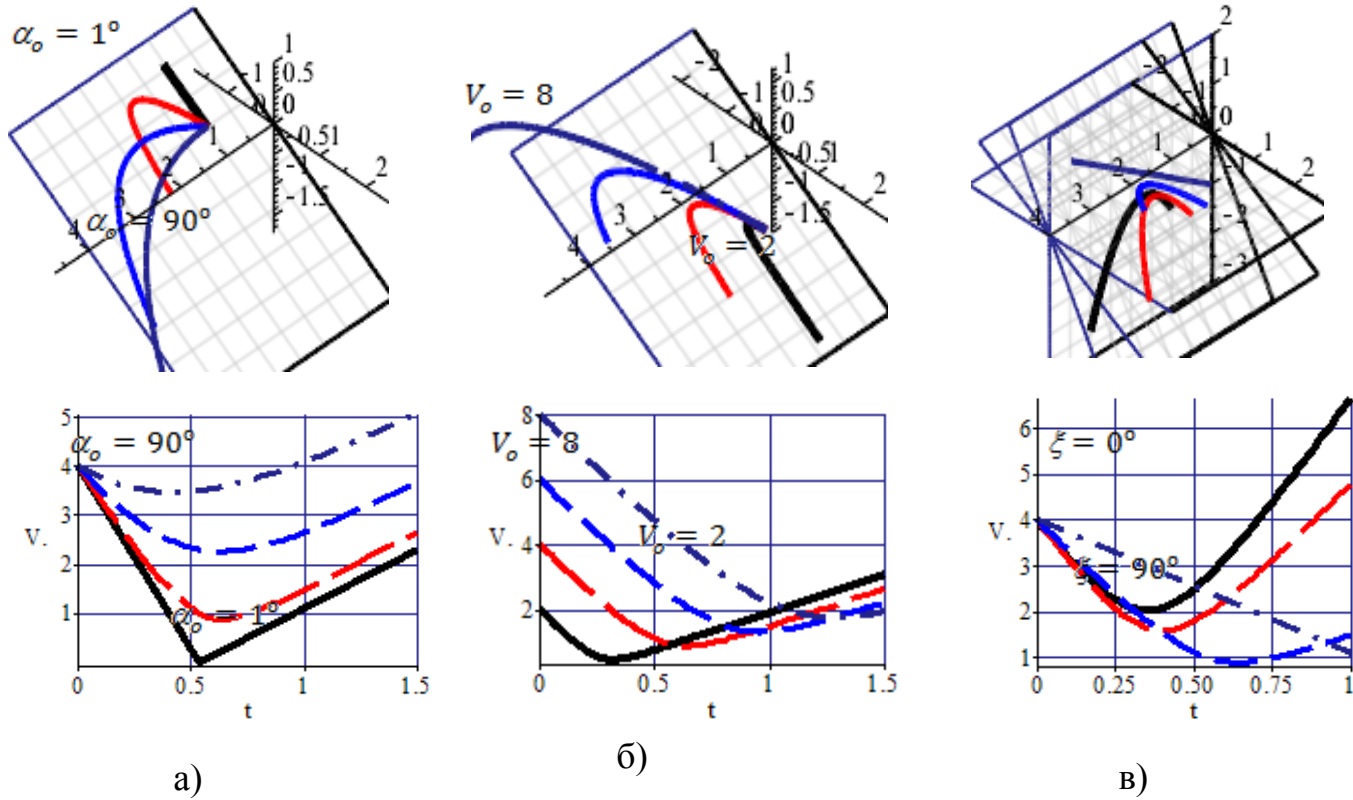


Рис.2. Траєкторії $r(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$

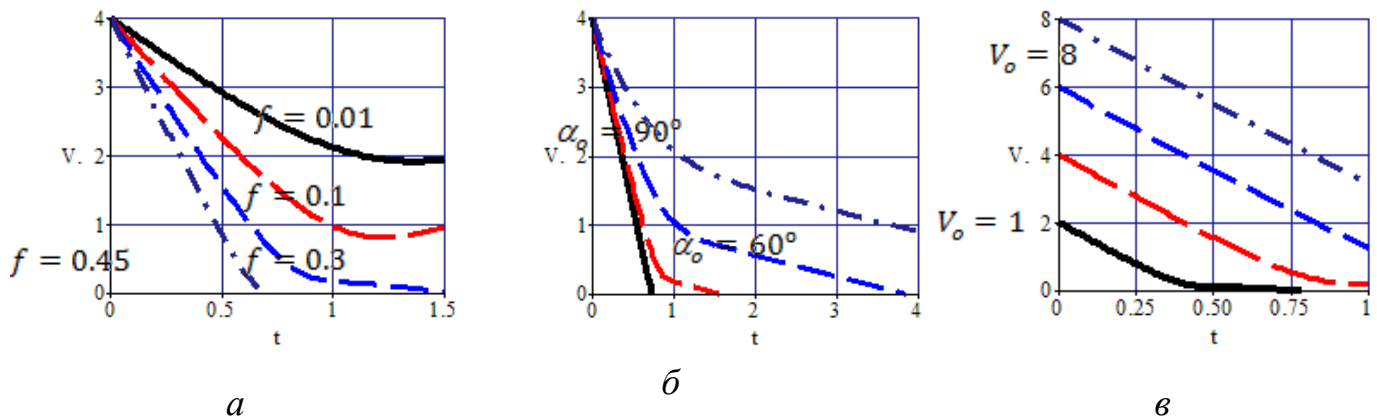


Рис. 3. Графіки швидкості $V(t)$ частинки в залежності:
 а - коефіцієнта тертя f ; б - кута α_0 кидання; в - початкової швидкості V_0

На рис. 3 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки по похилій площині та графіки її швидкості $V(t)$ відповідно для різного кута $\xi = 70^\circ, 73.4^\circ, 80^\circ$ нахилу площини від вертикального положення при постійних значеннях початкової швидкості $V_0 = 8$

м/с, коефіцієнта тертя $f = 0.3$ та кута кидання $\alpha_0 = 30^\circ$ залежно від коефіцієнта $q = 0, 0.5, 1, 2$ опору повітря (парусності).

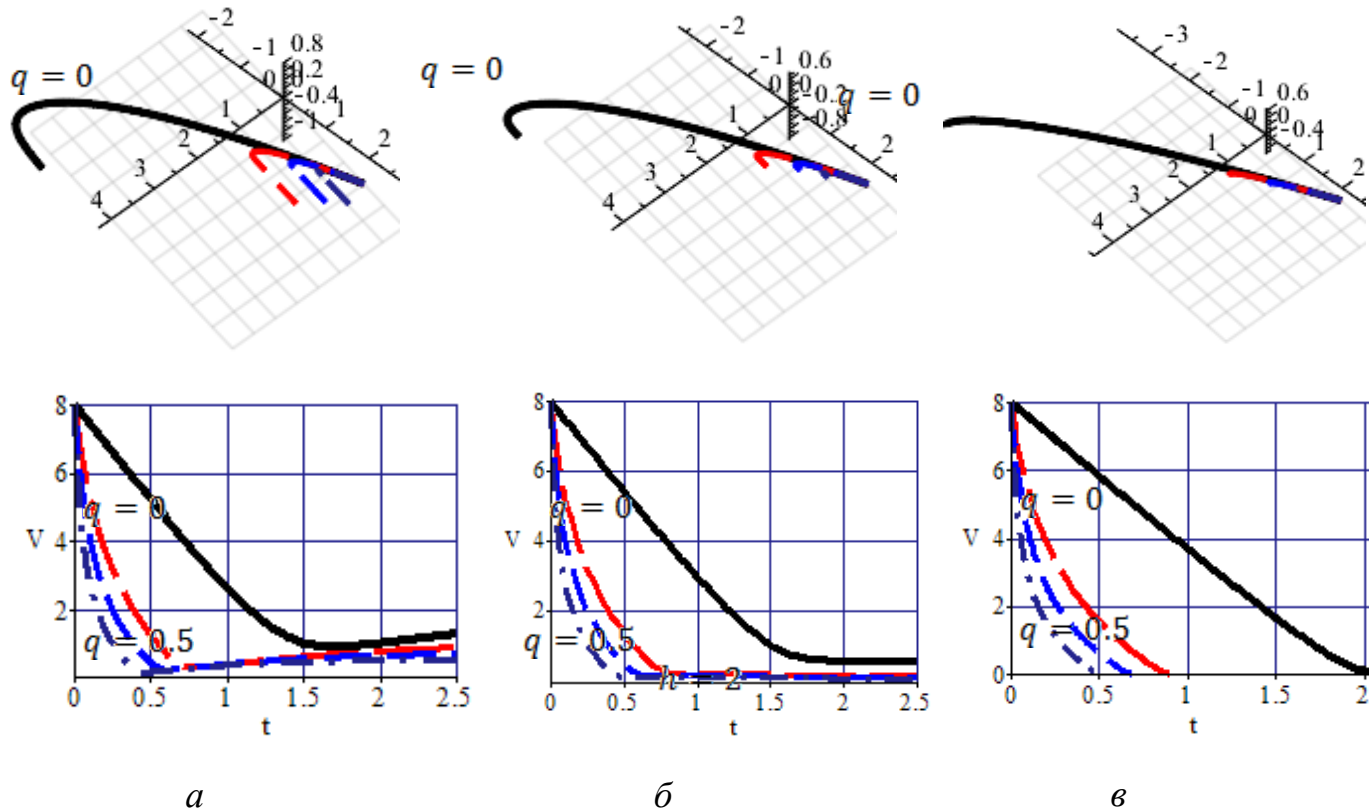


Рис. 4. Траєкторії $r(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$ залежно від коефіцієнта парусності $q = 0, 0.5, 1, 2$ за умови:
 $a - \xi = 70^\circ$; $б - \xi = 73.4^\circ$; $в - \xi = 80^\circ$

Можна стверджувати (рис. 4, *a*), що при умові $f < \tan(90^\circ - \xi)$ частинки ніколи не зупиняться в площині. Якщо ж коефіцієнт тертя $f = \tan(90^\circ - \xi)$, то незалежно від значення коефіцієнта q опору повітря всі частинки будуть рухатися в площині, але з швидкістю близькою до нуля (рис. 4, *б*). Якщо кут ξ нахилу площини від вертикального її положення буде $f > \tan(90^\circ - \xi)$, то частинки з більшим коефіцієнтом q опору повітря зупиняться значно швидше (рис. 4, *в*).

Висновки і перспективи. Показано, що орієнтований на комп'ютерну реалізацію метод моделювання руху частинки по шорсткій поверхні у функції часу є загальним і результативним.

Проведені обчислювальні експерименти з аналізу впливу вихідних умов на характер руху частинки по шорсткій площині.

Вибір супровідного тригранника траєкторії *OuvN* чи *OTPN* не впливає на одержані результати траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки, хоча позначається в послідовності виведення її закону руху, але використання супровідного тригранника *OTPN* є більш природнім для опису руху частинки по поверхні у функції незалежного параметра α .

Список літератури

1. Адамчук В.В. Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений: монография / В.В. Адамчук. - К.: Аграрна наука, 2010. - 178 с.
2. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования / В.З. Аладьев. - Гродно: Лаборатория Базовых Знаний. - 2006. - 792 с.
3. Пилипака С.Ф. Автоматизация моделирования руху частинки по гравітаційних поверхнях на прикладі похилої площини в системі Maple / С.Ф. Пилипака, А.В. Несвідомін // Прикл. геом. та інж. граф. - К.: КНУБА, 2011. - Вип.86. - С.64-69.

References

1. Adamchuk, V. V. (2010). Teoriya tsentrobezhnykh rabochikh organov mashin dlya vneseniya mineral'nykh udobreniy: monografiya [Theory of centrifugal working bodies of machines for the application of mineral fertilizers]. Kyiv: Agrarna nauka, 178.
2. Alad'yev, V. Z. (2006). Sistemy komp'yuternoy algebrы: Maple: Iskusstvo programmirovaniya Grodno: Laboratoriya Bazovykh Znaniy [Computer Algebra Systems: Maple: The Art of Programming]. Grodno: Laboratoriya Bazovykh Znaniy, 792.
3. Pylypaka, S. F., Nesvidomin, A. V. (2011). Avtomatyzatsiia modeliuvannia rukhu chastynky po hravitatsiinykh poverkhniakh na prykladi pokhyloi ploshchyny v systemi Maple [Automation of modeling of a particle motion on gravitational surfaces on an example of an inclined plane in the system Maple]. Prykl. heom. ta inzh. hraf. Kyiv: KNUBA, 86, 64-69.

MAPLE-МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ В ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА ЕЕ ПОЛОЖЕНИЯ

А. В. Несвідомін

Аннотация. *Взаимодействие подвижной частицы с шероховатой поверхностью имеет место во многих технологических процессах сельскохозяйственного производства и является предметом многих исследований.*

Определение закономерностей движения частицы по плоскости произвольного положения в трехмерном пространстве позволяет выполнить расчет конструктивно-кинематических параметров рабочих органов.

Компьютерное моделирование движения частицы позволяет заменить громоздкие аналитические преобразования и обеспечить диалоговый режим для проведения необходимых вычислительных экспериментов по анализу движения частицы с различными исходными условиями ее бросания по любой шероховатой поверхности, определенным образом расположенной в пространстве.

Цель исследования - разработка Maple-модели движения частицы по наклонной плоскости в функции времени.

Применение сопроводительного трехгранника Дарбу позволило свести закон движения частицы в систему из двух дифференциальных уравнений для определения скорости и кривизны траектории частицы.

Получен закон движения частицы по шероховатой наклонной плоскости в функции времени в проекциях на орты T и P трехгранника Дарбу $OTPN$.

Получены траектории $r(u)$ и графики скоростей $V(u)$ частицы по наклонной плоскости с разным углом наклона ее от вертикального положения для всех угла бросания, начальной скорости и коэффициента трения. Проанализировано движение частицы при соответствующих начальных условий.

Моделирование движения частицы по шероховатой поверхности в функции времени позволяет исследовать ее траекторно-кинематические свойства на заданном участке поверхности.

Выбор сопроводительного трехгранника траектории $OuvN$ или $OTPN$ не влияет на полученные результаты траекторных-кинематических свойств движения частицы, хотя сказывается в последовательности вывода ее закона движения.

Ключевые слова: *сопроводительный трехгранник, материальная точка, наклонная плоскость, траектория движения*

MAPLE-MODEL OF MOVEMENT OF A PARTICLE ON THE INCLINED PLANE IN THE FUNCTION OF THE PARAMETER OF TIME

A. Nesvidomin

Abstract. *The interaction of the moving particle with the rough surface takes place in many agricultural production processes and has been the subject of much research. Determination of the laws of motion of a particle on the plane of an arbitrary position in three-dimensional space allows to perform the calculation of structural-kinematic parameters of the working bodies.*

Computer simulation of particle motion allows to replace cumbersome analytical transformations and provide a dialog mode for carrying out the necessary computational experiments to analyze the motion of a particle under different initial conditions of its throwing on any rough surface, which is in a certain way located in space.

The purpose of the study is to develop a Maple model of particle motion on an inclined plane as a function of time.

The use of the Darboux trihedron allowed to reduce the law of motion of a particle to a system of two differential equations to determine the velocity and curvature of the particle trajectory.

The law of motion of a particle along a rough inclined plane in the function of time in the projections on the T and P vertices of the OTPN Darboux trihedron is obtained.

The trajectories $r(u)$ and velocity graphs $V(u)$ of the particle along an inclined plane with different angle of inclination from the vertical position for different throw angle, initial velocity and coefficient of friction were obtained. The particle motion under appropriate initial conditions is analyzed.

Simulation of the motion of a particle on a rough surface as a function of time allows us to investigate its trajectory-kinematic properties at a given area of the surface.

The choice of the accompanying trihedron trajectory OυvN or OTPN does not affect the obtained results of the trajectory-kinematic properties of the motion of the particle, although it is indicated in the sequence of derivation of its law of motion.

Key words: *accompanying trihedron, material point, inclined plane, trajectory of motion*