

УДК 534.232.082.744

Математическое моделирование процесса регистрации ультразвуковых волн в стальном металлопрокате преобразователем электромагнитного типа. Часть 2.

О.Н. Петрищев², д-р техн. наук, М.И. Романюк², Г.М. Сучков¹, д-р техн. наук, С.В. Хащина¹

¹ Национальный технический университет «Харьковский Политехнический Институт», ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина.

² Национальный технический университет Украины «Киевский Политехнический Институт», ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

На основе предложенного подхода [часть 1] к построению математических моделей электромагнитных ультразвуковых преобразователей в режиме приема упругих колебаний, получены выражения для расчета преобразователей электромагнитного типа на примере регистрации радиально распространяющихся ультразвуковых волн в ферромагнитных пластинах.

Рассмотрена модельная ситуация случая регистрации радиально распространяющихся поверхностных волн Рэлея. Дана оценка скоростей распространения рэлеевской волны и волн сдвига для материалов с наиболее распространенными значениями коэффициентов Пуассона. Библ. 7, рис. 2., табл. 1.

Ключевые слова: электромагнитно-акустический преобразователь (ЭМАП), режим регистрации, математическая модель, волны Рэлея.

Регистрация радиально распространяющихся ультразвуковых волн

Рассмотрим случай, когда длина пробега ультразвуковой волны существенно превосходит линейные размеры источника. Эта ситуация является модельной при математическом описании процесса регистрации ультразвуковых волн, которые возбуждаются единичным источником в системах выборочного ультразвукового контроля. В такой постановке необходимо рассматривать цилиндрические, радиально распространяющиеся, ультразвуковые волны в изотропном упругом слое.

Предположим, что в металлической пластине толщиной $2h$ (позиция 2 на рис. 1,а) действует цилиндрический источник (позиция 1), который излучает осесимметричные, гармонически изменяющиеся во времени по закону $e^{i\omega t}$, ультразвуковые волны. За пределами источни-

ка амплитудные значения компонентов вектора смещения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= U_r(\gamma, z)H_1^{(2)}(\gamma r), \\ u_z(r, z) &= U_z(\gamma, z)H_0^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (1)$$

где r, z – координатные оси цилиндрической системы координат, связанной с осью симметрии источника возмущений (рис. 1,б); $U_\beta(\gamma, z)$ ($\beta = r, z$) – известные по условию решаемой задачи функции, которые определяются типом распространяющейся волны Лэмба; γ – волновое число; $H_\nu^{(2)}(\gamma r)$ ($\nu = 0, 1$) – функции Ханкеля второго рода порядка ν .

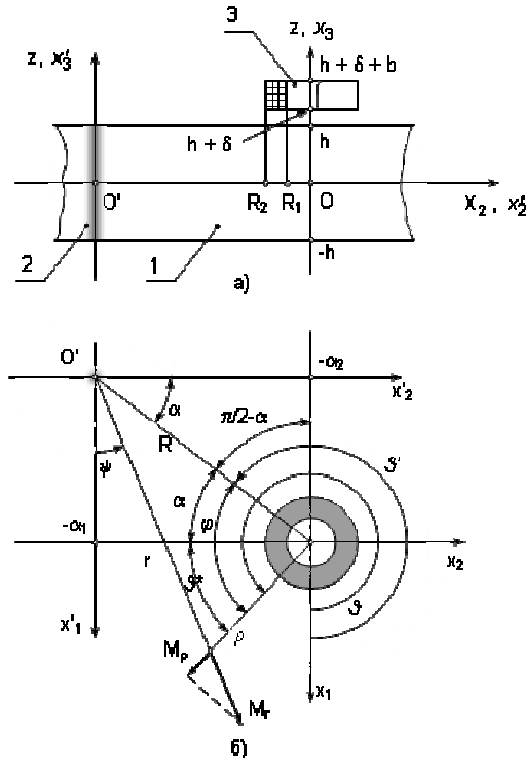


Рис. 1. Взаимное расположение источника и приемника (а) ультразвуковых волн и расчетная схема (б) для разложения по цилиндрическим функциям системы координат (ρ, θ, z)

Будем полагать, что лист изготовлен из ферромагнетика. В этом случае основными механизмами преобразования энергии в присутствии постоянного поля подмагничивания являются прямой и обратный магнитострикционные эффекты. При этом амплитуда разности электрических потенциалов на клеммах катушки – приемника переменного магнитного поля (позиция 3 на рис. 1, а) определяется по формуле (2), которую в данном модельном представлении необходимо записать в следующем виде

$$U_{\text{внх}}(\omega) = -i\omega \frac{\mu_0}{l(np)} \times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \rho \bar{\mathbf{M}}(r, \vartheta, z, \omega) \cdot \bar{\mathbf{H}}^{(np)}(\rho, \vartheta, z) dz d\vartheta d\rho, \quad (2)$$

где ρ, ϑ, z – координатные оси цилиндрической системы координат, связанной с осью симметрии катушки (рис. 1, б).

Вычисление разности электрических потенциалов $U_{\text{внх}}(\omega)$ осуществляется в два этапа. На первом этапе определяется динамическая намагниченность, т. е. решается граничная задача (1.10) – (1.14), [часть1] а на втором этапе определяются компоненты вектора $\bar{\mathbf{H}}^{(np)}(\rho, \vartheta, z)$.

Приступая к вычислению динамической намагниченности, будем полагать, что ферромагнитная пластина находится в однородном постоянном поле подмагничивания, вектор напряженности которого полностью определяется аксиальным компонентом H_z^0 . В этом случае компоненты вектора магнитной индукции $\bar{\mathbf{B}}$, которые входят в определение (1.3) [часть1] динамической намагниченности, а сами определяются соотношением (1.4) [часть1], необходимо записать в следующем виде

$$\begin{aligned} B_r &= B_r^V(\gamma, z) H_1^{(2)}(\gamma r) + \mu_1^\varepsilon H_r, \\ B_z &= B_z^V(\gamma, z) H_0^{(2)}(\gamma r) + \mu_3^\varepsilon H_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $B_r^V(\gamma, z)$ и $B_z^V(\gamma, z)$ – радиальный и аксиальный компоненты вектора магнитной индукции Виллари, которые определяют магнитную поляризацию ферромагнетика, обусловленную обратным магнитострикционным эффектом. Эти величины рассчитываются по следующим формулам

$$\begin{aligned} B_r^V(\gamma, z) &= \frac{m_1 - m_2}{2} H_z^0 \left[-\gamma U_z(\gamma, z) + U_{r,z}(\gamma, z) \right]; \\ B_z^V(\gamma, z) &= m_2 H_z^0 \left[\gamma U_r(\gamma, z) + \frac{m_1}{m_2} U_{z,z}(\gamma, z) \right]. \end{aligned}$$

Компоненты $\bar{\mathbf{h}}(r, z)$ вектора напряженности внутреннего магнитного поля обязаны удовлетворять уравнениям Максвелла, которые, в случае осевой симметрии и $h_\vartheta(r, z) = 0$, сводятся к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -h_{r,zz}(r, z) + h_{z,rz}(r, z) + i\omega \mu_1^\varepsilon r_2 h_r(r, z) = \\ = -i\omega r_2 B_r^V(\gamma, z) H_1^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} h_{r,z}(r, z) - \frac{1}{r} h_{z,r}(r, z) + h_{r,rz}(r, z) - h_{z,rr}(r, z) + \\ + i\omega \mu_3^\varepsilon r_2 h_z(r, z) = -i\omega r_2 B_z^V(\gamma, z) H_0^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (5)$$

где r_2 – удельная электрическая проводимость ферромагнетика в плоскости, перпендикулярной направлению вектора напряженности постоянного поля подмагничивания.

Очевидно, что решения системы уравнений (4), (5) целесообразно искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_r(r, z) &= h_r(\gamma, z) H_1^{(2)}(\gamma r), \\ h_z(r, z) &= h_z(\gamma, z) H_0^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка предполагаемых решений (6) в систему уравнений (4) и (5) обращает её в систему обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений следующего вида

$$-\frac{d^2 h_r(\gamma, z)}{dz^2} - \gamma \frac{dh_z(\gamma, z)}{dz} +$$

$$+ i\omega r_2 \mu_1^\varepsilon h_r(\gamma, z) = -i\omega r_2 B_r^V(\gamma, z),$$

$$\gamma \frac{dh_r(\gamma, z)}{dz} + \xi^2 h_z(\gamma, z) = -i\omega r_2 B_z^V(\gamma, z), \quad (8)$$

где $\xi^2 = \gamma^2 + i\omega r_2 \mu_3^\varepsilon$ – комплексное волновое число, которое учитывает факт существования вихревых токов в объеме динамически намагничиваемого металла. Нетрудно показать, что для частоты порядка 100 МГц выполняется сильное неравенство $|i\omega r_2 \mu_3^\varepsilon| \gg \gamma^2$. По этой причине в дальнейшем будем полагать, что $\xi = \sqrt{i\omega r_2 \mu_3^\varepsilon}$.

Из уравнения (8) определяется аксиальный компонент вектора напряженности внутреннего магнитного поля

$$h_z(\gamma, z) = -\frac{1}{\mu_3^\varepsilon} B_z^V(\gamma, z) - \frac{\gamma}{\xi^2} \frac{dh_r(\gamma, z)}{dz}. \quad (9)$$

Подстановка выражения (9) в уравнение (7) позволяет привести его к следующему виду

$$\frac{d^2 h_r(\gamma, z)}{dz^2} - \zeta^2 h_r(\gamma, z) = H_0(z), \quad (10)$$

где $\zeta^2 = i\omega r_2 \mu_1^\varepsilon$;

$$H_0(z) = \frac{1}{\mu_3^\varepsilon} \left[\gamma \frac{dB_z^V(\gamma, z)}{dz} + \xi^2 B_r^V(\gamma, z) \right].$$

Решение уравнения (10) осуществляется по стандартной схеме и выражения для расчета радиального и аксиального компонентов вектора напряженности внутреннего магнитного поля записываются следующим образом

$$h_r(r, z) = \left\{ \left[A - \frac{1}{\zeta} \int_{-h}^z H_0(\xi) sh \zeta \xi d\xi \right] ch \zeta z + \right. \quad (11)$$

$$\left. + \left[B + \frac{1}{\zeta} \int_{-h}^z H_0(\xi) ch \zeta \xi d\xi \right] sh \zeta z \right\} H_1^{(2)}(\gamma r),$$

$$h_z(r, z) = \left\{ -\frac{1}{\mu_3^\varepsilon} B_z^V(\gamma, z) - \frac{\gamma \mu_1^\varepsilon}{\zeta \mu_3^\varepsilon} \left[A - \frac{1}{\zeta} \int_{-h}^z H_0(\xi) sh \zeta \xi d\xi \right] sh \zeta z - \right. \quad (12)$$

$$\left. - \frac{\gamma \mu_1^\varepsilon}{\zeta \mu_3^\varepsilon} \left[B + \frac{1}{\zeta} \int_{-h}^z H_0(\xi) ch \zeta \xi d\xi \right] sh \zeta z \right\} H_0^{(2)}(\gamma r).$$

Константы A и B определяются из условий сопряжения внутреннего магнитного поля с электромагнитным полем рассеяния, которое излучается деформируемым ферромагнитным листом в окружающее пространство. Компоненты вектора напряженности магнитного поля рассеяния определяются из решения граничной задачи (1.13) – (1.14) [часть 1] и задаются следующими выражениями:

а) для области $h \leq z < \infty$:

$$\tilde{H}_r^{(+)}(r, z) = D e^{-\gamma z} H_1^{(2)}(\gamma r), \quad (13)$$

$$\tilde{H}_z^{(+)}(r, z) = D e^{-\gamma z} H_0^{(2)}(\gamma r);$$

б) для области $-\infty < z \leq -h$:

$$\tilde{H}_r^{(-)}(r, z) = C e^{\gamma z} H_1^{(2)}(\gamma r), \quad (14)$$

$$\tilde{H}_z^{(-)}(r, z) = -C e^{\gamma z} H_0^{(2)}(\gamma r);$$

где C и D – подлежащие определению константы.

На границах разделов сред $z = \pm h$ с различными магнитными свойствами должны выполняться следующие условия [2]:

$$\begin{aligned} h_r(r, h) - \tilde{H}_r^{(+)}(r, h) &= 0, \\ B_z(r, h) - \mu_0 \tilde{H}_z^{(+)}(r, h) &= 0, \\ h_r(r, -h) - \tilde{H}_r^{(-)}(r, -h) &= 0, \\ B_z(r, -h) - \mu_0 \tilde{H}_z^{(-)}(r, -h) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в граничные условия (15) определения компонентов вектора напряженности магнитных полей (11) – (14), получаем неодно-

родную систему линейных алгебраических уравнений, которая решается относительно искомых констант A , B , C и D единственным образом. Определитель этой системы уравнений записывается в следующем виде

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} ch \zeta h & sh \zeta h & 0 & -e^{-\gamma h} \\ sh \zeta h & ch \zeta h & 0 & q e^{-\gamma h} \\ ch \zeta h & -sh \zeta h & -e^{-\gamma h} & 0 \\ -sh \zeta h & ch \zeta h & -q e^{-\gamma h} & 0 \end{vmatrix} \approx \quad (16)$$

$$\approx q^2 e^{-2\gamma h} sh 2\zeta h$$

где $q = (\zeta \mu_0) / (\gamma \mu_1^\varepsilon)$; при записи соотношения (16) было учтено, что $|q| \gg 1$.

Алгебраические дополнения при константах A и B записываются следующим образом:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} Q_1 & sh \zeta h & 0 & -e^{-\gamma h} \\ Q_2 & ch \zeta h & 0 & q e^{-\gamma h} \\ 0 & -sh \zeta h & -e^{-\gamma h} & 0 \\ 0 & ch \zeta h & -q e^{-\gamma h} & 0 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\Delta(B) = \begin{vmatrix} ch \zeta h & Q_1 & 0 & -e^{-\gamma h} \\ sh \zeta h & Q_2 & 0 & q e^{-\gamma h} \\ ch \zeta h & 0 & -e^{-\gamma h} & 0 \\ -sh \zeta h & 0 & -q e^{-\gamma h} & 0 \end{vmatrix}.$$

где

$$Q_1 = \frac{1}{\zeta} \left[ch \zeta h \int_{-h}^h H_0(x) sh \zeta x dx - sh \zeta h \int_{-h}^h H_0(x) ch \zeta x dx \right],$$

$$Q_2 = \frac{1}{\zeta} \left[sh \zeta h \int_{-h}^h H_0(x) sh \zeta x dx - ch \zeta h \int_{-h}^h H_0(x) ch \zeta x dx \right].$$

Если принять во внимание, что $|q| \gg 1$, то величины $\Delta(A)$ и $\Delta(B)$ определяются следующим образом

$$\Delta(A) \approx Q_1 q^2 e^{-2\gamma h} sh \zeta h, \quad \Delta(B) \approx Q_1 q^2 e^{-2\gamma h} ch \zeta h, \quad \text{откуда следует, что}$$

$$A = \frac{Q_1}{2 ch \zeta h}, \quad B = \frac{Q_1}{2 sh \zeta h}. \quad (18)$$

Подставляя выражения (18) в соотношения (11) и (12), получаем следующие определения компонентов вектора напряженности внутреннего магнитного поля

$$\begin{aligned} h_r(\gamma, r) &= \frac{1}{\zeta} \left\{ \int_{-h}^z H_0(x) sh[\zeta(z-x)] dx - \right. \\ &\left. - \frac{sh[\zeta(h+z)]}{sh 2\zeta h} \int_{-h}^h H_0(x) sh[\zeta(h-x)] dx \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$h_z(\gamma, z) = -\frac{1}{\mu_3^\varepsilon} B_z^V(\gamma, z) - \frac{\gamma \mu_1^\varepsilon}{\zeta^2 \mu_3^\varepsilon} \times \left\{ \int_{-h}^z H_0(x) \operatorname{ch}[\zeta(z-x)] dx - \frac{\operatorname{ch}[\zeta(h+z)]}{\operatorname{sh} 2\zeta h} \int_{-h}^h H_0(x) \operatorname{ch}[\zeta(h-x)] dx \right\}, \quad (20)$$

Из расчетных формул (19), (20) следует, что компоненты $h_r(\gamma, z)$ и $h_z(\gamma, z)$ вектора напряженности внутреннего магнитного поля имеют конечные значения во всей области существования $-h \leq z \leq h$ волнового поля упругих смещений материальных частиц деформируемого ферромагнетика.

Таким образом, компоненты вектора динамической намагниченности $M_r(r, z)$ и $M_z(r, z)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_r(r, z) &= M_r(\gamma, z) H_1^{(2)}(\gamma r), \\ M_z(r, z) &= M_z(\gamma, z) H_0^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{где } M_r(\gamma, z) = \frac{1}{\mu_0} B_r^V(\gamma, z) + \left(\frac{\mu_1^\varepsilon}{\mu_0} - 1 \right) h_r(\gamma, z),$$

$$M_z(\gamma, z) = \frac{1}{\mu_0} B_z^V(\gamma, z) + \left(\frac{\mu_3^\varepsilon}{\mu_0} - 1 \right) h_z(\gamma, z), \quad \text{функции } h_r(\gamma, z) \text{ и } h_z(\gamma, z) \text{ определены соотношениями (19) и (20).}$$

Для выполнения вычислений, предусмотренных формулой (2), необходимо переопределить компоненты вектора $\vec{M}(r, z)$ в системе координат (ρ, ϑ, z) , которая связана с осью симметрии катушки (рис. 1, б).

Эту операцию можно выполнить за три шага следующим образом.

Шаг первый.

Выполняется переход от системы координат (r, ψ, z) к связанной с ней правовинтовой декартовой системе координат (x'_1, x'_2, x') (рис. 1, б) по формулам:

$$\begin{aligned} M'_1(x'_k) &= M_r(r, z) \cos \psi = \frac{x'_1 M_r(x'_k)}{\sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}}, \\ M'_2(x'_k) &= M_r(r, z) \sin \psi = \frac{x'_2 M_r(x'_k)}{\sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$M'_3(x'_k) = M_z(r, z) = M'_z(x'_k).$$

Шаг второй.

В формулах (22) выполняется переход к правовинтовой декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) (рис. 1, б), которая связана с осью

симметрии катушки. Переход осуществляется следующим образом:

$$M_k(x_m) = M'_k(x'_m), \quad k = 1, 2, 3, \quad (23)$$

где компоненты $M'_k(x'_m)$ заданы соотношениями (22). Аргументы x'_m этих функций заменяются на аргументы x_m по формулам: $x'_1 = x_1 + \alpha_1$, $x'_2 = x_2 + \alpha_2$ и $x'_3 = x_3$.

Шаг третий.

По известным компонентам $M_k(x_m)$ определяются компоненты $M_\rho(\rho, \vartheta, z)$, $M_\vartheta(\rho, \vartheta, z)$ и $M_z(\rho, \vartheta, z)$ в цилиндрической системе координат, ось Oz которой связана с осью симметрии катушки. Переход выполняется по стандартным формулам:

$$\begin{aligned} M_\rho(\rho, \vartheta, z) &= M_1(\rho, \vartheta, z) \cos \vartheta + M_2(\rho, \vartheta, z) \sin \vartheta, \\ M_\vartheta(\rho, \vartheta, z) &= -M_1(\rho, \vartheta, z) \sin \vartheta + M_2(\rho, \vartheta, z) \cos \vartheta, \\ M_z(\rho, \vartheta, z) &= M_3(\rho, \vartheta, z), \end{aligned} \quad (24)$$

где функции $M_k(\rho, \vartheta, z)$ ($k = 1, 2, 3$) заданы соотношениями (23) в которых аргументы $x_1 = \rho \cos \vartheta$, $x_2 = \rho \sin \vartheta$ и $x_3 = z$.

Выполнив необходимые вычисления, получаем для расчета величин $M_\rho(\rho, \vartheta, z)$ и $M_z(\rho, \vartheta, z)$ следующие формулы:

$$\begin{aligned} M_\rho(\rho, \vartheta, z) &= M_r(\gamma, z) \frac{(\rho - R_0 \cos \phi)}{\sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos \phi}} \times \\ &\times H_1^{(2)}\left(\gamma \sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos \phi}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$M_z(\rho, \vartheta, z) = M_z(\gamma, z) H_0^{(2)}\left(\gamma \sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos \phi}\right),$$

где $R = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$; ϕ - угол между отрезками R_0 и ρ (см. рис. 1, б).

Известно [1] разложение

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}\left(\gamma \sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos \phi}\right) &= J_0(\gamma \rho) H_0^{(2)}(\gamma R_0) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\gamma \rho) H_n^{(2)}(\gamma R_0) \cos n\phi. \end{aligned}$$

Так как $\phi = \vartheta - \vartheta'$ (см. рис. 1, б), то

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}\left(\gamma \sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos(\vartheta - \vartheta')}\right) d\vartheta = \\ &+ J_0(\gamma \rho) H_0^{(2)}(\gamma R_0) \int_0^{2\pi} d\vartheta + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\gamma \rho) H_n^{(2)}(\gamma R_0) \int_0^{2\pi} \cos[n(\vartheta - \vartheta')] d\vartheta \end{aligned}$$

Совершенно ясно, что последнее выражение должно быть записано в виде

$$\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}\left(\gamma\sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos(\vartheta - \vartheta')}\right) d\vartheta = 2\pi J_0(\gamma\rho)H_0^{(2)}(\gamma R_0). \quad (26)$$

Дифференцируя левую и правую части соотношения (26) по параметру ρ , получаем следующий результат:

$$\int_0^{2\pi} \frac{[\rho - R_0 \cos(\vartheta - \vartheta')] H_1^{(2)}\left(\gamma\sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos(\vartheta - \vartheta')}\right)}{\sqrt{\rho^2 + R_0^2 - 2\rho R_0 \cos(\vartheta - \vartheta')}} d\vartheta = 2\pi J_1(\gamma\rho)H_0^{(2)}(\gamma R_0). \quad (27)$$

Принимая во внимание интегралы (26) и (27), соотношение (2) для расчета $U_{\text{вых}}(\omega)$ можно записать в следующем виде:

$$U_{\text{вых}}(\omega) = -2\pi i \omega \frac{\mu_0}{j^{(np)}} H_0^{(2)}(\gamma R_0) \times \int_{-h}^h \left[M_r(\gamma, z) H_r^{(np)}(\gamma, z) + M_z(\gamma, z) H_z^{(np)}(\gamma, z) \right] dz, \quad (28)$$

где интегральные образы компонентов вектора напряженности магнитного поля электрического контура приемника переменного магнитного поля рассчитываются по формулам:

$$H_r^{(np)}(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho H_\rho^{(np)}(\rho, z) J_1(\gamma\rho) d\rho, \quad (29)$$

$$H_z^{(np)}(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho H_z^{(np)}(\rho, z) J_0(\gamma\rho) d\rho.$$

Вновь, как и при описании процесса регистрации плоской ультразвуковой волны, приходим к заключению, что для вычисления разности электрических потенциалов на электрическом выходе преобразователя электромагнитного типа, необходимо определять не компоненты вектора напряженности магнитного поля электрического контура приемника переменного магнитного поля, а их интегральные образы, которые задаются соотношениями (29). Выполнив те же вычисления, что и при расчете регистрации плоской волны, получаем

$$H_r^{(np)}(\gamma, z) = -\frac{NI^{(np)}}{2\gamma} W_K(b, R, \gamma) e^{\gamma(z-h)}, \quad (30)$$

$$H_z^{(np)}(\gamma, z) = \frac{NI^{(np)}}{2\gamma} W_K(b, R, \gamma) e^{\gamma(z-h)},$$

где

$$W_K(b, R, \gamma) = R(\gamma) \frac{1 - e^{-\gamma b}}{\gamma b} e^{-\gamma\delta};$$

$$R(\gamma) = \frac{\pi[\Omega(\gamma R_2) - \Omega(\gamma R_1)]}{2\gamma(R_2 - R_1)};$$

$$\Omega(\gamma R_j) = \gamma R_j \left[J_1(\gamma R_j) \mathbf{H}_0(\gamma R_j) - J_0(\gamma R_j) \mathbf{H}_1(\gamma R_j) \right],$$

($j = 1, 2$); $\mathbf{H}_\nu(\gamma R_j)$ - функции Струве.

Подставляя соотношения (30) в формулу (28) получаем

$$U_{\text{вых}}(\omega) = i\pi \frac{\omega}{\gamma} \mu_0 N W_K(b, R, \gamma) H_0^{(2)}(\gamma R_0) e^{-\gamma h} \times \int_{-h}^h \left[M_r(\gamma, z) - M_z(\gamma, z) \right] e^{\gamma z} dz. \quad (31)$$

Интеграл в формуле (31) зависит от кинематических характеристик волн Лэмба и от физико-механических параметров ферромагнетика. В результате его вычисления формируется частотно-зависимая функция, которую можно назвать частотной характеристикой магнитоотрицательного механизма электромагнитного способа регистрации ультразвуковых волн в металлах.

Модельный пример – регистрация радиально распространяющихся волн Рэлея

Рассмотрим упругое изотропное полупространство ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \psi \leq 2\pi, -\infty < z' \leq 0$) (рис. 2), в котором существуют гармонически изменяющиеся во времени по закону $e^{i\omega t}$ поверхностные волны Рэлея. В случае осевой симметрии, когда отсутствует зависимость характеристик и параметров волнового поля от полярного угла ψ цилиндрической системы координат (r, ψ, z') (рис. 2), радиально распространяющаяся из точки O' как из центра волна Рэлея создает смещения материальных частиц упругого полупространства, которые можно описать с помощью вектора $\bar{u}(r, z', t) = \bar{u}(r, z') e^{i\omega t}$. Пространственно развитая амплитуда $\bar{u}(r, z')$ гармонически изменяющегося во времени волнового поля смещений материальных частиц упругого полупространства полностью определяется радиальным $u_r(r, z')$ и аксиальным $u_z(r, z')$ компонентами, выражения для расчета которых имеют следующий вид

$$\begin{aligned} u_r(r, z') &= R u_r(z') H_1^{(2)}(\gamma r), \\ u_z(r, z') &= R u_z(z') H_0^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (32)$$

где R – зависящий от частоты амплитудный множитель рэлеевской волны с размерностью метр в квадрате, величина которого известна по смыслу постановки задачи; $u_r(z')$ и $u_z(z')$ – частотно зависимые функции координаты z' с размерностью единица деленная на метр; $H_\nu^{(2)}(\gamma r)$ ($\nu = 0, 1$) – функции Ханкеля второго рода порядка ν ; $\gamma = \omega/v_R$ – волновое число поверхностной волны; v_R – скорость распространения волны Рэлея в радиальном направлении. Функции $u_r(z')$ и $u_z(z')$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r(z') &= -\gamma \left(e^{\alpha z'} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2 + \beta^2} e^{\beta z'} \right), \\ u_z(z') &= \alpha \left(e^{\alpha z'} - \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + \beta^2} e^{\beta z'} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где α и β – отстающие по фазе на угол $\pi/2$ проекции волновых векторов \vec{k}_ℓ и \vec{k}_s невзаимодействующих продольной и сдвиговой волн на координатную ось Oz' . При этом $k_\ell^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ и $k_s^2 = \gamma^2 - \beta^2$; квадраты модулей волновых векторов рассчитываются по формулам: $k_\ell^2 = \omega^2 \rho_0 / (\lambda + 2G)$ и $k_s^2 = \omega^2 \rho_0 / G$; ρ_0 , λ и G – плотность и модули упругости материала, который заполняет полупространство. Волновые числа α , β и γ определяются условием существования волны Рэлея, т. е. соотношением следующего вида

$$(\gamma^2 + \beta^2)^2 - 4\gamma^2\alpha\beta = 0, \quad (34)$$

которое довольно часто и, надо сказать, неудачно, называют дисперсионным уравнением Рэлея. Из соотношения (34) легко определяются безразмерные волновые числа $\hat{\gamma} = \gamma/k_s$, $\hat{\alpha} = \alpha/k_s$ и $\hat{\beta} = \beta/k_s$, и, естественно, безразмерная скорость распространения волны Рэлея $\hat{v}_R = v_R/v_s$, где $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ – скорость волн сдвига.

В таблице 1 приведены значения безразмерных волновых чисел $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ и безразмерной (относительной) скорости \hat{v}_R для различных значений коэффициента Пуассона ν упругого материала, который заполняет полупро-

странство $z' < 0$. Из приведенных данных следует, что скорость распространения рэлеевской волны для материалов с наиболее распространенными значениями коэффициентов Пуассона, которые находятся в пределах чисел $0,2 \leq \nu \leq 0,4$, весьма незначительно отличается от скорости распространения волны сдвига. По этой причине при постановке и выполнении реальных экспериментов необходимо осуществлять очень точные измерения для того, чтобы отличить эти два типа волн друг от друга.

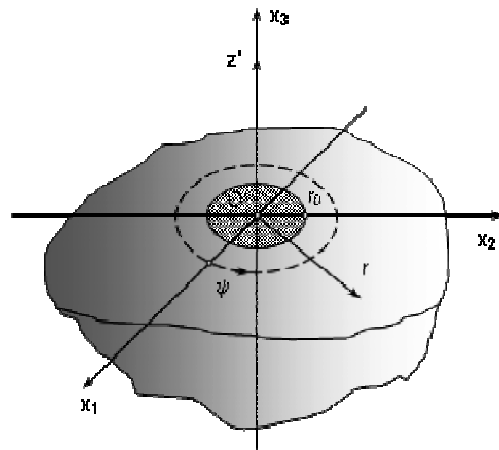


Рис. 2. К определению компонентов вектора смещения материальных частиц упругого полупространства

Если предположить, что полупространство $z' \leq 0$ заполнено аксиально намагниченным ферромагнетиком (поле подмагничивания ориентировано вдоль оси Oz' и полностью определяется аксиальным компонентом H_z^0) и при этом напряженность поля подмагничивания H_z^0 не зависит от значений координат точки наблюдения, то заданные соотношениями (32) и (33) смещения материальных частиц деформируемого ферромагнетика образуют осесимметричный вектор $\vec{B}^V(r, z')$ магнитной индукции Виллари, компоненты которого $B_r^V(r, z')$ и $B_z^V(r, z')$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_r^V(r, z') &= B_r^V(z') H_1^{(2)}(\gamma r), \\ B_z^V(r, z') &= B_z^V(z') H_0^{(2)}(\gamma r), \end{aligned} \quad (35)$$

где $B_r^V(z') = -R(m_1 - m_2) H_z^0 \gamma \alpha (e^{\alpha z'} - e^{\beta z'})$,

$$B_z^V(z') = R m_1 H_z^0 (\alpha^2 - \gamma^2 m_2 / m_1) e^{\alpha z'}.$$

Таблица 1. Безразмерные волновые числа и скорости поверхностных волн Рэлея для различных значений коэффициента Пуассона

ν	α/k_s	β/k_s	γ/k_s	V_R/V_s
0,00	0,899454	0,555893	1,144123	0,874032
0,02	0,898689	0,545378	1,139051	0,877924
0,04	0,898302	0,534895	1,134069	0,881781
0,06	0,898311	0,524450	1,129180	0,885599
0,08	0,898732	0,514044	1,124385	0,889375
0,10	0,899587	0,503688	1,119688	0,893106
0,12	0,900891	0,493380	1,115089	0,896790
0,14	0,902665	0,483123	1,110589	0,900423
0,16	0,904929	0,472925	1,106191	0,904003
0,18	0,907704	0,462785	1,101894	0,907528
0,20	0,911013	0,452709	1,097700	0,910996
0,22	0,914879	0,442696	1,093608	0,914404
0,24	0,919329	0,432749	1,089620	0,917752
0,26	0,924386	0,422869	1,085734	0,921036
0,28	0,930086	0,413057	1,081950	0,924257
0,30	0,936456	0,403316	1,078269	0,927413
0,32	0,943530	0,393642	1,074688	0,930503
0,34	0,951347	0,384037	1,071207	0,933526
0,36	0,959948	0,374500	1,067825	0,936483
0,38	0,969380	0,365028	1,064540	0,939373
0,40	0,979693	0,355621	1,061351	0,942195
0,42	0,990946	0,346274	1,058256	0,944951
0,44	1,003203	0,336985	1,055253	0,947640
0,46	1,016536	0,327749	1,052340	0,950263
0,48	1,031030	0,318565	1,049516	0,952820
0,50	1,046778	0,309426	1,046778	0,955313

При таком определении компонентов вектора магнитной индукции Виллари правая часть уравнения (10) будет описываться следующим выражением

$$H_0(z') = \frac{RH_z^0}{\mu_3^\varepsilon} \left[m_1 \left(\alpha^2 - \gamma^2 \frac{m_2}{m_1} \right) \gamma \alpha e^{\alpha z'} - \right. \quad (36)$$

$$\left. - \xi^2 (m_1 - m_2) \gamma \alpha (e^{\alpha z'} - e^{\beta z'}) \approx -H_0 (e^{\alpha z'} - e^{\beta z'}) \right],$$

где $H_0 = \xi^2 RH_z^0 (m_1 - m_2) \gamma \alpha / \mu_3^\varepsilon$.

Для того, чтобы воспользоваться общими выражениями (19) и (20) для расчета аксиальной составляющей компонентов вектора напряженности внутреннего магнитного поля, соотношения (36) необходимо переписать в цилиндрической системе координат, начало оси Oz которой помещено в серединную плоскость пластины из ферромагнетика толщиной $2h$. Эта толщина для рассматриваемого диапазона частот более чем на порядок превосходит длину волны Рэлея. Такая пластина как волновод для поверхностных волн Рэлея практически эквивалентна упругому полупространству. Выражение

для расчета величины $H_0(z)$ имеет следующий вид

$$H_0(z) = -H_0 (e^{-\alpha h} e^{\alpha z} - e^{-\beta h} e^{\beta z}). \quad (37)$$

Подставляя выражение (37) в формулы (19) и (20), получаем следующие результаты:

$$h_r(\gamma, z) = \frac{H_0}{\zeta^2} \left[e^{\alpha(z-h)} - e^{\beta(z-h)} - \right. \quad (38)$$

$$\left. - (e^{-2\alpha h} - e^{-2\beta h}) \frac{sh \zeta (h-z)}{sh 2\zeta h} \right],$$

$$h_z(\gamma, z) = -\frac{1}{\mu_3^\varepsilon} B_z^V(\gamma, z') + \quad (39)$$

$$+ \frac{\gamma \mu_1^\varepsilon}{\zeta^3 \mu_3^\varepsilon} H_0 (e^{-2\alpha h} - e^{-2\beta h}) e^{-\zeta(h+z)},$$

где $z = z' + h$ – аксиальная координата, связанная с серединной плоскостью толстой ферромагнитной пластины. При записи выражений (38) и (39) было учтено, что $|\zeta| \gg (\alpha, \beta)$.

Переходя в соотношениях (38) и (39) к системе координат, связанной с поверхностью тол-

стой пластины, т. е. к координате z' , получаем следующие результаты

$$h_r(\gamma, z') = \frac{H_0}{\zeta^2} \left[e^{\alpha z'} - e^{\beta z'} + (e^{-2\alpha h} - e^{-2\beta h}) \frac{sh \zeta z'}{sh 2\zeta h} \right], \quad (40)$$

$$h_z(\gamma, z') = -\frac{1}{\mu_3^\varepsilon} B_z^V(\gamma, z') + \frac{\gamma \mu_1^\varepsilon}{\zeta^3 \mu_3^\varepsilon} H_0 (e^{-2\alpha h} - e^{-2\beta h}) e^{-\zeta(2h+z')}. \quad (41)$$

Устремляя в соотношениях (40) и (41) толщину пластины h к бесконечности, т. е. формально переходя к полупространству $z' \leq 0$, получаем следующие выражения для расчета аксиальных составляющих компонентов вектора напряженности внутреннего магнитного поля:

$$h_r(\gamma, z') = \frac{H_0}{\zeta^2} (e^{\alpha z'} - e^{\beta z'}), \quad (42)$$

$$h_z(\gamma, z') = -\frac{1}{\mu_3^\varepsilon} B_z^V(\gamma, z').$$

Аксиальные составляющие амплитудных значений компонентов вектора динамической намагниченности, т. е. величины $M_r(\gamma, z')$ и $M_z(\gamma, z')$ (см. выражения (21)) определяются следующим образом

$$M_r(\gamma, z') = -\frac{R}{\mu_1^\varepsilon} \gamma \alpha (m_1 - m_2) H_z^0 (e^{\alpha z'} - e^{\beta z'}), \quad (43)$$

$$M_z(\gamma, z') = \frac{R}{\mu_3^\varepsilon} m_1 H_z^0 \left(\alpha^2 - \gamma^2 \frac{m_2}{m_1} \right) e^{\alpha z'}.$$

Из выражений (43) отчетливо видно, что динамическая намагниченность, определенная с учетом существования внутреннего магнитного поля, обратно пропорциональна значениям магнитной проницаемости намагниченного ферромагнетика, т. е. в десятки раз меньше намагниченности, которая определяется магнитной индукцией Виллари.

При переходе к аксиальной координате z' , значения которой отсчитываются от поверхности полупространства, выражение (31) принимает следующий вид

$$U_{вых}(\omega) = -i\pi v_R N W_K(b, R, \gamma) H_0^{(2)}(\gamma R_0) \times \int_{-\infty}^0 [M_r(\gamma, z') + M_z(\gamma, z')] e^{\gamma z'} dz'. \quad (44)$$

Подставляя выражения (43) в интеграл (44), получаем окончательный результат вычислений, который можно записать следующим образом

$$U_{вых}(\omega) = U_0 W_K(b, R, \gamma) H_0^{(2)}(\gamma R_0) e^{-i\pi/2}, \quad (45)$$

где U_0 – абсолютная чувствительность преобразователя электромагнитного типа в режиме приема радиально распространяющихся поверхностных волн в ферромагнитном упругом полупространстве. Абсолютная чувствительность определяется следующим выражением

$$U_0 = \pi v_R N K_M H_z^0 R^*, \quad (46)$$

где K_M – множитель, величина которого определяется числовыми значениями материальных констант и рассчитывается по формуле

$$K_M = \frac{\mu_0}{\mu_1^\varepsilon} (m_1 - m_2) \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{(\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)} + \frac{\mu_0}{\mu_3^\varepsilon} m_1 \frac{(\alpha^2 - \gamma^2 m_2/m_1)}{\gamma(\gamma + \alpha)}. \quad (47)$$

Для оценки величины параметра K_M можно пользоваться следующими значениями магнострикционных констант: $m_1 \cong 0,2 \text{ Гн/м}$ и $m_2 \approx -m_1/2 = 0,1 \text{ Гн/м}$. Полагая $\mu_1^\varepsilon \approx \mu_3^\varepsilon = 30\mu_0$, для ферромагнетика с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ получаем $K_M = 0,028$.

Символом $R^* = R/\gamma$ в формуле (46) обозначен амплитудный множитель волны Рэлея с размерностью метры. Строго говоря, амплитудный множитель R^* является достаточно сложной функцией, которая определяется в результате решения задачи о возбуждении поверхностных волн Рэлея тем или иным набором поверхностных (или) объемных нагрузок [3 – 6]. Если поверхностные волны Рэлея возбуждаются нормальными силами, которые равномерно распределены в круге радиуса r_0 (рис. 2) с поверхностной плотностью σ_0 , то амплитудный множитель R^* определяется следующим выражением

$$R^* = \pi \frac{\sigma_0 r_0}{2G} f(\nu) J_1(\gamma r_0) e^{-i\pi/2}, \quad (48)$$

где

$$f(\nu) = -\frac{(2\hat{\gamma}^2 - 1)\hat{\alpha}\hat{\beta}}{4\hat{\alpha}\hat{\beta}(2\hat{\gamma}^2 - 1) - 4\hat{\alpha}^2\hat{\beta}^2 - 2\hat{\gamma}^2(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2)} -$$

константа, числовое значение которой определяется величиной коэффициента Пуассона; для коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$ константа $f(\nu) = 0,507774$; $J_1(\gamma r_0)$ – функция Бесселя первого порядка – она определяет влияние размеров площадки нагружения на эффективность возбуждения волн Рэлея на различных частотах. Принимая $G = 70 \text{ ГПа}$ и

$r_0 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м при плотности внешних сил $\sigma_0 = 100$ кПа (эти значения обеспечиваются пьезоэлектрическими излучателями ультразвуковых волн) на безразмерной частоте $\gamma r_0 = 1,84$, где функция Бесселя первого порядка принимает максимальное значение 0,582 получаем значение $R^* = 1,658 \cdot 10^{-9}$ м.

Таким образом, амплитудный множитель R^* имеет порядок единиц нанометров.

Полагая, что $v_R = 3500$ м/с, $N = 100$ витков, $I^{(пр)} = 1$ А, $H_z^0 = 1$ кА/м и $R^* = 2 \cdot 10^{-9}$ м, для определенного ранее параметра $K_M = 0,028$ получаем следующую оценку абсолютной чувствительности $U_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ В. Так как передаточная характеристика $W_K(b, R, \gamma) < 1$, то разность потенциалов $U_{вых}(\omega)$ на циклической частоте $f = 410$ кГц (на этой частоте $\gamma r_0 = 1,84$) минимум в три раза меньше абсолютной чувствительности U_0 .

Выводы

Рассмотрена модельная ситуация при математическом описании процесса регистрации ультразвуковых волн, которые возбуждаются единичным источником в системах выборочного ультразвукового контроля.

Используя интегральные образы вектора напряженности поля электрического контура приемника переменного магнитного поля, найдена частотная характеристика магнитострикционного механизма электромагнитного способа регистрации ультразвуковых волн в металлах.

Получена оценка абсолютной чувствительности преобразователя электромагнитного типа в режиме приема поверхностных волн Рэлея.

Совокупность полученных результатов позволяет конструировать приемники ультразвуковых волн электромагнитного типа, которые гарантировано эффективно работают в заданном диапазоне частот.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. – М. – Л.: Изд-во АН СССР. – 1948. – 727 с.
3. Гринченко В. Т., Петрищев О. Н. Изучение закономерностей процесса возбуждения упругих волн при сложном нагружении участка изотропной упругой полосы // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1987. – Т. 40. - № 6. – С. 22 -31.
4. Петрищев О. Н. Возбуждение волн Рэлея в металлической полосе поляризованной постоянным магнитным полем // Акустичний вісник. – 2005. – Т. 8. - № 1-2. – С. 85 – 95.
5. Петрищев О. Н. Возбуждение электромагнитным полем волн Рэлея в ферромагнитных металлах // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2005. - № 4. – С. 23 – 30.
6. Петрищев О. Н., Шпинь А. П. Ультразвуковые магнитострикционные волноводные системы – Киев: Изд-во при Киевском гос. университете им. Т. Г. Шевченко, 1989. – 132 с.
7. Сучков Г.М., Романюк М.И., Петрищев О.Н., Хащина С.В. Математическое моделирование процесса регистрации ультразвуковых волн в стальном металлопрокате преобразователем электромагнитного типа. Часть 1. //Электроника и связь. – 2012. - №6(71). – С. 94-107.

УДК 534.232.082.744

Математичне моделювання процесу реєстрації ультразвукових хвиль в сталевому металопрокаті перетворювачем електромагнітного типу. Частина 2.

О.М. Петрищев², д-р техн. наук, М.І. Романюк², Г.М. Сучков¹, д-р техн. наук, С.В. Хащина¹

¹ Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»,
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна.

² Національний Технічний Університет України «Київський Політехнічний Інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

На основі запропонованого підходу [частина 1] до побудови математичних моделей електромагнітних ультразвукових перетворювачів у режимі прийому пружних коливань, отримані вирази для розрахунку перетворювачів електромагнітного типу на прикладі реєстрації ультразвукових хвиль, що радіально поширюються у феромагнітних пластинах. Розглянуто модельну ситуацію випадку реєстрації поверхневих хвиль Релея, що радіально поширюються. Дана оцінка швидкостей поширення релеївської хвилі і хвиль зсуву для матеріалів з найбільш поширеними значеннями коефіцієнтів Пуассона. Бібл. 7, рис. 2., табл. 1.

Ключові слова: електромагнітно-акустичний перетворювач (ЕМАП), режим реєстрації, математична модель, хвилі Релея.

UDC 534.232.082.744

Mathematical modeling of the registration process of ultrasonic waves in steel metal rolling by electromagnetic-type transducer. Part 2

O.N. Petryshev², Dr.Sc., M.I. Romanyuk², G.M. Suchkov¹ Dr.Sc., S.V. Haschyna¹

¹ National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",
st. Frunze, 21, Kharkov, 61002, Ukraine.

² National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
st. Polytechnique, 16, Kiev, 03056, Ukraine.

Based on the proposed approach [part 1] to mathematical modeling of electromagnetic ultrasonic transducer in the reception mode of elastic waves, the expressions for the calculation of electromagnetic type converters by example of registration of radially propagation ultrasonic waves in ferromagnetic plates is obtained.

The model situation of registration case of radially propagation Rayleigh waves is considered. The estimation of the velocity of the Rayleigh wave and shear waves propagation for materials with the most common values of Poisson's ratio is given. Reference 7, figures 2, tables 1.

Keywords: electromagnetic acoustic transducer (EMAT), the registration mode, mathematical model, Rayleigh waves.

References

1. *Beytmen G., Erdelyi A.* (1974), [Higher transcendental functions. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka, P.296. (Rus)
2. *Greenberg G. A.* (1948), [Selected problems of mathematical theory of electric and magnetic phenomena.] M. L.: Ed. AS. USSR. P. 727 p. (Rus)

3. *Grinchenko V. T., Petrishchev O. N.* (1987), [Study of the patterns of excitation of elastic waves under complex loading of area isotropic elastic bands]. Tidings of the A.S. Arm. SSR. Mechanics. – 1987. Vol. 40. no 6. pp. 22-31. (Rus)
4. *Petrishchev O. N.* (2005), [Excitation of Rayleigh waves in the metal strip polarized permanent magnetic field]. Acoust. herald. Vol. 8. no 1 – 2. pp. 85 – 95. (Rus)
5. *Petrishchev O. N.* (2005), [Excitation of the electromagnetic field of the Rayleigh waves in ferromagnetic metals]. Technical diagnostics and nondestructive testing. no 4. pp. 23 – 30. (Rus)
6. *Petrishchev O. N., Shpyn A. P.* (1989), [Ultrasonic magnetostrictive waveguide system] Kiev: Ed. of the Kyiv State. Shevchenko University. P.132. (Rus)
7. *Suchkov G.M., Romanyuk M.I., Petryshev O.N., Haschyna S V.* (2012), [Mathematical modeling of the registration process of ultrasonic waves in steel metal rolling by electromagnetic-type transducer. Part 1.]. Electronics and Communications. no 6(71). pp. 94 – 107. (Rus).

Поступила в редакцию 20 января 2013 г.