

УДК 534.3

## Врахування типу електродування сферичного електропружного перетворювача в наскрізних задачах прийому звуку багатомодовими системами

О.В. Коржик, д-р техн. наук

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",  
пр. Перемоги, 37, Київ-56, 03056, Україна.

На основі електропружної моделі гідроакустичного прийомного сферичного п'єзокерамічного перетворювача у вигляді тонкої п'єзокерамічної оболонки, показано особливості модового складу основних фізичних полів перетворювача при використанні типових видів електродування його активної поверхні.

**Ключові слова:** *гідроелектропружність, сферична оболонка, гідроакустичний п'єзокерамічний перетворювач, наскрізна задача, прийом та випромінювання звукових хвиль, електродування.*

### Вступ

Зростання в останній час інтересу до застосування в підводній акустиці перетворювачів сферичного типу пов'язано насамперед з розвитком теоретичної бази фізико-математичного моделювання в частині наскрізних постановок задач прийому та випромінювання звуку. При цьому "наскрізний підхід" до розв'язання задач прийому та випромінювання звуку дозволяє дослідити особливості багатомодовості складових електричних, механічних і акустичних полів таких складних коливальних систем як електропружна сфера та циліндр [3,6,9]. Багатомодовість зазначеної сферичної коливальної системи, очевидно, містить в собі багато цікавих ефектів, які пов'язані як з просторовими так і з енергетичними аспектами роботи гідроакустичних перетворювачів з врахуванням зв'язаності вказаних основних фізичних полів.

Відмітимо, що досі для сфери розглянуто ситуацію роботи переважно на нульовій моді та визначено особливості формування акустичних, механічних та електричних полів в умовах повного електродування [3,9,12]. Безперечно, слід відмітити класичні приклади врахування та описання роботи малих джерел на поверхні сфери [5,6]. Проте, в задачах стаціонарної гідроелектропружності умови і наслідки застосування електродів певного кутового розкриття розглянуто лише для циліндричних електропружних оболо-

нок (наприклад, роботи [8,10,11]). Доречно згадати також цікавий підхід, наведений в роботі [13], який застосовує відмінні від традиційних способи утворення та електродування сферичної коливальної системи такого типу, а саме, - виконання сфери з двох однаково електродованих половинок, які поляризовані зустрічно.

Отже, питання реалізації багатомодових властивостей сферичних коливальних систем представляється важливою і актуальною науково-технічною проблемою, а способи утворення, або використання існуючої багатомодовості в сферичних п'єзокерамічних перетворювачах представляють собою достатньо цікавий, змістовний і об'ємний напрямок досліджень.

Таким чином, метою цієї роботи є визначення умов створення, або використання багатомодовості прийомної електропружної коливальної системи, яка представлена у вигляді тонкої сферичної оболонки, що працює в рідині та має електродування певного типу

### Постановка і розв'язок задачі

З традиційних методик розрахунку циліндричних п'єзоперетворювачів (наприклад, монографія [2]) відомо, що форма та спосіб включення електродів визначатимуть модовий склад його основних фізичних полів.

Так при збудженні циліндричного п'єзоперетворювача зовнішнім тональним сигналом від генератора (випромінювання) вид та спосіб включення електроду визначатиме модову структуру механічних та, відповідно, акустичних полів, а при прийомі звуку (збудженні перетворювача акустичною хвилею) вид та спосіб включення електроду визначатимуть модовий склад електричного поля. Зазначимо також, що при прийомі звуку незалежно від електродування акустичні та механічні поля характеризуватимуться повними наборами модових складових.

На сьогодні описання таких ефектів для сферичних п'єзоперетворювачів в науково-

технічних літературних джерелах ще не знайшло відповідного місця.

Для з'ясування модової структури вказаних полів в прийомних сферичних перетворювачах, очевидно, треба визначити вид та властивості деякої функції (функції включення електроду). Такою функцією має бути кутова функція  $f(\varphi, \vartheta)$  одиничної ваги, що використовується сумісно з шуканим параметром (наприклад електричним струмом або електричною напругою для кіл навантаження електродів перетворювача).

Нехай (залучаючи результати та постановки, скажімо, робіт [6,9]) розглядається задача прийому звука тонкостінним сферичним перетворювачем, яка належить до класу задач стаціонарної гідроелектропружності.

Передбачається, що в ідеальній рідині з густиною  $\rho$  і швидкістю звуку  $c$  розташовано коливальну систему, що подається у вигляді поодинокого

п'єзокерамічного сферичного перетворювача (рис. 1), який представлено сферичною електропружною радіально поляризованою оболонкою довільного радіусу  $R_0$  з товщиною стінки  $h$ . П'єзоматеріал оболонки має густину  $\rho_M$ , та швидкість звуку  $c_M$ .

Внутрішній простір перетворювача – вакуумовано. На зовнішню і внутрішню поверхні перетворювача нанесено пари суцільних електродів, які повністю або частково покривають поверхні перетворювача та підключені (клеми "1-2") до довільного електричного навантаження  $Z_n$ .

Товщини електродів вважаємо малими. Кутове розташування електродів та їх конфігурація задається кутами  $\Delta\varphi_0 \rightarrow (\varphi_{01}, \varphi_{02})$  та  $\Delta\vartheta_0 \rightarrow (\vartheta_{01}, \vartheta_{02})$  (рис. 2).

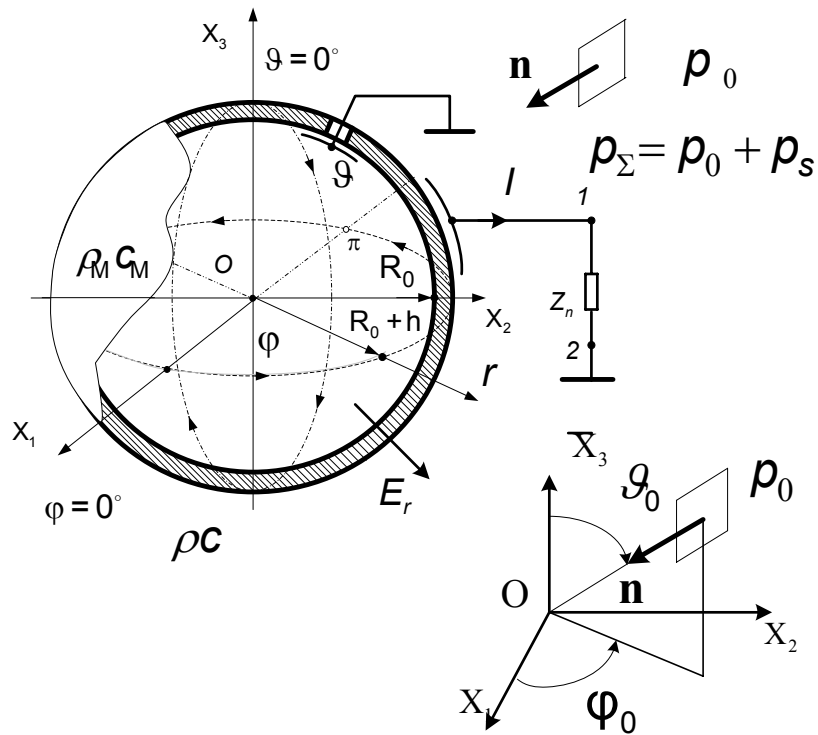


Рис. 1. Сферичний тонкостінний п'єзокерамічний перетворювач (прийом - випромінювання)

Електричний заряд, який формується на електродованій частині поверхні оболонки вільними носіями струму, виникатиме при деформації оболонки під впливом акустичного збудження у вигляді плоскої хвилі одиничної амплітуди, що надходить з безкінечності  $p^0$  (рис. 1). Зауважимо, що при цьому утворюється складне

поле у вигляді суперпозиції поля падаючої хвилі та розсіяного поля  $p_s$

$$p_{\Sigma} = p_0 + p_s.$$

Далі, враховуючи результати робіт [5,6,9,13] для режиму прийому, зазначимо, що електричний стан сфери відповідатиме ситуації виникнення поляризаційних зарядів при її об'ємній деформації і, власне, визначатиметься багатокомпонентним вектором електричної індукції  $D$

( $D_r, D_\varphi, D_\vartheta$ ). Застосування однієї з компоненти вектора  $D$  визначється моделлю перетворювача та видом електродування. Модель нашого перетворювача вже визначена як тонкостінна сферична оболонка, а термін "вид електродування" характеризуватиме електрод як утворення певної геометричної форми і розміру (дивись, наприклад, рис. 2. рис.3).

Спираючись на положення монографій [5,13] в частині обрання граничних умов на електродованих і не електродованих ділянках поверхні п'єзокерамічного елемента, вважатимемо, що електричні граничні умови представитимуть:

Умови на поверхнях

$$\begin{aligned} \Psi(t) - U_e(t) &= 0 \quad \forall x_j \in S_e, \\ n_j D_j(x_j t) &= 0 \quad \forall x_j \notin S_e, \end{aligned} \quad (1)$$

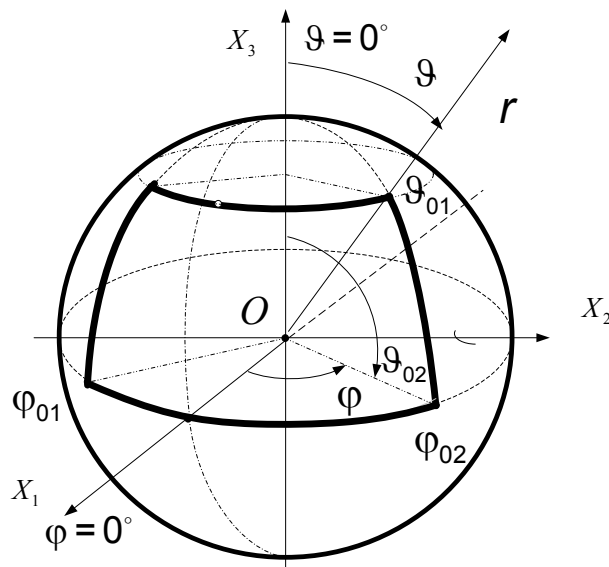
де  $\Psi(t), U_e(t)$  електричні потенціали кераміки та навантаження;  $S_e$  - площа електроду;  $x_j$  - координати (в нашому випадку  $j = r, \varphi, \vartheta$ );

Закон Ома для ділянки кола

$$I_n = U_n / Z_n, \quad \forall x_j \in S_e; \quad (2)$$

Умова по напруженості

$$U_n = - \int_{-h/2}^{h/2} E_r dh, \quad \forall x_j \in S_e. \quad (3)$$



$\varphi_{01}, \varphi_{02}$  - границі електроду по меридіану  $\vartheta_{01}, \vartheta_{02}$  - границі електроду по широті

Рис. 2. Розташування електродів (вихідна ситуація)

$E_r$  - компонента вектора напруженості електричного поля в п'єзокераміці.

Оскільки на поверхні деформівної сферичної оболонки знаходяться металізовані ділянки - електроди з площинами  $S_e$ , то для цих ділянок (тобто, в межах розкривів електродів) має виконуватися умова

$$D_\varphi = D_\vartheta = 0. \quad (4)$$

Для неелектродованих ділянок поверхні оболонки цього може і не бути, бо жорсткість її неелектродованих і електродованих частин - різна [5,13].

До того ж, завдяки умові тонкостінності - фізичний стан оболонки не змінюється за товщиною в межах електродованих ділянок. Отже для вказаної моделі мають виконувати-

ся умови (3), (4) та розглядається лише радіальна компонента електричної індукції  $D_r$ .

З врахуванням вказаних міркувань для ділянки під електродом вираз для компоненти  $D_r$  запишеться як

$$D_r = e_{12}^* (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \chi_{11}^* E_r + \frac{e_{12}}{c_{12}^E} p_\Sigma, \quad (5)$$

де  $e_{12}^* = e_{12} - e_{11} c_{12}^E / c_{11}^E$  - п'єзоелектричний модуль, який відповідає існуючому напружено-деформівному стану оболонки;

$$\chi_{11}^* = \chi_{11}^E - e_{11} e_{12} / c_{11}^E;$$

$\varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{\vartheta\vartheta}$  - компоненти тензору деформацій;

$e_{11}, e_{12}$  - п'єзомодулі;

$c_{11}^E; c_{12}^E$  - компоненти тензора модулей пружності (радіальна вісь сфери співпадає з віссю  $Ox_1$ );

$\rho_\Sigma$  - зовнішнє акустичне навантаження перетворювача-оболонки.

Вираз (5) і визначає той параметр електричного поля, розкладення якого у відповідності до виду функції включення  $f(\varphi, \vartheta)$  електроду обраної конфігурації, характеризуватиме модовий склад на електричному боці перетворювача.

Для режиму прийому визначенню підлягатиме модова структура зовнішнього акустичного поля, деформацій, нормальних складових швидкостей руху точок поверхні оболонки, деформацій, а також струму в колі навантаження електродів.

Формально, застосовуючи розкладення по сферичним функціям для акустичного тиску,

напруженості, електричної індукції або деформацій – можна представити вказані характеристики складових полів у вигляді суми центрально симетричної сферичної гармоніки та сукупності тесеральних гармонік нижчих та вищих порядків, набір яких, власне, і визначатиме модову структуру складових відповідних полів.

При цьому таке представлення для кожного бажаного типу електродування (наприклад, рис. 3) і визначатиме характер функції включення та відповідний модовий склад шуканого поля.

Таким чином на прикладі режиму прийому зазначимо, що для електродування кожного вказаного типу необхідно визначити електричний струм для відповідного кола (рис.1), задовольняючи умовам (1)-(4), застосовуючи вираз (5) та вирази для зовнішнього навантаження  $\rho_\Sigma = \rho_\Sigma(r, \varphi, \vartheta)$ .

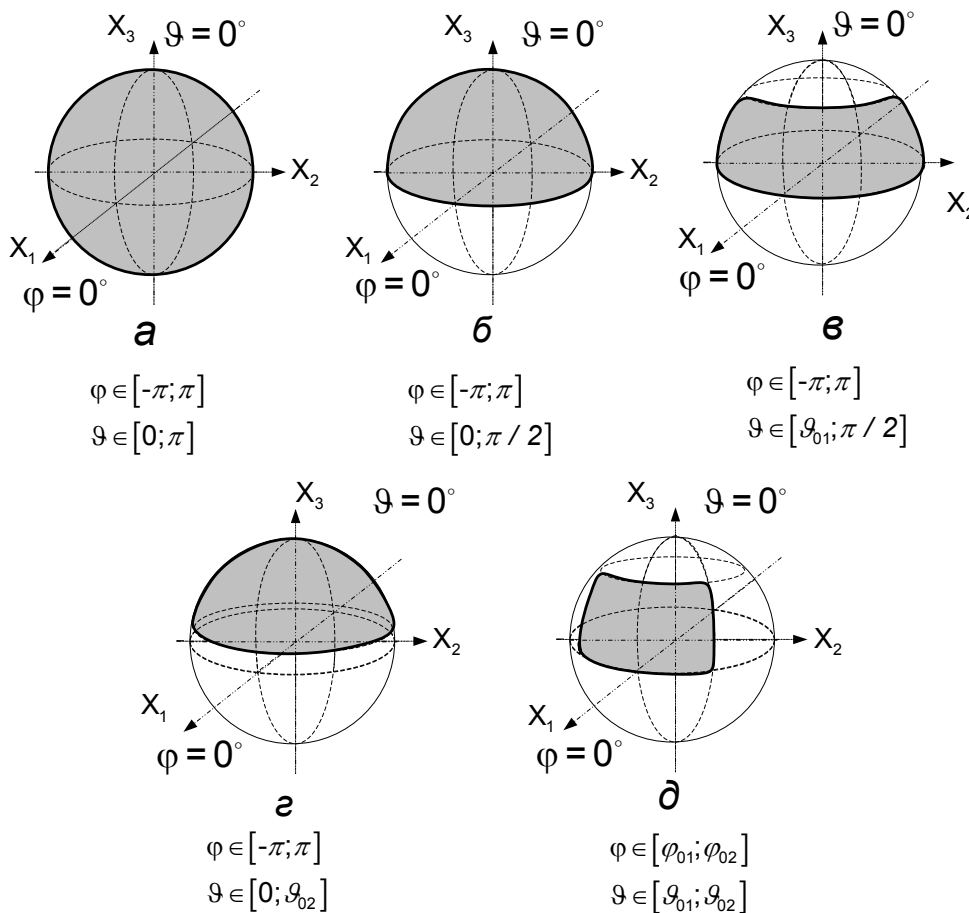


Рис. 3. Типи електродів

При цьому поле падаючої хвилі запишемо як:

$$\rho_0(r, \varphi, \vartheta) = j\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n j^n \frac{2^{-\delta_{0m}} J_n(kr) \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m(\varphi - \varphi_0))}{N_{nm}} \quad (6)$$

де  $\delta_{0m}$  - символ Кронекера, для якого

$$\delta_{km} = \delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = k = 0; \\ 0, & m \neq k \end{cases};$$

$$N_{nm} = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!};$$

$J_n(kr)$  - сферична функція Бесселя цілого  $n$ -го порядку,  $n = 0; 1; 2; 3; \dots$ ;

$P_n^m(\dots)$  - приєднана функція Лежандра першого роду ступеня  $n$  та порядку  $m$ ,  $m = 0; 1; 2; 3; \dots$ , а розсіяне поле – у вигляді:

$$\rho_s(r, \varphi, \vartheta) = j\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \tilde{C}_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) h_n^{(2)}(kr) \times \cos(m\varphi) \quad (7)$$

де  $h_n^{(2)}(kr)$  - сферична функція Ханкеля другого роду  $n$ -го порядку;

$\tilde{C}_{nm}$  - невідомі коефіцієнти розкладення.

Тож для визначення струму у відвідності до положень робіт [5, 13, 15], задаючися напрямком падіння плоскої хвилі  $(\varphi_0, \vartheta_0)$ , а також, враховуючи сметрію  $\rho_{\Sigma}$  відносно напрямку  $\varphi = 0^\circ$ , представимо радіальну компоненту електричної індукції  $D_r$  у вигляді вихідного ряду

$$\begin{aligned} D_r &= D_r(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi = \\ &= D_r^0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_r^n P_n(\cos \vartheta) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n D_r^{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Відмітимо, що  $D_r$ ,  $D_r^{mn}$  в рівняннях (5), (8) залежать від напрямку падіння плоскої хвилі  $\varphi_0, \vartheta_0$  завдяки вказаним відмінностям в жорсткості електродованих і неелектродованих ділянок оболонки. Таким чином, задача в цілому – є несиметричною. Врахуємо це:

-для акустичного тиску:

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma}(r, \varphi, \vartheta) &= j\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2j)^n \frac{2^{-\delta_{0m}} J_n(kr) \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m(\varphi - \varphi_0)) + \\ &+ \tilde{C}_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) h_n^{(2)}(kr) \cos(m\varphi)}{N_{nm}}, \end{aligned} \quad (9)$$

або, приводячи до розкладення у вигляді алгебраїчної суми центрально симетричної сферичної гармоніки, сукупності тесеральних гармонік нульового порядку та системи тесеральних гармонік вищих порядків, маємо:

$$\begin{aligned} P_{\Sigma}(r, \varphi, \vartheta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) \times \\ &\times P_n(\cos \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-i)^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) \times \\ &\times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (10)$$

- для деформацій структура розкладень для складових деформацій та електричної індукції відповідатиме структурі рівнянь (9), (10), а саме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi, \vartheta) &= \varepsilon_{\lambda\beta}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\lambda\beta}^n P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \varepsilon_{\lambda\beta}^{nm} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos(m(\varphi - \varphi_0)), \end{aligned} \quad (11)$$

де комбінації індексів  $\lambda$  і  $\beta$  приймають значення  $rr$ ,  $\varphi\varphi$ ,  $\vartheta\vartheta$ ,  $\varphi\vartheta$ ;  $P_n(\cos \vartheta)$  - поліноми Лежандра;  $\varepsilon_{\lambda\beta}^0$  - центрально симетрична складова діагональних компонентів матриці тензору деформацій;  $\varepsilon_{\lambda\beta}^n$  - вісесиметричні, а  $\varepsilon_{\lambda\beta}^{nm}$  - невісесиметричні складові усіх компонентів тензору деформації оболонки;

-для електричної індукції

$$\begin{aligned} D_r &= D_r(\varphi, \vartheta) = D_{\lambda\beta}^0 + \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_{\lambda\beta}^n P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n D_{\lambda\beta}^{nm} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos(m(\varphi - \varphi_0)), \end{aligned} \quad (12)$$

де  $D_{\lambda\beta}^0$  - центрально симметричний розв'язок для компоненти вектору електричної індукції, що визначається комбінацією індексів  $\lambda$  та  $\beta$  виду  $rr$ ;  $D_{\lambda\beta}^n$ ,  $D_{\lambda\beta}^{nm}$  - відповідно, вісесиметричні і невісесиметричні розв'язки.

Як видно з рівнянь (10) - (12) складові полів - мають вельми складний багатомодовий характер і залежать від напрямку падіння плоскої хвилі та орієнтації електроду відносно цього напрямку. Тому, для з'ясування питання щодо виду функції включення  $f(\varphi, \vartheta)$  необхідно дещо спростити ситуацію, шляхом визначення наступних *додаткових умов*:

*Умова 1:*

нехай плоска хвиля падає з напрямку  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\vartheta_0 = 90^\circ$ ;

*Умова 2:*

нехай симетрія електроду відносно напрямку  $\varphi = 0^\circ$  зберігається;

*Умова 3:*

нехай решта поверхні сфери також вкрити металевими електродами виду "tessera", які електрично коротко замнені між собою.

Цими додатковими умовами практично нівелюється різниця в жорсткості оболонки під поверхнями основного та тессеральних електродів, та стає можливим позбутись кутової залежності  $(\varphi_0, \vartheta_0)$  в розкладеннях (10) - (12).

Таким чином, спираючись на вказані додаткові умови, вважатимемо, що електричний заряд  $Q$ , наведений на електродованій поверхні сфери  $R_0 + h$  вільними носіями електричного струму за рахунок впливу на них електричного поля поляризаційних зарядів деформівного п'єзоелектрика, визначається виразом:

$$Q = - \int_{S_e} D_r dS = - (R_0 + h)^2 \int_{\varphi_{01}}^{\varphi_{02}} \int_{\vartheta_{01}}^{\vartheta_{02}} D_r(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi . \quad (13)$$

Отже, враховуючи для струму  $I$  співвідношення

$$I = -i\omega Q \quad (14)$$

де  $Q$  - є поляризаційні заряди, які визначаються рівнянням (13), струм в колі навантаження є повністю визначеним.

Таким чином, вираз (13) можна вважати анонсованою функцією включення, а інтегрування по кутах  $\varphi, \vartheta$  для бажаних розкриттів електродів по широтним та мерідональним напрямках - шляхом, що приведе до визачення номерів компонент (мод) складових електричного поля .

Далі змінимо вираз (13), переписавши його у вигляді:

$$Q = - (R_0 + h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} \times \int_{\varphi_{01}}^{\varphi_{02}} \cos(m\varphi) d\varphi \int_{\vartheta_{01}}^{\vartheta_{02}} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta . \quad (15)$$

Інтегралі I та II виразу (15) визначатимуть номери та комбінації номерів для сферичних гармонік, що існують для електродів з кутами розкритву  $\Delta\varphi_0 \rightarrow (\varphi_{01}, \varphi_{02})$  та  $\Delta\vartheta_0 \rightarrow (\vartheta_{01}, \vartheta_{02})$ .

Визначимо модовий склад для найбільш типових ситуацій розкритву електроду по координаті  $\varphi$ . Отже, для типових значень кутів  $\varphi_{01}, \varphi_{02}$  інтеграл I

$$I = \int_{\varphi_{01}}^{\varphi_{02}} \cos(m\varphi) d\varphi = \frac{\sin m\varphi_{02} - \sin m\varphi_{01}}{m} , \quad (16)$$

дорівнює:

а) Для

$$\left. \begin{matrix} \varphi_{01} = -\pi \\ \varphi_{02} = \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow I = \begin{cases} 2\pi, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} ; \quad (16.1)$$

б) Для

$$\left. \begin{matrix} \varphi_{01} = -\frac{\pi}{2} \\ \varphi_{02} = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow I = \begin{cases} \pi, & m = 0 \\ \frac{2}{m}, & m = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{2}{m}, & m = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \end{matrix}} \right\} m = 2p + 1, \\ p = 1, 2, 3.. \quad (16.2)$$

в) Для

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{01} = -\frac{\pi}{3} \\ \varphi_{02} = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| \Rightarrow I = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}, & m=0 \\ \sqrt{3}, & m=1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}, & m=2 \\ 0, & m=3,6,9 \end{cases} ; \quad (16.3)$$

г) Для

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{01} = -\frac{\pi}{4} \\ \varphi_{02} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| \Rightarrow I = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m=0 \\ \sqrt{2}, & m=1 \\ 0, & m=4,8,12,\dots \\ 1, & m=2 \end{cases} ; \quad (16.4)$$

д) Для

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{01} = -\frac{2\pi}{3} \\ \varphi_{02} = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right| \Rightarrow I = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}, & m=0 \\ \sqrt{3}, & m=1 \\ 0, & m=3,6,9,\dots \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & m=2 \end{cases} . \quad (16.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{01} = -\frac{\pi}{4} \\ \varphi_{02} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| \Rightarrow I = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m=0 \\ \sqrt{2}, & m=1 \\ 0, & m=4,8,12,\dots \\ 1, & m=2 \end{cases} ; \quad (16.4)$$

Як видно з (16.1) - (16.5), змінюючи розкриття електроду за координатою  $\varphi$ , можна змінювати вагу модових складових і навіть виключати деякі з них. Так, наприклад, для електроду з розкритвом  $\Delta\varphi = 360^\circ$  існує можливість реалізації лише нульової моди, а для електродів з розкритвами  $\Delta\varphi = 180^\circ$  та  $\Delta\varphi = 90^\circ$  можливість виключення всіх парних мод та мод 4,8,12... відповідно.

Для наведених на рис.3 типів електродування і відповідних значень кутів  $\vartheta_{01}, \vartheta_{02}$  інтеграл II від приєднаних функцій Лежандра

$$\begin{aligned} II &= \int_{\vartheta_{01}}^{\vartheta_{02}} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = - \int_{\cos \vartheta_{01}}^{\cos \vartheta_{02}} P_n^m(x) dx = \\ &= \begin{cases} \int_{-1}^1 P_n^m(x) dx, & \vartheta_{01} = 0^\circ, \vartheta_{02} = 180^\circ, \\ \int_0^1 P_n^m(x) dx, & \vartheta_{01} = 0^\circ, \vartheta_{02} = 90^\circ, \end{cases} \quad (17) \end{aligned}$$

$x = \cos \vartheta$ .

може бути приведений до інтегралу від поліномів Лежандра.

Розглянемо інтеграл (15):

**а) Повне електродування** (рис. 3 а)

Для кутів  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ ,  $\vartheta \in [0; \pi]$ , залучаючи допоміжний інтеграл [14]

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_0^m(x) dx = \begin{cases} 0, & m=0, n \neq 0 \\ 2, & m=0, n=0 \end{cases} ,$$

та розуміючи, що в силу врахування виразу (12.1) для розкриття електроду по координаті  $\varphi$  як  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ , маємо  $m=0$  та

$$II = \int_{-1}^1 P_n^m(x) dx \Big|_{\substack{m=0 \\ n=0}} = \int_{-1}^1 P_0^0(x) dx = 2. \quad (18)$$

Отже, заряд  $Q$  з виразу (15) отримаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} Q &= -(R_0 + h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} \cdot I \Big|_{\substack{m=0 \\ n=0}} = \\ &= -4\pi(R_0 + h)^2 D_r^{00}, \end{aligned}$$

**б) Електродування "екватор-полюс"** (рис. 3 б))

Для електроду в межах кутів  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ ,

$\vartheta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , залучаючи допоміжний інтеграл (15)

$$\int_0^1 P_n^m(x) dx = \begin{cases} 0, & m=0, n=2p, p=1,2,3,\dots \\ f_q, & m=0, n=2p+1, p=0,1,2,\dots \end{cases} . \quad (19)$$

та співвідношення (13) після виконання ряду перетворень для цілих значень  $n, m, q, p$  отримаємо:

$$\int_0^1 P_q^m(x) P_n^m(x) dx \Big|_{m=0} = \begin{cases} 0, & q=0, n=2p, p=1,2,3,\dots \\ f_p = (-1)^p \frac{(2p)!(4p+4)}{2^{2p+3}(p+1)^2(p!)}, & q=0, \\ n=2p+1, p=0,1,2. \end{cases} \quad (20)$$

Отже, вираз (20) показує, що при такому електродуванні інтеграл II дорівнює нулю для парних степеней поліномів Лежандра, а для непарних та нульової, відповідно  $f_p$ .

Таким чином заряд має визначатися як

$$Q = -(R_0+h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} \cdot I \cdot II \Big|_{m=0} = -4\pi(R_0+h)^2 D_r^0 - 4\pi(R_0+h)^2 \sum_{p=0}^{\infty} f_p D_r^{2p+1}. \quad (21)$$

**в) Електродування "екватор-широта"**  
(рис. 3 в))

Для кутів  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ ,  $\vartheta \in \left[ \vartheta_{01}; \frac{\pi}{2} \right]$ , як і випадках а), б). в силу того, що електрод в широтному напрямку є замкненим, обираємо  $m = 0$ . Тоді

$$II = - \int_a^b P_n^m(x) dx \Big|_{m=0} = - \int_{\cos \vartheta_{01}}^0 P_n(x) dx, \quad (22)$$

де  $a = \cos \vartheta_{01}$ ,  $b = \cos \vartheta_{02} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

Розглянемо інтеграл (22).

З монографій [14,15] відомо, що

$$\begin{aligned} - \int_a^0 P_n(x) dx &= - \frac{1}{2n+1} \left[ P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \right]_a^0 = \\ &= - \frac{1}{2n+1} \underbrace{\left[ P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) \right]}_{\alpha_n} + \\ &+ \frac{1}{2n+1} \underbrace{\left[ P_{n+1}(a) - P_{n-1}(a) \right]}_{\beta_n}, \end{aligned} \quad (23)$$

для дужок виразу (23) з позначенням  $\alpha_n$  та  $\beta_n$  можливі дві ситуації:

$n = 2p$  – парне,  
 $n = 2p + 1$ , – непарне,  $p = 0,1,2,\dots$

Тож для парних  $n$

$$\left[ P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) \right] = \left[ P_{2p+1}(0) - P_{2p-1}(0) \right] = \alpha_p = 0,$$

як для поліномів непарної степені і далі:

$$\begin{aligned} - \int_a^0 P_n(x) dx &= - \frac{1}{2n+1} \left[ P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \right]_a^0 = \\ &= q_{\alpha_p} + \frac{1}{4p+1} \underbrace{\left[ P_{2p+1}(a) - P_{2p-1}(a) \right]}_{\beta_n}, \end{aligned} \quad (24)$$

$q_{\alpha_p} = 0$ .

Для непарних  $n$  необхідно визначити,  $\left[ P_{2(p+1)}(0) - P_{2p}(0) \right]$ , як для поліномів парної степені, виконавши перетворення із залученням [14,15]:

$$\begin{aligned} P_{2(p+1)}(0) &= (-1)^{p+1} \frac{[2(p+1)]!}{4^{p+1} [(p+1)!]^2}; \\ P_{2p}(0) &= (-1)^p \frac{(2p)!}{4^p [(p)!]^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тож для непарних  $n$  різниця  $\left[ P_{2(p+1)}(0) - P_{2p}(0) \right]$ , становить:

$$\left[ P_{2(p+1)}(0) - P_{2p}(0) \right] = -(-1)^p \frac{(2p)!(4m+3)}{4^p (p!)^2 2(p+1)},$$

а інтеграл (19) приводиться до вигляду :

$$\begin{aligned} - \int_a^0 P_n(x) dx &= - \frac{1}{4p+3} \left[ P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \right]_a^0 = \\ &= \tilde{q}_{\alpha_p} + \frac{1}{4p+3} \underbrace{\left[ P_{2(p+1)}(a) - P_{2p}(a) \right]}_{\beta_n}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\tilde{q}_{\alpha_p} = (-1)^p \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2 2(p+1)}. \quad (27)$$

Таким чином, визначення ваги відповідної модової складової проводиться по значенням поліномів Лежандра  $P_{2p+1}(a), P_{2p-1}(a),$

$P_{2(p+1)}(a), P_{2p}(a)$  для аргументу  $a = \cos \vartheta_{01}$ , та значенням  $\alpha_n, \beta_n$  з виразів (24)-(27).

Поліноми Лежандра певної степені (наприклад, відповідно до [7]) визначаються через тригонометричні функції співвідношенням



$$\begin{aligned}
P_\nu(\cos \vartheta) &= 2 \cdot \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \cdot \cos \nu \vartheta + \\
&+ 2 \cdot \frac{(2\nu-3)!!}{(2\nu-2)!!} \cdot \frac{1}{2} \cos[(\nu-2)\vartheta] + \\
&+ 2 \cdot \frac{(2\nu-5)!!}{(2\nu-4)!!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos[(\nu-4)\vartheta] + \dots \quad (28)
\end{aligned}$$

Порядок поліному  $\nu$  встановлює кількість модових складових та може обиратися або з умов доцільності обмеження обчислень модової структури певним порядком, або з умов сходимості виразу (28).

Таким чином, при прийомі модовий склад електричної характеристики  $n_0$  визначатиметься сукупністю результатів визначення інтегралів I та II і може містити нульову та непарні складові. Тобто, вираз для визначення заряду становитиме

$$\begin{aligned}
Q &= -(R_0+h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} \cdot I \cdot II|_{m=0} = \quad (29) \\
&= -4\pi(R_0+h)^2 D_r^0 - 4\pi(R_0+h)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{f}_p D_r^{2p+1},
\end{aligned}$$

де  $\tilde{f}_p$  обчислюється з виразу (24), враховуючи допоміжні формули (25)-(28) та рівність

$$\tilde{f}_p = -2\pi \cdot \int_a^0 P_n(x) dx \quad (30)$$

**г) Електродування "екватор-широта"** (рис. 3 г))

Для кутів  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ ,  $\vartheta \in [0; \vartheta_{02}]$ , як і у випадках а) - в). в силу того, що електрод в широтному напрямку є замкненим, обираємо  $m=0$ . Тоді

$$II = - \int_a^b P_n^m(x) dx \Big|_{m=0} = - \int_1^{\cos \vartheta_{02}} P_n(x) dx, \quad (31)$$

де  $a = \cos \vartheta_{01} = \cos 0 = 1$ ,  $b = \cos \vartheta_{02}$ .

За аналогією з п.п. в) розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned}
- \int_1^b P_n(x) dx &= - \frac{1}{2n+1} \left[ P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \right]_1^b = \\
&= - \frac{1}{2n+1} \underbrace{\left[ P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1) \right]}_{\eta_n} + \\
&+ \frac{1}{2n+1} \underbrace{\left[ P_{n+1}(b) - P_{n-1}(b) \right]}_{\mu_n}, \quad (32)
\end{aligned}$$

Для дужок виразу (32) з позначеннями  $\eta_n$  та  $\mu_n$  можливі також дві ситуації:

$n = 2p$  - парне,

$m = 0$

$n = 2p + 1$ , - непарне,  $p = 0, 1, 2, \dots$

Тож для будь яких цілих  $n$

$$\left[ P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1) \right] = \left[ P_{2p+1}(1) - P_{2p-1}(1) \right] = \eta_n = 0,$$

Для парних  $n$

$$\begin{aligned}
- \int_1^b P_n(x) dx &= \\
&= q_{\eta_p} + \frac{1}{4p+1} \underbrace{\left[ P_{2p+1}(b) - P_{2p-1}(b) \right]}_{\mu_p}, \quad (33)
\end{aligned}$$

$q_{\eta_p} = 0$ .

При цьому значення поліномів для дужок  $\mu_n$  визначають за допомогою представлення (28).

Для непарних  $n$  інтеграл (32) зводиться до

$$\begin{aligned}
- \int_1^b P_n(x) dx &= \\
&= q_{\eta_p} + \frac{1}{4p+3} \underbrace{\left[ P_{2(p+1)}(b) - P_{2p}(b) \right]}_{\mu_p}, \quad (34)
\end{aligned}$$

$q_{\eta_p} = 0$ .

для якого необхідно, використавши (28), визначити,

$$\tilde{\mu}_p = \left[ P_{2(p+1)}(0) - P_{2p}(0) \right]. \quad (35)$$

Отже, як і в попередній ситуації порядок поліному розкладення (28) встановлює кількість модових складових та може обиратися з вказаних вище умов.

Таким чином, при прийомі модовий склад електричної характеристики  $n_0$  визначатиметься сукупністю результатів визначення інтегралів I та II, може містити будь які складові, а вираз для визначення заряду становитиме

$$Q = -(R_0 + h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} \cdot I \cdot II|_{m=0} = \quad (36)$$

$$= -4\pi(R_0 + h)^2 D_r^0 - 4\pi(R_0 + h)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{f}_p D_r^p,$$

де  $\tilde{f}_p$  обчислюється з виразу (32), враховуючи парність та непарність значень степені  $n(p)$ , допоміжні формули (33)-(35) та рівність

$$\tilde{f}_p = -2\pi \cdot \int_1^b P_n(x) dx. \quad (37)$$

**д) Часткове електродування, обмежене по широті і меридіану (рис. 3 д))**

Для кутів  $\varphi \in [\varphi_{01}; \varphi_{02}]$ ,  $\vartheta \in [\vartheta_{01}; \vartheta_{02}]$ , на відміну від випадків а) – г),  $m$  може і не дорівнювати нулю. Це зумовлено певним розкритом електроду по координаті  $\varphi$ . Проте, і в цьому випадку достатньо виразних сполучень складових форм.

Розглянемо деякі з них.

*Електрод у вигляді широтного тонкого кільця*

Вважатимемо, що кути, які визначають електродування вказаного типу, можуть бути записані як  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ ,  $\vartheta \in [\vartheta_{01}; \vartheta_{02}]$ . При цьому розкрит електроду по  $\Delta\vartheta$  відповідає умовам малості, які визначається нерівностями

$$\frac{l_e}{R_0 + h} \ll 1 \text{ або } \Delta\vartheta^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \ll 1,$$

де  $l_e$  - довжина дуги електроду по меридіану.

Виконання такої нерівності вимагає значень  $\Delta\vartheta \leq 6^\circ$ .

Таким чином, з врахуванням замкненості електроду по широті,  $m = 0$  інтеграли I та II дорівнюють :

$$I = 2\pi;$$

$$II = \int_{\vartheta_{01}}^{\vartheta_{02}} \sin\vartheta d\vartheta \approx \frac{\Delta\vartheta^2}{2} \Big|_{\Delta\vartheta = \vartheta_{02} - \vartheta_{01}}, \quad (38)$$

Отже, в цьому випадку модовий склад електричної характеристики сполучення 00 визначатиметься сукупністю результатів визначення інтегралів I та II (33).

Тобто, вираз для визначення заряду становитиме

$$Q = -(R_0 + h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_r^{nm} \cdot I \cdot II|_{m=0} =$$

$$= -4\pi(R_0 + h)^2 D_r^0 \tilde{f}, \quad (39)$$

$$\text{де } \tilde{f} = \frac{\Delta\vartheta^2}{2}.$$

*Електрод у вигляді широтної дуги*

Відмінність цього випадку від попереднього полягає в тому, що інтеграл I набуватиме значень (16.2) - (16.5) в залежності від кутового розкриття електроду симетрично відносно нарямку  $\varphi = 0^0$ , Отже, при сталості розкладень по меридіональній координаті в умовах малості (38) - модовий набір визначатиметься, наприклад для  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  нульовою та непарними складовими  $n, m$  - тобто, 00, 00, 03, 05, ...

*Довільний за розкритом електрод*

Отже, для кутів  $\varphi \in [\varphi_{01}; \varphi_{02}]$ ,  $\vartheta \in [\vartheta_{01}; \vartheta_{02}]$  функції включення подаються добутком інтегралу I (визначатиметься рівнянням (12) для довільних цілих  $m > 0$ ) та інтегралу II:

$$II = - \int_a^b P_n^m(x) dx, \quad (40)$$

$$(a = \cos \vartheta_{01}, b = \cos \vartheta_{02}).$$

Інтеграл, представлений виразом (40), може бути обчислений для шуканого сполучення  $m$  та  $n$ , використовуючі формулу Родріго та чисельне інтегування.

## Висновки

В результаті проведених аналітичних досліджень визначені основні модові набори у складі основних фізичних полів оберненого п'єзокерамічного сферичного перетворювача, які відповідають типовим випадкам електродування зовнішньої активної поверхні перетворювача та умовам симетрії електродування і обрання напрямку падіння плоскої звукової хвилі.

Як видно, часткове електродування поверхні сферичного перетворювача суттєво змінює модовий склад (виду  $mn$ ) основних фізичних полів. При цьому в режимі прийому вид електродування визначатиме модовий склад електричної напруги або струму, а в режимі випромінювання – деформацій, переміщень точок поверхні оболонки, швидкостей та тиску в акустичному полю.

Показані умови спрощення задачі врахування виду електроду відповідно до тессеральної моделі електродування та конкретизації напрямку падіння плоскої звукової хвилі.

Отримані дані щодо функції включення електродів  $f(\varphi, \vartheta)$  надають можливість аналізу зв'язаності модових складових розглянутої коливальної системи з розподіленими параметрами при визначенні амплітудно- та фазочастотних характеристик вказаних полів.

## Література

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям.-М.: Наука, 1979. 832 с.
2. *Аронов Б.С.* Электро - механические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. -Л.: Энергоатомиздат, 1990.-271 с.
3. *Гринченко В.Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наук.думка, 1986. – 240 с.
4. *Гринченко В.Т., Вовк И.В., Маципура В.Т.* Основы акустики. – К.: Наукова думка, 2007. – 640 с
5. *Гринченко В.Т., Улитко А. Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Отв. ред. А.Н. Гузь АН УССР. – К.: Наукова думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость. – 280 с.
6. *Дидковский В.С., Климов А.Е., Лейко А.Г., Петрищев О.Н.* Радиальные колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки// Электроника и связь.-2009.-№ 6(53). –С. 31-40.
7. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск. Наука и техника, 1968. – 584 с.
8. *Коржик А.В.* Амплитудно-частотные характеристики некоторых форм колебаний пьезокерамических цилиндрических приемников звука при различных видах электродирования в условиях связанности // Акустичний вісник, 2009.-Т.12,-№ 3.- С.33-40.
9. *Коржик А.В.* Прием звука сферическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, который размещен в замкнутом упругом слое // Электроника и связь. – 2012. – №6. – С. 55-65
10. *Коржик А.В.* Применение метода “сквозной задачи” к исследованию амплитудно-частотных зависимостей характеристик механического поля приемного цилиндрического пьезокерамического преобразователя с разрезными электродами// Электроника и связь. – 2010. – № 4. – С. 155–159.
11. *Коржик А.В.* Фазо-частотные характеристики некоторых форм колебаний пьезокерамических цилиндрических приемников звука при различных видах электродирования в условиях связанности.// Акустичний вісник, 2009.-Т. 13. -№ 4.- С. 29-33.
12. *Моргун И.О., Савин В.Г.* Преобразование акустических импульсов в электрические сферической пьезокерамической оболочкой //Электроника и связь, –2006.– № 6. – С.36–42
13. *Петрищев О.Н.* Гармонические колебания пьезокерамических элементов Часть 1. Гармонические колебания пьезоэлектрических элементов в вакууме и метод резонанса-антирезонанса. Киев:, “АВЕРС” , 2012. - 299 с
14. *Скучик Е.* Основы акустики , Том 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.- 610 с.
15. *Филиппова Н.Ю., Коржик А.В.* Постановка и решение задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, размещенным в замкнутом волновом слое// Электроника и связь. – 2012. – № 1. – С. 17-23.

УДК 534.3

## Учет типа электродирования сферического электроупругого преобразователя в сквозных задачах приема звука многомодовыми системами

**А.В. Коржик**, д-р техн. наук

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”,  
пр. Победы, 37, Киев - 56, 030056, Украина.

На основе электроупругой модели гидроакустического пьезокерамического приемного преобразователя в виде тонкой пьезокерамической оболочки, показаны особенности модового состава основных физических полей преобразователя при использовании типовых видов электродирования его активной поверхности. Библиография 15, рис. 3

**Ключевые слова:** гидроэлектроупругость, сферическая оболочка, гидроакустический пьезокерамический преобразователь, сквозная задача, прием и излучение звуковых волн, электродирование.

UDC 534.3

## The dependence modes structure of main physical fields spherical electroelastic transducer-receiver by types electrical electrodes

**O.V. Korzhyk**, Dr.Sc.

National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”,  
pr. Peremogy, 37, Kyiv - 56, 030056, Ukraine.

On a base of model of electroelastic hydroacoustic transducer-receiver, which representative by thin spherical piezoelectric shell, show round the specific modes structure the main physical fields of trnsduser in oder to typical variants electroding active trnsduser surface.

The results representation are illustrated for typicals electrode forms and angles. Reference 15, figures 3.

**Key words:** hydroelectroelastic, spherical shell, hydroacoustic piezoceramic transducer, receiving and radiation of sound waves, electrode.

### References

1. Abramoviz M., I.A.Stigan. (1979), [Handbook of mathematical function]. Moscow: Nauka, P. 832. (Rus)
2. Aronov B.S. (1990), [The piezoceramic electro-mechanic transducers]. Leningrad: Energoatomizdat. P. 271. (Rus).
3. Didkovsky V.S., Klimov A.E., Leiko A.G., Petricshev O.N. (2009), [Radial vibrations of cylindrical piezoceramic shell]. Electronics and communications. no 6(53). Pp. 31-40. (Rus).
4. Filippova N.U., Korzhyk O.V. (2012), [The based and solution of problem of receiving a cylindrical electro elastic audio converter with full electrodical surface, wich placed in a closed-wave multimode fiber]. Electronics and communications. no 1. Pp. 17-23 (Rus).
5. Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsipura B.T. (2007), [The principles of acoustics]. Kiyv.: Naukova dumka. P.640.(Ukr)
6. Grinchenko V.T., Vovk I.V. (1986), [The waves-tasks of sound scattering by elastic shells]. Kiyv.: Naukova dumka. P.240. (Rus)

7. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A.* (1989). [The mechanics of connecting fields in construction elements: Monograph]. Kyiv.: Naukova dumka, Vol. 5: Electroelastics. P.280. (Ukr)
8. *Ivanov E.A.* (1968), [Diffraction of electromagnetic waves by two body]. Minsk. Nauka I tehnica. P. 584. (Rus)
9. *Korzhyk O.V.* (2012), [The receiving of sound waves by spherical electroelastic audio transducer with full electroelastical surface in a close-wave multimode based system]. Electronics and communications. no6. pp. 55-65 (Ukr)
10. *Korzhyk O.V.* (2010), [The application the “through-task” method to the investigate AF characteristics me-chanic field of acoustical cylindrical piezoelectrical receiver with limited electrodes]. Electronics and communications. no4. Pp.155-159 (Ukr).
11. *Korzhyk O.V.* (2009), [AF characteristics same modes of acoustical cylindrical piezoelectrical receivers with limited electrodes in conditions of modes – interaction]. Acoustic bulletin, Vol.12, no 3. Pp.33-40 (Rus).
12. *Korzhyk O.V.* (2009), [FF characteristics same modes of acoustical cylindrical piezoelectrical receivers with limited electrodes in conditions of modes – interaction]. Acoustic bulletin. Vol. 13. no 4. Pp. 29-33 (Rus).
13. *Morgun I.O., Savin V.G.* (2006), [The transformation of acoustical impulse to the electrical impulse by sphere cal electroelastic shell]. Electronics and communications, no 6. Pp.36–42. (Rus).
14. *Petrishchev O.N.* (2012), [Garmonic oscillations of piezoelectric elements/ Part 1. Garmonic oscillations of piezoelectric elements in vacuum and “resonance-atiresonance” method]. Kyiv :AVERS. P. 299. (Rus).
15. *Scudrzyk E.* (1976), [The foundations of Acoustics/ Vol. 2.]. Moskva:P. 520 (Rus).

Поступила в редакцию 02 января 2013 г.