

## Акустические приборы и системы

УДК 534.3

**А.Г. Лейко**, д-р. тех. наук, **А.И. Нижник**, **Я.И. Старовойт**

Государственное предприятие «Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов»,  
ул. Сурикова, 3, г. Киев, 03035, Украина.

### Звуковые поля пьезокерамических излучателей с различным пьезоэффектом

*Рассмотрены основные конструктивные схемы построения цилиндрических преобразователей с продольным и поперечным пьезоэффектом и их особенности, а именно, силовая и компенсированная конструкции. Методом «сквозной» задачи определены звуковые поля круговых цилиндрических пьезокерамических излучателей с продольным и поперечным пьезоэффектами.*

*На основе приближений Кирхгофа-Лява и уравнений вынужденных колебаний оболочки получены аналитические соотношения для описания и вычисления механических, акустических и электрических характеристик таких излучателей при технической реализации их в виде силовых и компенсированных конструкций с продольным и поперечным пьезоэффектом, а также связей между этими характеристиками. Библиограф. 4, рис. 2.*

**Ключевые слова:** звуковые поля, цилиндрический пьезокерамический преобразователь, продольный и поперечный пьезоэффект, силовая и компенсированная конструкция.

#### Введение

Развивающийся рынок подводных технологий требует наличия различных типов гидроакустических преобразователей. В свою очередь создание новых образцов преобразователей сопряжено с необходимостью развития расчетного обеспечения соответствующих проектных работ. В настоящее время большое внимание уделяется решению так называемых «сквозных» задач гидроакустики, когда по заданию электрического напряжения на входе преобразователя определяется величина звукового давления в любой точке рабочего пространства. В практической гидроакустике широкое применение нашли круговые цилиндрические пьезокерамические преобразователи. Они разрабатываются с использованием как продольного, так и поперечного пьезоэффекта. В конструктивном отношении могут быть выполнены либо в виде

силовой конструкции, когда внутренний объем преобразователя заполнен газом, либо в виде компенсированной, когда внутри преобразователя находится жидкость, в частности, водозаполненные конструкции [3]. Однако в опубликованной литературе в настоящее время отсутствуют материалы сравнительных оценок акустических свойств излучателей одного и того же типа конструкции, но выполненных с использованием продольного и поперечного пьезоэффекта. Особую значимость такие оценки приобретают при определении звуковых полей излучателей рассматриваемого типа в «сквозной» постановке. Целью статьи является получение аналитических соотношений, которые описывают звуковые поля вышеизложенных излучателей.

#### Постановка задачи

Рассмотрим компенсированный круговой пьезокерамический цилиндрический преобразователь со средним радиусом  $r_0$  и толщиной  $h$ , выполненный в виде набора колец (рис. 1,а) с использованием продольного (рис. 1,б) и поперечного (рис. 1,в) пьезоэффекта. К электрическим выводам преобразователя подводится гармонический сигнал  $\psi = \psi_0 e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  - текущая частота. Будем полагать, что преобразователь имеет бесконечную длину. Снаружи он окружен жидкостью с плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$ . Внутри преобразователь заполнен жидкостью с плотностью  $\rho_2$  и скоростью звука  $c_2$ . В частном случае замены жидкости внутри преобразователя газом конструкция компенсированного преобразователя вырождается в силовую (рис. 1).

Для обеспечения работы преобразователя на продольном пьезоэффекте (рис. 1,б) его конструкция создается в виде секционированного кольца, путем склеивания между собой  $n$  пьезокерамических призм, на боковые поверхности которых нанесены токопроводящие электроды.

Электрически между собой все призмы соединены параллельно.

Для обеспечения работы преобразователя на поперечном пьезоэффекте (рис. 1,в) его конструкция выполнена в виде цельного пьезокерамического кольца, на цилиндрические по-

верхности которого нанесены токопроводящие электроды.

Возбуждение преобразователя электрическим напряжением  $\psi$  приводит к возникновению механических гармонических колебаний его пьезокерамических колец и в среду излучаются звуковые волны [3].

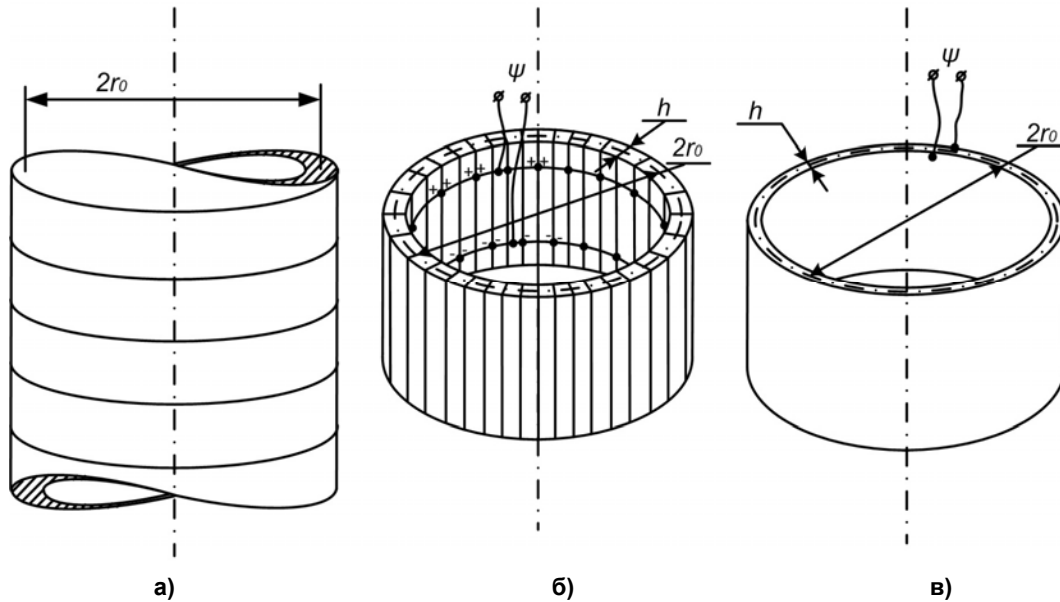


Рис. 1. Схемы построения цилиндрических пьезокерамических излучателей с продольным (б) и поперечным (в) пьезоэффектом

Поскольку подводимая к кольцам преобразователя разность электрических потенциалов  $\psi$  одна и та же, то, очевидно, что при указанных способах возбуждения все части преобразователя будут перемещаться в фазе и с одинаковой амплитудой по любому радиусу (пульсирующие колебания). Так как преобразователь набран из колец, толщина и высота которых малы, по сравнению с радиусом, то толщинная и осевая деформации отсутствуют (пренебрежительно малы), и преобразователь является колебательной системой с одной степенью свободы.

**Вывод аналитических соотношений**

В математическом плане рассматривается задача определения звукового поля, создаваемого цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем при подведении к его электрическим выводам гармонического электрического сигнала, сводится к построению и анализу совместного решения уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \Phi_i + k_i^2 \Phi_i = 0 \tag{1}$$

в многосвязных областях относительно потенциалов скоростей  $\Phi_i$  этих областей с соответ-

ствующими им волновыми числами  $k_i = \omega/c_i$ , где  $c_i$  - скорость распространения звука в средах этих областей, и уравнений, описывающих колебания соответствующих электроупругих оболочек.

Введем в рассмотрение декартову и связанную с ней круговую цилиндрическую системы координат, направив их оси Z вдоль продольной оси цилиндра (рис. 2). Выделим две области существования звукового поля – внутреннюю (область II) и внешнюю ( область I), определив их границы, соответственно, выражениями:  $0 \leq r \leq r_2 = r_0 - h/2$ ;  $r \geq r_1 = r_0 + h/2$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

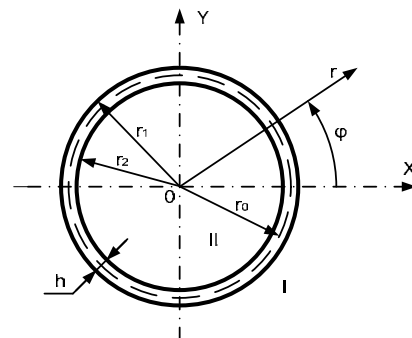


Рис. 2. Нормальное сечение преобразователя и введенные системы координат

Пьезоэлектрические преобразователи представляют собой механические колебательные системы, электроупругие колебания которых при продольном и поперечном пьезоэффектах описываются разными дифференциальными уравнениями. Однако при их выводе принимается одинаковое допущение, состоящее в том, что при  $h/r_0 \ll 1$  для описания движения тонких оболочек используются приближения Кирхгофа-Лява. Обозначим перемещения срединной поверхности оболочки в тангенциальном направлении через  $u$ , а в радиальном - через  $w$ .

Тогда для пьезокерамической оболочки с окружной поляризацией (продольный пьезоэффект), совершающей одномерные (пульсирующие) колебания, уравнение вынужденных гармонических колебаний имеет вид [4]:

$$-\frac{du}{d\varphi} - w + \beta \left( \frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{d^4 w}{d\varphi^4} \right) + \frac{i\omega\alpha}{h} (\Delta\rho\Phi) - \frac{e_{33}\psi_0 n}{2\pi C_{33}^E} = \alpha\gamma \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (2)$$

$$\text{где } \beta = \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E \epsilon_{33}^S} \right), \quad \alpha = \frac{r_0^2}{C_{33}^E},$$

$$\Delta\rho\Phi = (\rho_1\Phi_1(r_1, \varphi) - \rho_2\Phi_2(r_2, \varphi));$$

$\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – акустические потенциалы для жидкостей вне и внутри оболочки с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ;  $\gamma$  – плотность пьезокерамики;  $e_{33}$  – пьезоконстанта;  $C_{33}^E$  – модуль упругости керамики;  $\epsilon_{33}^S$  – диэлектрическая проницаемость.

Для пьезокерамической оболочки с радиальной поляризацией (поперечный пьезоэффект) с таким же видом колебаний уравнения вынужденных гармонических колебаний могут быть представлены в виде [2]:

$$-\frac{du}{d\varphi} - w + \beta \left( \frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{d^4 w}{d\varphi^4} \right) + \frac{i\omega\alpha}{h} (\Delta\rho\Phi) - \frac{e_{31}r_0\psi_0}{hC_{11}^E} = \alpha\gamma \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (3)$$

$$\text{где } \beta = \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right), \quad \alpha = \frac{r_0^2}{C_{11}^E},$$

$$\Delta\rho\Phi = (\rho_1\Phi_1(r_1, \varphi) - \rho_2\Phi_2(r_2, \varphi)).$$

$e_{31}$  – пьезоконстанта;  $C_{11}^E$  – модуль упругости керамики.

Дальнейшая процедура получения соотношений, описывающих звуковые поля преобразователей, будет одинаковой для преобразова-

телей с различным пьезоэффектом. Прежде всего отметим, что пульсация колебаний оболочки позволяет представить её перемещения выражением

$$w(\varphi) = w_0, \quad (4)$$

где  $w(\varphi) = w_0$  перемещения на нулевой моде колебаний.

Учитывая условия отсутствия источников звука на бесконечности и внутри преобразователя, а также радиальную симметрию создаваемого звукового поля (поле не зависит от угла  $\varphi$ ), выражения для акустических потенциалов во внешней и внутренней областях преобразователя запишем в виде:

$$\Phi_1(r, \varphi) = A_0 H_0^{(1)}(k_1 r) \quad (5)$$

$$\Phi_2(r, \varphi) = B_0 J_0^{(1)}(k_2 r) \quad (6)$$

в выражениях (5) и (6)  $A_0$  и  $B_0$  – неизвестные коэффициенты;  $H_0^{(1)}$  и  $J_0^{(1)}$  – функции Ханкеля и Бесселя, соответственно.

Для отыскания неизвестных коэффициентов воспользуемся граничными условиями, которые состоят в том, что на поверхности пьезокерамического преобразователя должны выполняться условия равенства нормальных составляющих скоростей жидкости и оболочки:

$$-i\omega w = -\frac{d\Phi_1}{dr}; r = r_1; \quad -i\omega w = -\frac{d\Phi_2}{dr}; r = r_2. \quad (7)$$

Подстановка выражений (4), (5) и (6) в соотношения (1) и (7) позволяет получить следующие выражения для отыскания неизвестных коэффициентов:

$$A_0 = \frac{i\omega w}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)}; \quad B_0 = \frac{i\omega w}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)}.$$

Тогда выражения, описывающие потенциалы скоростей примут вид:

$$\Phi_1 = \frac{i\omega w H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)}; \quad \Phi_2 = \frac{i\omega w J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)}. \quad (8)$$

Учтем вид поляризации, используемой в преобразователе.

Для преобразователя с окружной поляризацией подставим выражение (8) в соотношение (2) для колебаний оболочки. Получим:

$$-wC_{33}^E - \frac{e_{33}\psi_0 n}{2\pi} - \frac{\omega^2 r_0^2 w}{h} \times \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) = -r_0^2 \gamma \omega^2 w.$$

Тогда смещения оболочки в радиальном направлении приобретают вид

$$w = - \frac{\frac{d_{33}\psi_0 n}{2\pi}}{\frac{\omega^2 r_0^2}{C_{33}^E} \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) - \frac{r_0^2 \gamma \omega^2}{C_{33}^E} + 1}. \quad (9)$$

Давление, создаваемое снаружи и внутри преобразователя, будет определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho_1\Phi_1 = \\ &= - \frac{\frac{\rho_1\omega^2 H_0^{(1)}(k_1 r) d_{33}\psi_0 n}{2\pi k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)}}{\frac{\omega^2 r_0^2}{hC_{33}^E} \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) - \frac{r_0^2 \gamma \omega^2}{C_{33}^E} + 1}; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= -i\omega\rho_2\Phi_2 = \\ &= - \frac{\frac{\rho_2\omega^2 J_0^{(1)}(k_2 r) d_{33}\psi_0 n}{2\pi k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)}}{\frac{\omega^2 r_0^2}{hC_{33}^E} \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) - \frac{r_0^2 \gamma \omega^2}{C_{33}^E} + 1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Локальные импедансы излучения преобразователя во внутреннюю и внешнюю среды определяются отношением давления  $p_n$  на поверхности оболочки к ее колебательной скорости  $v_n$ :

$$Z_n = -p_n/v_n.$$

Тогда импедансы излучения преобразователя во внешнюю и внутреннюю среды с учетом выражений (10) и (11) определяются выражениями:

$$Z_1 = - \frac{\rho_1\omega H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{ik_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)}; \quad Z_2 = - \frac{\rho_2\omega J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{ik_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)}. \quad (12)$$

Импеданс пьезокерамической оболочки с окружной поляризацией  $Z_{об}$  и полный  $Z_{полн}$  определяются из соотношения:

$$Z_{об} = \frac{p_1 - p_2}{i\omega w}; \quad (13)$$

$$Z_{полн} = Z_{об} + Z_1 + Z_2. \quad (14)$$

Определим электрический импеданс секционированного преобразователя, как отношение подводимого к нему электрического напряжения к току  $I$  преобразователя

$$Z_{эл} = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi}{\sum_i^n I_i} = \frac{\Psi}{S_{эл} \sum_i^n dD_i/dt} = \frac{\Psi}{nS_{эл} dD/dt}.$$

где  $I_i$  и  $D_i$  – электрический ток и электрическая индукция в  $i$ -й призме;  $S_{эл}$  – площадь электрода, приведенная к единице высоты [1].

Исходя из условия задачи для преобразователя с продольным пьезоэффектом компоненты вектора электрической индукции записываются в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} D_r &= D_z = 0; \\ D_\varphi &= \varepsilon_{33}^s \left( -\frac{n\psi_0}{2\pi r_0} \right) + e_{33} \frac{w}{r_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, электрический импеданс преобразователя определяется выражением

$$Z_{эл} = \frac{U}{I} = \frac{U}{i\omega n S_{эл} \left( \varepsilon_{33}^s \left( -\frac{n\psi_0}{2\pi r_0} \right) + e_{33} \frac{w}{r_0} \right)}. \quad (15)$$

Для преобразователя с поперечным пьезоэффектом выражение для смещений оболочки в радиальном направлении получается путем подстановки соотношений (8) в выражение (3) и может быть представлено в виде:

$$w = - \frac{\frac{d_{31}r_0\psi_0}{h}}{\frac{\omega^2 r_0^2}{hC_{11}^E} \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) - \frac{\omega^2 r_0^2 \gamma}{C_{11}^E} + 1}. \quad (16)$$

Давление, создаваемое снаружи и внутри преобразователя, будет определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho_1\Phi_1 = \\ &= - \frac{\frac{\rho_1\omega^2 H_0^{(1)}(k_1 r) d_{31}r_0\psi_0}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1) h}}{\frac{\omega^2 r_0^2}{hC_{11}^E} \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) - \frac{\omega^2 r_0^2 \gamma}{C_{11}^E} + 1}; \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= -i\omega\rho_2\Phi_2 = \\ &= - \frac{\frac{\rho_2\omega^2 J_0^{(1)}(k_2 r) d_{31}r_0\psi_0}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2) h}}{\frac{\omega^2 r_0^2}{hC_{11}^E} \left( \frac{\rho_1 H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - \frac{\rho_2 J_0^{(1)}(k_2 r_2)}{k_2 J_1^{(1)}(k_2 r_2)} \right) - \frac{\omega^2 r_0^2 \gamma}{C_{11}^E} + 1}. \quad (18) \end{aligned}$$

Импедансы излучения преобразователя во внешнюю и внутреннюю среды, импеданс пьезокерамической оболочки с поперечной поляризацией и полный импеданс преобразователя определяются соотношениями (12)-(14) с учетом выражения (16)-(18).

Для преобразователя с поперечным пьезоэффектом компоненты вектора электрической индукции записываются в следующем виде [1]:

$$D_{\varphi} = D_z = 0;$$

$$D_r = \varepsilon_{33}^s \psi_0 + e_{31} \frac{w}{r_0}.$$

Таким образом, электрический импеданс преобразователя с поперечным пьезоэффектом определяется выражением

$$Z_{\text{эл}} = \frac{U}{I} = \frac{U}{i\omega S_{\text{эл}} \left( \varepsilon_{33}^s \psi_0 + e_{31} \frac{w}{r_0} \right)}. \quad (19)$$

Заметим, что в зависимости от значений удельного волнового сопротивления среды  $\rho_2 c_2$  внутри излучателя приведенные формулы позволяют рассчитать электроакустические характеристики излучателей силовой ( $\rho_2 c_2 \rightarrow 0$ ) и компенсированной ( $\rho_2 c_2 > 0$ ), в том числе и водозаполненной ( $\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1$ ) конструкции.

### Выводы

В результате решения «сквозной» задачи были найдены аналитические соотношения, описывающие механические, акустические и электрические поля пьезокерамических цилиндрических оболочек с различным типом пьезоэффекта и при различном конструктивном исполнении.

Определены выражения для расчета смещений поверхности оболочки в радиальном направлении, звукового давления создаваемого

оболочкой в пространстве, локальных импедансов излучения и общего импеданса оболочки, а также электрического импеданса.

Приведенные результаты позволяют более обоснованно подойти при проектировании цилиндрических пьезокерамических излучателей к выбору используемого состава пьезокерамики, типа пьезоэффекта и варианта конструктивного исполнения.

### Список использованных источников

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций// - Киев: Наук. думка, 1989. - Т.5. Электроупругость - 280 с.
2. Дідковський В.С., Лейко О.Г., Савін В.Г. Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання). Навчальний посібник. – Кіровоград: "Імекс-ЛТД", 2006. – 448 с.
3. Дідковський В. С., Порошин С. М., Лейко О. Г., Лейко А. О., Дрозденко О.І. Конструювання електроакустичних приладів і систем для мультимедійних акустичних технологій. – Харків: 2013 р. – 390 с.
4. Савін В.Г., Дидусенко Ю.А. Уравнения движения тонкостенных цилиндрических пьезокерамических преобразователей с окружной поляризацией// КОНСОНАНС-2011. Акустический симпозиум. – 2011. – С. 230-235.

Поступила в редакцию 20 октября 2013 г.

УДК 534.3

О.Г. Лейко, д-р. тех. наук, О.І. Нижник, Я.І. Старовойт

Державне підприємство «Київський науково-дослідний інститут гідропріладів»,  
вул. Сурикова, 3, м. Київ, 03035, Україна.

## Звукові поля п'єзокерамічних випромінювачів з різним п'єзоэффектом

*Розглянуто основні конструктивні схеми побудови циліндричних перетворювачів з подовжнім і поперечним п'єзоэффектом та їх особливості, а саме, силова і компенсована конструкції. Методом «наскрізної» задачі визначені звукові поля кругових циліндричних п'єзокерамічних випромінювачів з подовжнім і поперечним п'єзоэффектів.*

*На основі наближень Кірхгофа - Лява і рівнянь вимушених коливань оболонки отримано аналітичні співвідношення для опису та обчислення механічних, акустичних та електричних характеристик таких випромінювачів за технічної реалізації їх у вигляді силових і компенсованих конструкцій з подовжнім і поперечним п'єзоэффектом, а також зв'язків між цими характеристиками. Бібл. 4, рис. 2.*

**Ключові слова:** звукові поля, циліндричний п'єзокерамічний перетворювач, подовжній і поперечний п'єзоэффект, силова і компенсована конструкція.

---

UDC 534.3

**A.G. Leiko** Dr.Sc., **A.I. Nyzhnyk**, **Y.I. Starovoyt**

State Enterprise Kiyv Scientific Research Institute of Hydrodevices,  
st. Surikova, 3, Kiev, 03035, Ukraine.

## **Sound fields of piezoceramic emitters with different piezoelectric effect**

*The basic design schemes of construction of cylindrical transducers with longitudinal and transverse piezoelectric effect, and their features, namely, power and compensated design. The sound field of circular cylindrical piezoceramic emitters with longitudinal and transverse piezoelectric effect was defined by Using the "pass-through" task method.*

*Based on the approximation of Kirchhoff-Love equations and forced vibrations of a shell, analytical relations for the description and calculation of mechanical, acoustical and electrical characteristics of the emitters in the technical implementation of them in the form of power and compensated designs with longitudinal and transverse piezoelectric effect, and the links between these characteristics was defined. Reference 4, figures 2.*

**Keywords:** *sound fields, cylindrical piezoelectric transducer, the longitudinal and transverse piezoelectric effect, power and compensated design.*

### **References**

1. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. (1989), "Mechanics related fields in structural elements. Vol.5. Electroelasticity". Kiev, Naukova dumka. P. 280. (Rus)*
2. *Didkovskij V.S., Lejko O.G., Savin V.G. (2006), "Electroacoustic piezoceramic transducers (calculation, design, construction). Education manual". Kirovograd, "Imex-LTD". P.448 (Ukr)*
3. *Didkovskij V. S., Poroshin S. M., Lejko O. G., Lejko A. O., Drozdenko O.I. (2013) "Construction of electroacoustic instruments and systems for multimedia acoustic technology". Kharkov. P. 390. (Ukr)*
4. *Savin V.G., Didusenko Y.A. (2011), "The equations of motion of thin-walled cylindrical piezoelectric transducers with a circumferential polarization". Consonance-2011, Acoustic Symposium. pp. 230-235. (Rus)*