

УДК 517.9:534.1:620.178.3

К.А. Трапезон¹, канд. техн. наук, **А.Г. Трапезон²**, д.-р. техн. наук

¹Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”, пр. Победы 37, Киев-56, 03056, Украина.

²Институт проблем прочности НАН Украины, ул. Тимирязевская 2, Киев-014, 01014, Украина.

Вариант метода симметрий при исследовании колебаний круговой пластинки линейно-переменной толщины

Решена задача о собственных осесимметричных колебаниях круговой пластинки линейно-переменной толщины методом симметрий в новом варианте его реализации. Получены уравнения частот и форм собственных колебаний для кольцевой осесимметричной пластинки с жестким закреплением ее по внутреннему контуру. Определены первые три частоты и построены соответствующие им собственные формы колебаний пластинки. Продемонстрирована гибкость метода симметрий для решения задач теории колебаний для пластинок переменной толщины на примере нового варианта его реализации. Проиллюстрирована эффективность принятого подхода сравнением известных результатов с полученными в настоящей работе. Показано, в частности, что эти результаты обладают более высокой точностью и более достоверны по сравнению с известными. Библ. 10, рис. 3, табл. 2.

Ключевые слова: колебания; пластинка; функции Бесселя; метод симметрий; дифференциальное уравнение; факторизация; собственные частоты; формы колебаний; аппроксимация.

Введение

Важное значение задач о колебаниях пластинок как конструктивных элементов в устройствах различного назначения (виброизоляторы, пластинчатые гасители колебаний, роторные турбины, гидромашинные установки, днища резервуаров, сильфоны, датчики давления), их актуальность и практическая востребованность в различных отраслях промышленности отмечается во многих литературных источниках [1-5]. В частности, в авиационной технике многие тонкостенные конструктивные элементы выполнены в виде пластинчатых деталей переменной толщины [6]. Ранее в работе [7], посвященной задаче о колебаниях круговой пластинки линейно-переменной толщины, изложены сущность

проблемы, краткий обзор способов ее решения и сформулирована цель работы, состоящая в реализации метода симметрий [8] применительно к данной задаче.

Цель работы

На примере нового варианта решения задачи, рассмотренной в работе [7] показать гибкость и многовариантность метода симметрий при решении прикладных задач теории колебаний для пластинок переменной толщины. Эффективность подхода иллюстрируется сравнением результатов работ [4,7] с полученными в статье.

Исходное уравнение и его преобразование

Дифференциальное уравнение форм собственных осесимметричных колебаний круговой пластинки линейно-переменной толщины, изменяющейся по закону $h = H_0(1 - \rho)$, где H_0 – постоянный коэффициент; $\rho = r/R$ – относительный переменный радиус (r – переменный радиус; R – постоянный радиус), приведено в [4] и может быть записано в виде

$$\left[(1 - \rho) \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - 3 \right) \frac{d}{d\rho} \right] \times \left[(1 - \rho) \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - 3 \right) \frac{dW}{d\rho} \right] - \lambda^4 W = 0, \quad (1)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega R^2}{H_0} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2)\gamma}{gE}} \quad (2)$$

$W = W(\rho)$ – перемещение; ν, E, γ – соответственно коэффициент Пуассона, модуль упругости, удельный вес материала пластинки; g – ускорение силы тяжести. Здесь и в дальнейшем коэффициент Пуассона принят равным 1/3, что справедливо для большинства конструкционных металлических материалов. Очевидно, что

уравнение IV порядка записанное в форме (1) позволяет согласно методу факторизации заменить его двумя уравнениями II порядка

$$(1-\rho)W'' + \left(\frac{1}{\rho} - 3\right)W' \pm \lambda^2 W = 0 \quad (3)$$

и тогда искомое общее решение уравнения (1) будет найдено как сумма общих решений этих двух уравнений $W = W_1 + W_2$, где W_1 – решение уравнения (3) при знаке “плюс” при λ^2 , а W_2 – при знаке “минус”.

Получить замкнутые решения этих уравнений затруднительно и, по-видимому, невозможно, однако метод симметрий, разработанный для уравнений II порядка [8] позволяет решить задачу с точностью, достаточной для технических приложений.

Схема применения метода симметрий для разрешающих уравнений

Уравнения (3) путем замены переменной $\rho = 1 - (1-x)^2$ преобразуем к виду

$$W_{xx} + \frac{F_x}{F} W_x + k^2 W = 0, \quad (4)$$

где $W_x = \frac{dW}{dx}$; $W_{xx} = \frac{d^2W}{dx^2}$; $k^2 = \pm 4\lambda^2$;

$$x = 1 - \sqrt{1-\rho}; F = F_0 [(1-x)^3 - (1-x)^5] \quad (5)$$

Формально уравнение вида (4) аналогично уравнению форм продольных колебаний стержня переменного сечения площадью $F(x)$, решение которого можно построить методом симметрий [8].

Поскольку величина F_x/F не зависит от постоянной F_0 , то эта постоянная является произвольной. Естественным границам переменной $\rho = 0 \div 1$ уравнений (3) будут соответствовать границы переменной $x = 0 \div 1$ уравнения (4) при любых $\rho \geq 0$ и $x \geq 0$, не выходящих за отмеченные пределы.

Таким образом, основная часть решения задачи сводится к построению решений системы дифференциальных уравнений типа (4), записанной для удобства в виде

$$W_{xx} + 2\frac{D_x}{D} W_x \pm k^2 W = 0, \quad (6)$$

где k^2 , переменная $x(\rho)$ и

$$D = \sqrt{F} = D_0 \sqrt{(1-x)^3 - (1-x)^5} \quad (7)$$

соответствуют выражениям (5). Для построения общего решения необходимо удовлетворить полученной функцией $W = W_1 + W_2$ соответствующим граничным условиям при x_1 и x_2 .

Очевидно, что уравнения (6) при данном $D(x)$ не разрешимы в элементарных или известных табулированных функциях, однако можно найти их решения приближенным способом. Для этого надо $D(x)$ аппроксимировать функцией $D_1(x)$, при которой решения этих уравнений будут получены в замкнутом виде.

Таким образом, обеспечив точность решения уравнений (6) путем замены $D(x)$ на $D_1(x)$, проблема точности решения задачи в целом переносится на удачный выбор $D_1(x)$ с точки зрения удовлетворительного приближения ее к $D(x)$ на требуемом интервале ($x_1 \div x_2$).

Метод симметрий позволяет реализовать такой выбор, поскольку согласно этому методу выражение для $D_1(x)$ может содержать ряд неопределенных коэффициентов, подбором которых становится возможной требуемая аппроксимация.

В работе [7] для аналогичной задачи аппроксимирующая функция предложена в виде

$$D^* = D_0^* \frac{2n \sin n(x-1)}{n(x-1) - \sin n(x-1) \cos n(x-1) + C^*}, \quad (8)$$

где D_0^*, C^*, n – произвольные постоянные.

Выражение (8) на принятом в задаче интервале $\rho = 0,1 \div 0,5$ ($x = 0,0513 \div 0,2929$) удовлетворительно соответствует (7) при $D_0 = 1$ (рис.1), если принять $D_0^* = -0,164877$;

$$C^* = 4,4375; n = 2,849.$$

Было показано, что решение задачи о собственных колебаниях пластинки толщиной $h = H_0(1-\rho)$ жестко закрепленной при $\rho_1 = 0,1$ и свободной при $\rho_2 = 0,5$, полученное на основе аппроксимирующей функции (8) является более точным по сравнению с решением, непосредственно полученным в гипергеометрических функциях [4], т.е. по существу полученным методом рядов. Ниже приводится решение этой задачи на основе аппроксимирующей функции, отличной от (8).

Вариант общего решения в функциях Бесселя

По-прежнему, рассматриваем случай пластинки, жестко заделанной при $\rho_1 = 0,1$ и свободной при $\rho_2 = 0,5$. При переменной x эти

границы соответствуют $x_1 = 0,0513$ и $x_2 = 0,2929$.

Аппроксимирующая функция $D_1(x)$, при которой уравнения (5) имеют точные решения, получена методом симметрий в виде

$$D_1 = D_{01}\sqrt{x}[J_0(mx) - \chi Y_0(mx)] = D_{01}\sqrt{x}Z_0(mx). \quad (9)$$

Эта функция при надлежаще выбранных постоянных D_{01}, m, χ на заданном интервале $x = x_1 \div x_2$ должна с максимально возможным приближением соответствовать (7). На рисунке 1 приведены графики изменения $D(x)$ и $D_1(x)$ построенные согласно (7) и (9) при $D_0 = 1$; $D_{01} = 1,0173$; $m = 3,35$; $\chi = 0,2322$.

Как видно, на интервале $x = 0,0513 \div 0,2929$ совпадение D и D_1 вполне удовлетворительное.

В табл. 1 приведены также результаты вычисления D, D_1 при различных значениях, из которых заключаем, что количественное несоответствие D и D_1 на данном интервале в среднем не превышает абсолютных значений величины $\delta_{cp} = 0,41\%$.

Таблица 1. Значение функций $D(x)$ и $D_1(x)$ на интервале $x = 0.0513 \div 0.2929$

x	0,0513	0,1	0,15	0,2	0,2254	0,25	0,26	0,27	0,2929
D	0,29216	0,37217	0,41282	0,42933	0,43116	0,42962	0,42816	0,42627	0,42045
D_1	0,29193	0,36733	0,40985	0,42901	0,43134	0,4293	0,42733	0,42472	0,41642
$\delta = \left(\frac{D}{D_1} - 1\right) \times 100\%$	0,081	1,316	0,7249	0,07254	-0,04	0,0727	0,19449	0,365	0,966

Уравнение (6) при выбранной функции $D_1(x)$ запишутся в виде

$$W_{1,2}'' + 2 \frac{[\sqrt{x}Z_0(mx)]'}{\sqrt{x}Z_0(mx)} W_{1,2}' + k_{1,2}^2 W_{1,2} = 0, \quad (10)$$

где $Z_0(mx) = J_0(mx) - \chi Y_0(mx)$; $m = 3,35$;

$$\chi = 0,2322, \quad k_1^2 = 4\lambda^2; \quad k_2^2 = -4\lambda^2.$$

Их точные решения, полученные на основе метода симметрий, будут

$$W_1 = \frac{AJ_0(\alpha x) + BY_0(\alpha x)}{Z_0(mx)}; \quad W_2 = \frac{A_1 I_0(\beta x) + B_1 K_0(\beta x)}{Z_0(mx)}, \quad (11)$$

$$\text{где } \alpha^2 = 4\lambda^2 + m^2; \quad \beta^2 = 4\lambda^2 - m^2.$$

Общее решение уравнения (1) $W = W_1 + W_2$, следовательно, принимает вид

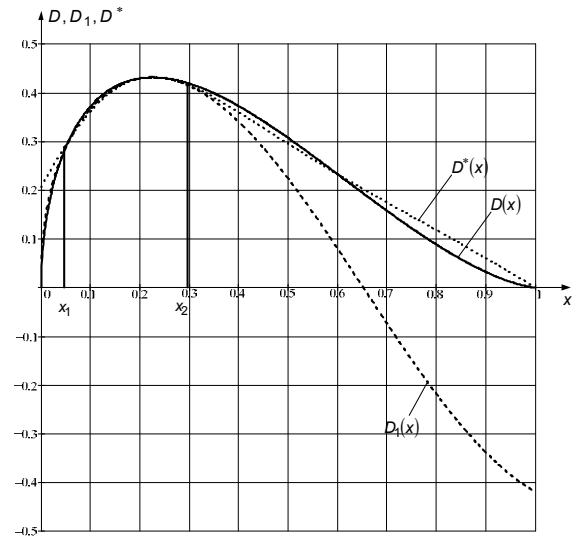


Рис. 1. Графическое изображение функций $D(x), D_1(x), D^*(x)$

$$W = \frac{1}{Z_0(mx)} \times \quad (12)$$

$$\times [AJ_0(\alpha x) + BY_0(\alpha x) + A_1 I_0(\beta x) + B_1 K_0(\beta x)]$$

где A, B, A_1, B_1 – постоянные, значения которых зависят от граничных условий.

Вывод граничных условий и их преобразование

Граничные условия задачи устанавливаются, исходя из того, что при жесткой заделке прогибы и углы поворота элементов пластинки должны быть равны нулю, т.е.

$$(W)_{\rho=\rho_1} = 0; \quad (W_{\rho})_{\rho=\rho_1} = 0, \quad (13)$$

а на свободном крае при осесимметричном деформировании равны нулю радиальные изгибающие моменты и перерезывающие силы [9], т.е.

$$\left(W_{\rho\rho} + \frac{\nu}{\rho} W_{\rho} \right)_{\rho=\rho_2} = 0;$$

$$\left(W_{\rho\rho\rho} + \frac{1}{\rho} W_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho^2} W_{\rho} \right)_{\rho=\rho_2} = 0. \quad (14)$$

При переходе к переменной $x(\rho)$ условия (13) и (14) следует преобразовать, исходя из выражений $x = 1 - \sqrt{1 - \rho}$ и

$\rho = 1 - (x - 1)^2 = 1 - (1 - x)^2$. Используем следующие дифференциальные зависимости:

$$W_{\rho} = x_{\rho} W_x; \quad W_{\rho\rho} = x_{\rho}^2 W_{xx} + x_{\rho\rho} W_x;$$

$$W_{\rho\rho\rho} = x_{\rho}^3 W_{xxx} + 3x_{\rho} x_{\rho\rho} W_{xx} + x_{\rho\rho\rho} W_x;$$

где

$$x = 1 - \sqrt{1 - \rho}; \quad x_{\rho} = \frac{1}{2(1-x)}; \quad x_{\rho}^2 = \frac{1}{4(1-x)^2};$$

$$x_{\rho\rho} = \frac{1}{4(1-x)^3}; \quad x_{\rho\rho\rho} = \frac{3}{8(1-x)^5};$$

$$x_{\rho}^3 = \frac{1}{8(1-x)^3}; \quad 3x_{\rho} x_{\rho\rho} = \frac{3}{8(1-x)^4};$$

т.е.

$$\left. \begin{aligned} W_{\rho} &= \frac{W_x}{2(1-x)}; W_{\rho\rho} = \frac{1}{4(1-x)^2} \left(W_{xx} + \frac{W_x}{1-x} \right); \\ W_{\rho\rho\rho} &= \frac{1}{8(1-x)^3} \left[W_{xxx} + \frac{3}{1-x} W_{xx} + \frac{3}{(1-x)^2} W_x \right] \end{aligned} \right\} (15)$$

После внесения (15) в условия (13) и (14) они при $\nu = 1/3$ принимают вид

$$(W)_{x=x_1} = 0; \quad (W_x)_{x=x_1} = 0; \quad (16)$$

$$\left(W_{xx} + \frac{3-t^2}{3(t-t^3)} W_x \right)_{x=x_2} = 0;$$

$$\left[W_{xxx} + \frac{3+2t-3t^2}{t-t^3} W_{xx} + \frac{3-4t^2-3t^4}{t^2-2t^4+t^6} W_x \right]_{x=x_2} = 0,$$

где $t = 1 - x$.

Последнее условие можно упростить путем внесения в него W_{xx} из предпоследнего выражения, в результате получим

$$W_{xxx} - \frac{2}{3} \frac{3+5t^2}{(1-t^2)^2} W_x = 0.$$

Обозначим $\rho = \left[\frac{3-t^2}{3(t-t^3)} \right]_{x=x_2};$

$$q = \left[\frac{2}{3} \frac{3+5t^2}{(1-t^2)^2} \right]_{x=x_2}, \quad \text{тогда условия при } x = x_2$$

перепишутся как

$$(W_{xx} + \rho W_x)_{x=x_2} = 0; \quad W_{xxx} - q W_x = 0, \quad (17)$$

и расчет при $x_2 = 0,2929$ дает значения $\rho = 2,3568; q = 14,666$.

Условия (16) удовлетворяются, если функция (12) и ее производная $W_x = W'$ при $x = x_1 = 0,0513$ равны нулю, что приводит к первым двум алгебраическим уравнениям относительно постоянных A, B, A_1, B_1

$$\left. \begin{aligned} A J_0(\alpha x_1) + B Y_0(\alpha x_1) + A_1 I_0(\beta x_1) + B_1 K_0(\beta x_1) &= 0 \\ A J_0'(\alpha x_1) + B Y_0'(\alpha x_1) + A_1 I_0'(\beta x_1) + B_1 K_0'(\beta x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

Для удовлетворения условиям (17) при $x = x_2 = 0,2929$ необходимо образовать соответствующие производные от функции W . Для удобства исходим из записи $W = W_1 + W_2$ и уравнений

$$W_1'' + \frac{F'}{F} W_1' + k_1^2 W_1 = 0;$$

$$W_2'' + \frac{F'}{F} W_2' + k_2^2 W_2 = 0. \quad (19)$$

Из (19) непосредственно следует

$$W_{1,2}'' = - \left(\frac{F'}{F} W_{1,2}' + k_{1,2}^2 W_{1,2} \right). \quad (20)$$

После дифференцирования этого выражения и внесения (20) в результат получим

$$(W_{1,2}''')' = - \left\{ \frac{F'}{F} W_{1,2}'' + \left[\left(\frac{F'}{F} \right)' + k_{1,2}^2 \right] W_{1,2}' \right\} = \quad (21)$$

$$= W_{1,2}' \left[\frac{F'^2}{F^2} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - k_{1,2}^2 \right] + \frac{F'}{F} k_{1,2}^2 W_{1,2}$$

отсюда для условий при $x = x_2$ имеем

$$W'' + \rho W' = \left(\rho - \frac{F'}{F} \right) (W_1' + W_2') - (k_1^2 W_1 + k_2^2 W_2) = 0;$$

$$(W'')' - qW' = \left(\frac{F'^2}{F^2} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - q \right) \cdot (W_1' + W_2') - \\ - (k_1^2 W_1' + k_2^2 W_2') + \frac{F'}{F} (k_1^2 W_1 + k_2^2 W_2) = 0.$$

Второе из этих выражений можно упростить, если внести в него $k_1^2 W_1 + k_2^2 W_2$ из первого, в результате получим

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(\rho - \frac{F'}{F} \right) W_1' - k_1^2 W_1 + \left(\rho - \frac{F'}{F} \right) W_2' - k_2^2 W_2 \right]_{x=x_2} = 0; \\ & \left[\left[\rho \frac{F'}{F} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - q - k_1^2 \right] W_1' + \left[\rho \frac{F'}{F} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - q - k_2^2 \right] W_2' \right]_{x=x_2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

позволяют при выкладках ограничиться только первыми производными W_1', W_2' , что технически существенно упрощает последующие вычисления.

Вычислим требуемые величины при $x = x_2 = 0,2929$; $m = 3,35$; $\chi = 0,2322$; $\rho = 2,3568$; $q = 14,666$, с учетом

$$F = xZ_0'^2(mx) = x[J_0(mx) - \chi Y_0(mx)]^2,$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{x} + 2 \frac{Z_0'}{Z_0}; \quad \left(\frac{F'}{F} \right)' = -\frac{1}{x^2} + 2 \frac{Z_0''}{Z_0} - 2 \frac{Z_0'^2}{Z_0^2};$$

$$Z_0 = J_0 - \chi Y_0; \quad Z_0' = -m(J_1 - \chi Y_1);$$

$$Z_0'' = -m^2 \left[J_0 - \chi Y_0 - \frac{1}{mx} (J_1 - \chi Y_1) \right].$$

В результате находим $\rho - \frac{F'}{F} = 4,42012$;

$$(W'')' - qW' = \left[\rho \frac{F'}{F} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - q - k_1^2 \right] W_1' + \\ + \left[\rho \frac{F'}{F} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - q - k_2^2 \right] W_2' = 0.$$

Таким образом, граничные условия в виде

$$\rho \frac{F'}{F} - \left(\frac{F'}{F} \right)' - q = 10,87929. \text{ После внесения этих}$$

значений в (22) получим

$$\left. \begin{aligned} & (b^* W_1' - k_1^2 W_1) + (b^* W_2' - k_2^2 W_2) = 0; \\ & (a^* - k_1^2) W_1' + (a^* - k_2^2) W_2' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $a^* = 10,87929$; $b^* = 4,42012$.

Подстановка в (23) решений (11) и их производных

$$W_1' = \frac{1}{Z_0} \left[A J_0' + B Y_0' - \frac{Z_0'}{Z_0} (A J_0 + B Y_0) \right];$$

$$W_2' = \frac{1}{Z_0} \left[A_1 I_0' + B_1 K_0' - \frac{Z_0'}{Z_0} (A_1 I_0 + B_1 K_0) \right];$$

приводит к уравнениям

$$A \left[b^* J_0' - \left(b^* \frac{Z_0'}{Z_0} + k_1^2 \right) J_0 \right] + B \left[b^* Y_0' - \left(b^* \frac{Z_0'}{Z_0} - k_1^2 \right) Y_0 \right] + \\ + A_1 \left[b^* I_0' - \left(b^* \frac{Z_0'}{Z_0} + k_2^2 \right) I_0 \right] + B_1 \left[b^* K_0' - \left(b^* \frac{Z_0'}{Z_0} + k_2^2 \right) K_0 \right] = 0;$$

$$A (a^* - k_1^2) \left(J_0' - \frac{Z_0'}{Z_0} J_0 \right) + B (a^* - k_1^2) \left(Y_0' - \frac{Z_0'}{Z_0} Y_0 \right) + \\ + A_1 (a^* - k_2^2) \left(I_0' - \frac{Z_0'}{Z_0} I_0 \right) + B_1 (a^* - k_2^2) \left(K_0' - \frac{Z_0'}{Z_0} K_0 \right) = 0.$$

Здесь и далее $Z_0 = Z_0(mx)$; $[J_0, Y_0] = [J_0(ax), Y_0(ax)]$; $[I_0, K_0] = [I_0(\beta x), K_0(\beta x)]$. С учетом формул (8) $J_0'(ax) = -\alpha J_1(ax)$; $Y_0'(ax) = -\alpha Y_1(ax)$; $I_0'(\beta x) = \beta I_1(\beta x)$; $K_0'(\beta x) = -\beta K_1(\beta x)$ [10] эти уравнения при $x = x_2$ запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned}
 & A \left[-\alpha J_1(\alpha x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_1^2}{b^*} \right) J_0(\alpha x_2) \right] + B \left[-\alpha \cdot Y_1(\alpha x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_1^2}{b^*} \right) Y_0(\alpha x_2) \right] + \\
 & + A_1 \left[\beta I_1(\beta x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_2^2}{b^*} \right) I_0(\beta x_2) \right] + B_1 \left[-\beta K_1(\beta x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_2^2}{b^*} \right) K_0(\beta x_2) \right] = 0; \\
 & A(a^* - k_1^2) \left[-\alpha J_1(\alpha x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} J_0(\alpha x_2) \right] + B(a^* - k_1^2) \left[-\alpha Y_1(\alpha x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} Y_0(\alpha x_2) \right] + \\
 & + A_1(a^* - k_2^2) \left[\beta I_1(\beta x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} I_0(\beta x_2) \right] + B_1(a^* - k_2^2) \left[-\beta K_1(\beta x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} K_0(\beta x_2) \right] = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где $\frac{Z_0'}{Z_0} = -m \frac{J_1(mx_2) - \chi Y_1(mx_2)}{J_0(mx_2) - \chi Y_0(mx_2)} = -2,73872;$

$k_1^2 = \alpha^2 - m^2 = \beta^2 + m^2;$

$k_2^2 = -(\beta^2 + m^2) = -(\alpha^2 - m^2)$, т.е. $k_2^2 = -k_1^2$ по определению.

Вывод частотного уравнения, результаты решения задачи и их обсуждение

Выражения (18) и (24) образуют систему однородных уравнений относительно постоянных A, B, A_1, B_1 определитель которой Δ должен быть равен нулю. Равенство $\Delta = 0$ представляет собой частотное уравнение задачи, из которого вычисляются параметры α_i или $\beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 - 2m^2}$, связанные с частотой через формулу (2), где

$$\lambda_i^2 = \frac{1}{4}(\alpha_i^2 - m^2) = \frac{1}{4}(\beta_i^2 + m^2).$$

Уравнение частот, следовательно, будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix}
 a & b & c & d \\
 a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & d_3
 \end{vmatrix} = 0, \quad (25)$$

где $a = J_0(\alpha x_1); \quad b = Y_0(\alpha x_1); \quad c = I_0(\beta x_1);$

$d = K_0(\beta x_1); \quad a_1 = -\alpha J_1(\alpha x_1); \quad b_1 = -\alpha Y_1(\alpha x_1);$

$c_1 = \beta I_1(\beta x_1); \quad d_1 = -\beta K_1(\beta x_1);$

$a_2 = -\alpha J_1(\alpha x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_1^2}{b^*} \right) J_0(\alpha x_2);$

$b_2 = -\alpha Y_1(\alpha x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_1^2}{b^*} \right) Y_0(\alpha x_2);$

$c_2 = \beta I_1(\beta x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_2^2}{b^*} \right) I_0(\beta x_2);$

$d_2 = -\beta K_1(\beta x_2) - \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{k_2^2}{b^*} \right) K_0(\beta x_2);$

$a_3 = (a^* - k_1^2) \left[-\alpha J_1(\alpha x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} J_0(\alpha x_2) \right];$

$b_3 = (a^* - k_1^2) \left[-\alpha Y_1(\alpha x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} Y_0(\alpha x_2) \right];$

$c_3 = (a^* - k_2^2) \left[\beta I_1(\beta x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} I_0(\beta x_2) \right];$

$d_3 = (a^* - k_2^2) \left[-\beta K_1(\beta x_2) - \frac{Z_0'}{Z_0} K_0(\beta x_2) \right].$

Путем соответствующих преобразований системы четырех уравнений (18) и (24) ее можно заменить системой двух однородных уравнений относительно двух неизвестных постоянных, например, A_1 и B_1 . В таком случае вместо частотного уравнения (25) в форме определителя четвертого порядка легко получить эквивалентное частотное уравнение, приравняв нулю определитель следующей системы

$$A_1 L_1 + B_1 L_2 = 0; \quad A_1 L_3 + B_1 L_4 = 0.$$

В результате получим уравнение частот в форме

$$L_1 L_4 - L_2 L_3 = 0, \quad (26)$$

где $L_1 = \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{ca_2 - c_2 a}{ba_2 - b_2 a};$

$L_2 = \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{da_2 - d_2 a}{ba_2 - b_2 a};$

$L_3 = \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{ca_3 - c_3 a}{ba_3 - b_3 a};$

$$L_4 = \frac{da_1 - d_1a}{ba_1 - b_1a} - \frac{da_3 - d_3a}{ba_3 - b_3a}.$$

После вычисления корней уравнения (26)

необходимо также найти отношения амплитудных коэффициентов по равносильным формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= -\frac{L_2}{L_1} = -\frac{L_4}{L_3}; \\ \frac{B}{B_1} &= -\left(\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{ca_1 - c_1a}{ba_1 - b_1a} + \frac{da_1 - d_1a}{ba_1 - b_1a} \right) = -\left(\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{ca_2 - c_2a}{ba_2 - b_2a} + \frac{da_2 - d_2a}{ba_2 - b_2a} \right) = \\ &= -\left(\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{ca_3 - c_3a}{ba_3 - b_3a} + \frac{da_3 - d_3a}{ba_3 - b_3a} \right); \\ \frac{A}{B_1} &= -\left(\frac{B}{B_1} \frac{b}{a} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c}{a} + \frac{d}{a} \right) = -\left(\frac{B}{B_1} \frac{b_1}{a_1} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c_1}{a_1} + \frac{d_1}{a_1} \right) = -\left(\frac{B}{B_1} \frac{b_2}{a_2} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c_2}{a_2} + \frac{d_2}{a_2} \right) = \\ &= -\left(\frac{B}{B_1} \frac{b_3}{a_3} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c_3}{a_3} + \frac{d_3}{a_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Корни уравнения (26) найдем посредством последовательного вычисления величин $\Delta_j = L_1L_4 - L_2L_3$ при произвольно выбираемых α_j , добиваясь, чтобы $\Delta_j = 0$. В результате определены следующие три корня:

$$\alpha_1 = 9,261361; \quad \alpha_2 = 20,156239;$$

$$\alpha_3 = 32,9172098,$$

Чему соответствуют согласно зависимости

$$\lambda_j = \frac{\sqrt{\alpha_j^2 - m^2}}{2} \quad \text{частотные параметры } \lambda_j \text{ при заданном значении } m = 3,35: \quad \lambda_1 = 4,317126; \quad \lambda_2 = 9,93795; \quad \lambda_3 = 16,37315. \quad (28)$$

С помощью коэффициентов определителя (25), вычисляемых при найденных корнях α_j и

$\beta_j = \sqrt{\alpha_j^2 - 2m^2}$, легко вычисляются амплитудные коэффициенты (27) и строятся формы собственных колебаний пластинки.

Например, при $\alpha_1 = 9,261361$ и $\beta_1 = 7,95788$ имеем

$$a = 0,94436; \quad b = -0,48195; \quad c = 1,0421;$$

$$d = 1,09675; \quad a_1 = -2,13858; \quad b_1 = 14,23232;$$

$$c_1 = 1,65843; \quad d_1 = -16,96025; \quad a_2 = -1,96275;$$

$$b_2 = -8,61663; \quad c_2 = 73,93327; \quad d_2 = 0,76829;$$

$$a_3 = 283,91783; \quad b_3 = 57,22747; \quad c_3 = 2,14434 \cdot 10^3;$$

$$d_3 = -61,8896,$$

откуда согласно (27) для первой формы колебаний получим

$$\frac{A_1}{B_1} = 0,095498; \quad \frac{B}{B_1} = 1,072439;$$

$$\frac{A}{B_1} = -0,719443.$$

Не выписывая значений коэффициентов a, b, c, \dots , вычисленных при α_2 и α_3 , приведем сразу величины амплитудных коэффициентов, необходимых для построения второй и третьей форм колебаний, т.е. соответственно для $\alpha_2 = 20,156239$

$$\frac{A_1}{B_1} = -2,55719 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{B}{B_1} = 0,404602;$$

$$\frac{A}{B_1} = -0,61465,$$

для $\alpha_3 = 32,9172098$

$$\frac{A_1}{B_1} = 3,391973 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{B}{B_1} = -0,031536;$$

$$\frac{A}{B_1} = -0,389545.$$

Для построения форм колебаний используем функцию прогибов (12) выраженную через переменную ρ согласно зависимости $x = 1 - \sqrt{1 - \rho}$ и записанную в виде

$$W_i = \frac{B_1}{Z_0(mx)} \times \left[\frac{A}{B_1} J_0(\alpha_i x) + \frac{B}{B_1} Y_0(\alpha_i x) + \frac{A_1}{B_1} I_0(\beta_i x) + K_0(\beta_i x) \right]$$

где при известных $\frac{A}{B_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{A_1}{B_1}$ параметр B_1 является свободно выбираемой величиной, используемой в данном случае для нормировки W_i таким образом, чтобы $W_i(\rho = 0,5) = 1$.

На рис. 2 представлены первые три формы собственных колебаний пластинки. Величины нормирующих коэффициентов B_1 для форм W_1, W_2, W_3 равны 0,796202; -2,275333; 5,365396.

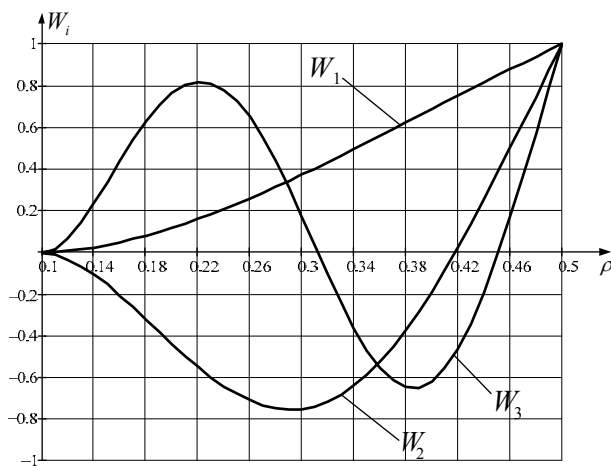


Рис. 2. Графическое изображение форм собственных колебаний пластинки

Принципиальное значение имеет сравнение представленных результатов с теми, что получены на основе аппроксимирующей функции (8). С этой целью в таблице 2 приведены частотные параметры λ_i , координаты ρ_{0i} узлов окружностей, т.е. тех значений ρ , при которых $W_i = 0$; координаты ρ_{mi} пучностей, т.е. максимальных по абсолютной величине прогибов W_{max} и значения этих прогибов $W_i(\rho_{mi})$.

Из табл. 2 следует, что частотные коэффициенты λ_i , вычисленные в настоящей работе, несущественно ниже соответственно на (0,5; 0,016; 0,016)% тех, что получены ранее [7]. Остальные характерные параметры, как следует из таблицы 2, неизменны или практически совпадают. На рисунке 3 представлен увеличенный фрагмент рисунка 1, из которого с уверенностью можно судить о степени приближения функций $D_1(x)$ и $D^*(x)$ к основной (эталонной) функции $D(x)$ на заданном интервале.

Видно, что лучшим приближением является $D_1(x)$ и, следовательно, те результаты, что приведены в первой строке таблицы 2 даже в случае их существенного отличия от альтернативных, следует полагать более точными. Это касается, в частности и в первую очередь, значений λ_1 (для основной частоты). В связи с этим уместно заметить, что в работе [4] получено точное по мнению автора значение $\lambda_1 = 4,3859$, однако в работе [7] при помощи соответствующей методики было показано, что число $\lambda_1 = 4,3406$ (см. табл.2) является лучшим приближением к некоторому действительно точному значению, а если так, то $\lambda_1 = 4,317126$ (см. табл.2) следует полагать наиболее точным среди всех полученных.

Таблица 2. Параметры колебаний, полученные по двум вариантам решения задачи

Аппроксимирующая функция, № формулы по тексту	Частотные параметры λ_i			Координаты узлов ρ_{0i}			Координаты пучностей ρ_{mi}			Прогибы при ρ_{mi} . $W_i(\rho_{mi})$		
	λ_1	λ_2	λ_3	ρ_{01}	ρ_{02}	ρ_{03}	ρ_{m1}	ρ_{m2}	ρ_{m3}	$W_1(\rho_{m1})$	$W_2(\rho_{m2})$	$W_3(\rho_{m3})$
$D_1(x)$, (9)	4,31712	9,93795	16,3731	0,1	0,1 0,497	0,1 0,312 0,451	0,5	0,292 0,5	0,222 0,3856 0,5	1	0,75 1	0,823 0,649 1
$D^*(x)$, (8)	4,3406	9,9364	16,3758	0,1	0,1 0,417	0,1 0,31302 0,4508	0,5	0,291 0,5	0,222 0,3853 0,5	1	0,74 1	0,827 0,645 1

При этом его значение по сравнению с $\lambda_1 = 4,3859$, вычисленным при решении задачи методом рядов, ниже на 0,96%. Практическое значение подобного расхождения, строго говоря, несущественно, однако в отдельных случаях, когда требуется не только знание резонанс-

ных частот, но и достоверная оценка напряженно-деформированного состояния колеблющейся пластинки, связанная с вычислением окружных и радиальных напряжений, как это сделано в [7], несомненно необходимо использовать наиболее достоверные параметры колебаний,

полученные в настоящей статье методом симметрий на основе функции $D_1(x)$.

Эта рекомендация имеет смысл еще и потому, что гипотетическая попытка воспользоваться результатами “точного” решения мето-

дом рядов [4] представляется нецелесообразной ввиду, во-первых, пониженной достоверности этих результатов, отмеченной выше, и во-вторых, из-за отсутствия в работе [4] данных для высших частот и форм колебаний.

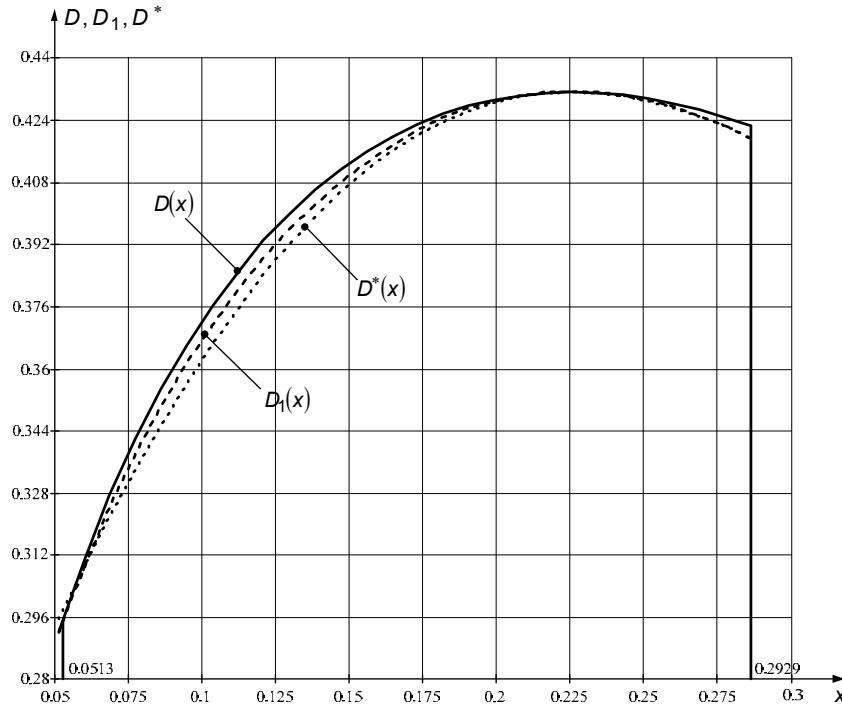


Рис. 3. Графическое изображение сравнения функций D, D_1, D^* на заданном интервале $x = x_1 \div x_2$

Научная новизна представленных в работе результатов заключается в реализованном приближении нового варианта применения метода симметрий для решения задачи о колебаниях осесимметричной пластинки линейно-переменной толщины $h = H_0(1 - \rho)$, убывающей от центра к краю. Практическое значение теоретических результатов состоит в возможности непосредственного использования расчетных моделей, полученных в работе, в частности, для рационального проектирования резонансных звуковых и ультразвуковых систем на основе пластинок как акустически активных элементов. Алгоритм решения проблемы в случае исходных параметров пластинки, отличных от принятых в расчетном примере, остается неизменным, однако может потребоваться видоизменение аппроксимирующей функции, что согласно методу симметрий, гибкость и многовариантность которого подтверждена в работе, не представляет принципиальных затруднений.

Выводы

1. Приведено решение задачи о собственных осесимметричных колебаниях круговой пластинки дискового типа методом симметрий в новом варианте его реализации.
2. Получены уравнения частот и форм собственных колебаний для кольцевой пластинки с жестким закреплением внутреннего контура.
3. Рассчитаны первые три частоты и построены соответствующие им собственные формы колебаний.
4. Подтверждена эффективность решения задачи методом симметрий, разработанного ранее для линейных уравнений второго порядка.
5. Сформулирована расчетная модель для рационального проектирования пластинок как акустически активных элементов звуковых и ультразвуковых систем.
6. Показана гибкость метода симметрий при решении задач теории колебаний пластинок переменной толщины на примере нового варианта его реализации.

7. Проілюстрована ефективність пропонуваного підходу порівнянням відомих результатів з отриманими в роботі. Знайдено, зокрема те, що ці результати мають більш високу точність і більш надійні порівняно з відовими.

Список использованных источников

1. Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика, т. II. — М.: ГИТТЛ, 1952. — 638 с.
2. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие. — К.: Наукова думка, 1964. — 288 с.
3. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1970. — 412 с.
4. Коваленко А.Д. Круглые пластинки переменной толщины. — М.: Физматгиз, 1959. — 294 с.
5. Гордон В.А., Брусова В.А. Осесимметричные деформации круглой пластинки переменной толщины с центральным жестким включением // Известия тульского государственного университета. Технические науки. — 2008. — № 1. — С. 127—136.
6. Старожилова О.В. Исследование напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций // Вестник УГАТУ. — 2013. — Т. 17. — № 4. — С. 38—43.
7. Трапезон К.А. Метод симметрий при колебаниях круговых пластинок переменной толщины // Электроника и связь. — 2012. — № 6. — С. 66—76.
8. Трапезон К.А. Обобщенный метод симметрий при изучении колебаний упругих элементов // Электроника и связь. — 2012. — № 2. — С. 31—34.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963. — 636 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Поступила в редакцию 23 января 2015 г.

УДК 517.9:534.1:620.178.3

К.О. Трапезон¹, канд. техн. наук, О.Г. Трапезон², д.-р. техн. наук

¹Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги 37, Київ-56, 03056, Україна.

²Інститут проблем міцності НАН України, вул. Тимірязєвська 2, Київ-014, 01014, Україна.

Вариант метода симметрии при дослідженні коливань кругової пластинки з лінійно-змінною товщиною

Розв'язана задача про власні вісесиметричні коливання кругової пластинки з лінійно-змінною товщиною через метод симетрій у новому варіанті його реалізації. Отримано рівняння частот та форм власних коливань для кільцевої вісесиметричної пластинки з жорстким закріпленням за внутрішнім контуром. Визначено перші три частоти та побудовано відповідні їм власні форми коливань пластинки. Показана гнучкість методу симетрій при розв'язанні задач теорії коливань для пластинок змінної товщини на прикладі нового варіанту його реалізації. Проілюстрована ефективність запропонованого підходу через порівняння відомих результатів та отриманих у роботі. Показано, зокрема, що ці результати є більш точними та достовірними у порівнянні з відовими. Бібл. 10, рис. 3, табл. 2.

Ключові слова: коливання; пластинка; функції Бесселя; метод симетрій; диференціальне рівняння; факторизація; власні частоти; форми коливань; апроксимація.

UDC 517.9:534.1:620.178.3

K.A. Trapezon¹, Ph.D., **A.G. Trapezon**², Dr.Sc.

¹National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
Peremogy Avenue, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine.

² Institute for Problems of Strength of the National Ac. Sci. of Ukraine,
Timiryazevskaya str., Kiev, 01014, Ukraine.

Variant of method of symmetries at research of vibrations of circular plate of linear-variable thickness

A task is decided about the axisymmetric natural oscillations of circular plate of linear-variable thickness by the method of symmetries in the new variant of his realization. Equalizations of frequencies and forms of natural vibrations are got for a circular axisymmetric plate with the hard fixing her on an internal contour. The first three frequencies are certain and the corresponding to them own forms of vibrations of plate are built. Flexibility of method of symmetries is shown for the decision of tasks of theory of vibrations for the plates of variable thickness on the example of new variant of his realization. Efficiency of the accepted approach is illustrated comparing of the known results to got in the real work. It is shown, in particular, that these results possess higher exactness and more reliable as compared to known. Reference 10, figures 3, tables 2.

Keywords: vibrations; plate; functions of Bessel; method of symmetries; differential equalization; factorization; natural frequencies; forms of vibrations; approximation.

References

1. Bitseno K.B., Grammel R. (1952), "Technicheskaja dinamika. Vol.2". M. GITTL, P. 638. (Rus)
2. Gontkevich V.S. (1964), "Natural vibrations of plates and hulls: manual". K. Naukova dumka, P. 288. (Rus)
3. Chronin D.V. (1970), "Teorija i raschet kolebaniy v dvigateljach letatelnych aparatov". M. Mashinostroenie, P. 412. (Rus)
4. Kovalenko A.D. (1959), "Round plates with variable thickness". M. Phizmatgiz, P. 294. (Rus)
5. Gordon V.A., Brusova V.A. (2008) "Osesimmetrichnie deformacii krugloj plastinki peremennoj toschiny s centralnim gestkim vklucheniem" *Izvestija tul'skogo gosudarsvennogo universiteta. Technicheskie nauki*, No. 1, pp. 127-136. (Rus)
6. Starogilova O.V. (2013) "Issledovanie naprjagennno-deformirovannogo sostojanija tonkostennich elementov konstruksiy" *Vestnik UGATU*, Vol. 17, No. 4, pp. 38-43. (Rus)
7. Trapezon K.A. (2012) "Method of symmetries at the vibrations of circular plates of variable thickness" *Electronics and Communications*, No. 6, pp. 66-76. (Rus)
8. Trapezon K.A. (2012) "Generalized method of symmetries at the study of vibrations of resilient elements" *Electronics and Communications*, No. 2, pp. 31-34. (Rus)
9. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. (1963), "Theory of plates and shells". M. Phizmatgiz, P. 636. (Rus)
10. Abramovitz M, Stigan I. (1979), "Spravochnik po specialnim phinktsijam". M. Nauka, P. 832. (Rus)