

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ І МЕТОДУ РІШЕННЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗНОЇ ОЦІНКИ ЕКОЛОГІЧНОГО РИЗИКУ ВІД ГРУПИ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ

**В. Ю. Зінченко**

Національна академія державного управління при Президентові України  
вул. Ежена Потье, 20, м. Київ, 03057, Україна. E-mail: [zvonok\\_60@mail.ru](mailto:zvonok_60@mail.ru)

**В. В. Фалько**

Сумський державний університет  
вул. Р.-Корсакова, 2, м. Суми, 40007, Україна. E-mail: [vera\\_falko@ukr.net](mailto:vera_falko@ukr.net)

Розроблено прогнозну стохастичну математичну модель розповсюдження приземних концентрацій від групи точкових джерел викидів. Концентрації представлені у вигляді випадкового векторного поля, яке у фіксованій точці А місцевості перетворюється на випадковий вектор корельованих величин. З використанням методу лінеаризації і моделі Берлянда отримані числові характеристики щільності розподілу цих величин. При цьому щільність розподілу приймає вигляд багатовимірного нормального закону. Екологічний ризик розглядається як ймовірність перевищення концентрацією хоча б однією забруднюючою речовиною своєї максимальної разової гранично допустимої концентрації. З використанням розробленої моделі запропоновано чисельний метод розв'язання задачі прогнозної оцінки екологічного ризику при безаварійній роботі підприємства.

**Ключові слова:** екологічний ризик, оцінка, точкові джерела

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗНОЙ ОЦЕНКИ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО РИСКА

**В. Ю. Зинченко**

Национальная академия государственного управления при Президенте Украины  
ул. Эжена Потье, 20, г. Киев, 03057, Украина. E-mail: [zvonok-60@mail.ru](mailto:zvonok-60@mail.ru)

**В. В. Фалько**

Сумский государственный университет  
ул. Р.-Корсакова, 2, г. Сумы, 40007, Украина. E-mail: [vera\\_falko@ukr.net](mailto:vera_falko@ukr.net)

Разработана прогнозная стохастическая математическая модель распространения приземных концентраций от группы точечных источников выбросов. Концентрации представлены в виде случайного векторного поля, которое в фиксированной точке А местности превращается в случайный вектор коррелированных величин. С использованием метода линеаризации и модели Берлянда получены числовые характеристики плотности распределения этих величин. При этом плотность распределения принимает вид многомерного нормального закона. Экологический риск рассматривается как вероятность превышения концентрацией хотя бы одного загрязняющего вещества своей максимальной разовой предельно допустимой концентрации. С использованием разработанной модели предложен численный метод решения задачи прогнозної оцінки екологічного ризику при безаварійній роботі підприємства.

**Ключевые слова:** экологический риск, оценка, точечные источники

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ.** У проектах будівництва (реконструкції) підприємств, будівель і споруд ставиться задача прогнозної оцінки екологічного ризику, зокрема, від діючих на цих об'єктах джерел викидів забруднюючих речовин (ЗР) в атмосферу. Прийнята в даний час методика визначає ризик здоров'ю населення [1], але не екологічний ризик перевищення діючих нормативів по допустимому забрудненню атмосфери, які забезпечують відсутність появи впливу ЗР на населення. Це робить актуальним дослідження у даному напрямку.

**МЕТОЮ РОБОТИ** є розробка прогнозної стохастичної математичної моделі розповсюдження приземних концентрацій від групи точкових джерел викидів.

**МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.** У роботах [2, 3] наведені математична модель і метод розв'язання задачі прогнозної оцінки екологічного ризику  $\alpha$  для людини від точкового джерела викидів ЗР в атмосферу за безаварійної роботи джерела викидів. Приземні концентрації  $C_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  розпо-

всюджених навколо джерела ЗР представлені у вигляді випадкового векторного поля, яке у фіксованій точці А місцевості перетворюється на випадковий вектор  $(C_1, C_2, \dots, C_m)$  (або систему випадкових величин [4]) корельованих концентрацій.

Відповідно з нормативними вимогами до допустимого забруднення атмосферного повітря екологічний ризик визначається як ймовірність перевищення хоча б однією  $k$ -ю концентрацією ЗР своєї максимальної разової концентрації ( $\Gamma ДК_{\text{мр}}$ ) для населених місць. Він виражається через багатовимірний інтеграл ймовірностей

$$\alpha = \int_{\Gamma ДК_{\text{мр}1}}^{\infty} \dots \int_{\Gamma ДК_{\text{мр}m}}^{\infty} f(C_1, C_2, \dots, C_m) dC_1 dC_2 \dots dC_m, \quad (1)$$

де  $f$  – щільність розподілу концентрацій ЗР у розглянутій точці місцевості А.

Використовуючи детерміновану математичну модель Берлянда [5] і метод лінеаризації функції випадкових аргументів [4] для попередніх етапів

**Оцінка та прогнозування техногенного впливу на довкілля**

проектування, отримані числові характеристики системи випадкових величин  $(C_1, C_2, \dots, C_m)$ :

– математичні сподівання (м. с.)  $C_k^*$

$$C_k^* = C_k(\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^*, \dots, \lambda_{kq_1}^*, \dots, \lambda_{kq_\Sigma}^*), \quad (2)$$

де концентрації  $C_k$  у правій частині рівності (2) визначені у відповідності до моделі Берлянда [5] з урахуванням фонових концентрацій  $C_{\phi k}$  і похибок

$\Delta C_k$  визначення концентрацій;  $\lambda_{kj}^*$ ,  $\lambda_k^*$  – м. с. випадкових збурюючих факторів, які задані в проекті підприємства;  $q_1$  – число збурюючих факторів, які залежать від виду  $k$ -ї ЗР,  $q_\Sigma$  – сумарне число збурюючих факторів;

– середньоквадратичне відхилення (с. к. в.)

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{q_1} \left( \frac{\partial C_k}{\partial \lambda_{kj}} \sigma_{\lambda_{kj}} \right)^2 + \sum_{j=q_1+1}^{q_\Sigma} \left( \frac{\partial C_k}{\partial \lambda_j} \sigma_{\lambda_j} \right)^2}, \quad (3)$$

де  $\frac{\partial C_k}{\partial \lambda_{kj}}$ ,  $\frac{\partial C_k}{\partial \lambda_j}$  – перші часткові похідні концентрацій

за випадковими аргументами  $\lambda_{kj}$ ,  $\lambda_j$  для одиночного точкового джерела [2];  $\sigma_{\lambda_{kj}}$ ,  $\sigma_{\lambda_j}$  – середньоквадратичні відхилення збурюючих факторів  $\lambda_{kj}$ ,

$\lambda_j$ , заданих в проекті підприємства;

– коефіцієнти кореляції між концентраціями  $k$ -ї і  $l$ -ї ЗР

$$r_{kf} = \frac{\sum_{j=1}^{q_1} \frac{\partial C_k}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial C_l}{\partial \lambda_j} \sigma_{\lambda_j}^2}{\sigma_k \cdot \sigma_l}. \quad (4)$$

Вважалося, що діапазон зміни концентрацій  $C_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  в (1) знаходиться у зоні, відмінної від нуля, і підінтегральна функція  $f$  за межами діапазону  $C_k > C_k^* + 4\sigma_k$  аргументів практично дорівнює нулю; збурюючі фактори  $\lambda_{kj}$ ,  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, q_\Sigma}$  підкорюються нормальному закону розподілу. Тоді щільність розподілу  $f$  як лінійна функція своїх аргументів при використанні методу лінеаризації матиме вигляд багатовимірного нормального закону [4].

У [6] наведені особливості визначення перших часткових похідних, які входять у (3), (4), і отримані їх значення для окремих точкових джерел, які входять до групи таких джерел.

Однак питання визначення числових характеристик багатовимірної щільності розподілу і розробки методу розв'язання задачі оцінки екологічного ризику у такому випадку залишилося відкритим.

Згідно з викладеним метою статті є визначення числових характеристик щільності розподілу концентрацій ЗР від групи точкових джерел, екологічного ризику для даного випадку і методу розв'язання задачі прогнозування оцінки екологічного ризику для групи точкових джерел.

Зі зміною азимута  $\varphi$  швидкості вітру змінюються координати  $i$ -го джерела  $x_{ui}$ ,  $y_{ui}$  у вітровій системі координат [6], у якій повинні визначатися числові характеристики  $C_k^*$ ,  $\sigma_k$ ,  $r_{kf}$ :

$$\begin{aligned} x_{ui} &= (x_A - x_i) \cdot \cos \varphi + (y_A - y_i) \cdot \sin \varphi, \\ y_{ui} &= -(x_A - x_i) \cdot \sin \varphi + (y_A - y_i) \cdot \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $x_A, y_A$  – координати точки А у земній системі координат [6],  $x_i, y_i$  – координати основи  $i$ -го джерела в тій же системі координат.

При зміні величини швидкості вітру  $u$  змінюються коефіцієнти  $r_i, S_{2ki}$  у моделі Берлянда [5]. Разом із величинами  $x_{ui}, y_{ui}$ ,  $r_i, S_{2ki}$  відповідно змінюватимуться перші часткові похідні концентрацій ЗР за збурюючими факторами, що призводить до зміни підінтегральної функції у (1) і екологічного ризику  $\alpha$ .

У зв'язку з викладеним та з тим, що для кожного джерела існує своя величина небезпечної швидкості вітру, за якої концентрація  $C_{ki}$  від  $i$ -го джерела досягає максимального значення [5], для кожної точки А на місцевості існують найгірші умови за азимутом  $\varphi$  і величиною швидкості вітру  $u$ , при яких ризик  $\alpha$  буде найбільшим. Очевидно, що для інших умов він буде меншим і тим більше допустимим.

Тоді розглянута задача сформулюємо у наступному вигляді: для заданих координат групи точкових джерел  $x_i, y_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , їх проектних параметрів і характеристик зовнішнього середовища  $\lambda_{kij}$ ,  $\lambda_{ij}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, q_\Sigma}$ , а також заданих координат точки А на місцевості  $x_A, y_A$  необхідно визначити найгірші умови за азимутом  $\varphi$  і величиною швидкості вітру  $u$ , при яких розглянутий екологічний ризик  $\alpha$  за безаварійної роботи джерел досягає у точці А найбільшого значення, і величину екологічного ризику для цих умов.

Очевидно, що математична модель задачі повинна містити залежності з визначення екологічного ризику  $\alpha$  від напрямку  $\varphi$  та величини швидкості вітру  $u$ .

Залежність ризику  $\alpha$  від підінтегральної функції (щільності розподілу концентрацій) залишається такою ж, як і для одиночного точкового джерела (1). Однак, у щільності розподілу  $f$  для групи точкових джерел змінюються числові характеристики: м. с.  $C_k^*$ , с. к. в.  $\sigma_k$  і коефіцієнти кореляції  $r_{kl}$  між концентраціями  $k$ -ї і  $l$ -ї ЗР.

Виходячи з того, що концентрації одної і тієї ж ЗР, яка викидається у атмосферу групою джерел, підсумовуються, величина м. с.  $C_k^*$  дорівнюватиме сумі концентрацій  $C_{kj}^*$ , які утворюються від  $i$ -х джерел

Оцінка та прогнозування техногенного впливу на довкілля

$$C_k^* = \sum_{i=1}^n C_{ki}^* \quad (6)$$

Так як сумарна концентрація  $C_k$  є лінійною функцією від концентрацій  $C_{ki}$  окремих  $i$ -х точкових джерел [5], то відповідно правил теорії ймовірностей [4] величину с. к. в.  $\sigma_k$  визначимо як

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} \sigma_{ki}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{f=1}^n r_{kif} \sigma_k \sigma_f, i \neq f,} \quad (7)$$

де  $\sigma_{ki}$  – с. к. в.  $k$ -ї ЗР від  $i$ -го джерела, що визначається за (3), у якому перші часткові похідні визначаються відповідно [5] для групи точкових джерел;  $r_{kif}$  – коефіцієнти кореляції  $k$ -ї ЗР між  $i$ -м і  $f$ -м джерелами.

Відповідно до методу лінеаризації і за правилами теорії ймовірностей [4] коефіцієнт кореляції буде мати вигляд

$$r_{kif} = \frac{\sum_{j \in I} \frac{\partial C_{ki}}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial C_{kf}}{\partial \lambda_j} \sigma_{\lambda_j}^2}{\sigma_{ki} \cdot \sigma_{kf}}, \quad (8)$$

де  $\frac{\partial C_{ki}}{\partial \lambda_j}$  – перші часткові похідні концентрацій, які визначаються відповідно до [6];  $\sigma_{\lambda_j}$  – с. к. в. збурюючих факторів, які задаються у проекті підприємства;  $I$  – безліч номерів збурюючих факторів  $\lambda_j$ , одиниць для усіх джерел ( $A$  – коефіцієнт стратифікації атмосфери;  $T_n$  – температура атмосферного повітря, °C;  $\eta$  – коефіцієнт рельєфу місцевості;  $x_A, y_A$  – координати точки  $A$  у земній системі координат;  $u$  – величина швидкості вітру;  $\varphi$  – напрям швидкості вітру).

Аналогічно, коефіцієнти кореляції між різними сумарними від усіх джерел  $k$ -ї і  $l$ -ї концентраціями матимуть вигляд

$$r_{kl} = \frac{\sum_{j \in I} \frac{\partial C_k}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial C_l}{\partial \lambda_j} \sigma_{\lambda_j}^2}{\sigma_k \cdot \sigma_l} \quad (9)$$

Відповідно до [6] і положення про лінійність сумарної  $k$ -ї концентрації від окремих джерел отримаємо

$$\frac{\partial C_k}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_{ki}}{\partial \lambda_j} \quad (10)$$

Рівняння (1), (3), (5) – (10) спільно з рівняннями для перших часткових похідних, наведених у [6], і детермінованими рівняннями визначення концентрацій за моделлю Берлянда [5] складають математичну модель задачі.

Розроблена математична модель задачі дозволяє для заданої точки місцевості  $A$  однозначно визначити величину екологічного ризику  $\alpha$  для довільних

значень кута  $\varphi$  і величини швидкості вітру  $u$ .

Рішення задачі полягатиме у пошуку таких значень  $\varphi$  і  $u$ , для яких екологічний ризик  $\alpha$  буде найбільшим. Для цього скористаємося методом перебору можливих значень  $\varphi$  і  $u$  з деяким кроком  $\Delta\varphi$  і  $\Delta u$  та вибору тих їх значень, для яких  $\alpha$  буде найбільшим.

Для величини швидкості вітру  $u$  ОНД-86 [5] рекомендує здійснити пошук найбільшого значення концентрацій для кожної величини  $\varphi$  при наступних можливих значеннях швидкості вітру:  $u_{MC}$ ;  $0,5u_{MC}$ ;  $1,5u_{MC}$ ;  $0,5$  м/с. Тут  $u_{MC}$ , м/с – середньозважена небезпечна швидкість вітру для групи точкових джерел [4]. Цей підхід і був використаний у пошуку найбільшого значення екологічного ризику  $\alpha$ .

Для кута  $\varphi$ , як і в програмі «ЕОЛ+», що реалізує методику ОНД-86 [5], використано перебір можливих його значень з деяким кроком  $\Delta\varphi$  у діапазоні від 0 до 360 градусів.

Часто діапазон зміни кута  $\varphi$  можна скоротити, виходячи із наступного. Максимальні концентрації та екологічний ризик  $\alpha$  від джерела знаходяться вздовж осі факела. Тоді, якщо точка  $A$  розташована відносно групи джерел так, що лінії, які з'єднують основи джерел з точкою  $A$ , утворюють кути за модулем менші  $180^\circ$ , діапазон зміни кута  $\varphi$  можна звужити. Виходячи із вищесказаного та геометрії розташування основи джерел і точки  $A$ , можна зробити висновок, що кут пошуку буде визначатися крайньою правою із координатами  $x_{in}, y_{in}$  і крайньою лівою з координатами  $x_{il}, y_{il}$  точками основ джерел за напрямком вітру:

– мінімальний

$$\varphi_{\min} = \arctg \frac{y_A - y_{in}}{x_A - x_{in}}, \quad (11)$$

– максимальний

$$\varphi_{\max} = \arctg \frac{y_A - y_{il}}{x_A - x_{il}} \quad (12)$$

Таким чином, перебираючи значення  $\varphi$  і  $u$  з відповідними кроками і порівнюючи отримані для них значення екологічного ризику  $\alpha$ , ми знайдемо найбільше значення екологічного ризику  $\alpha^{\max}$  і відповідні йому значення  $\varphi^*$  і  $u^*$ .

Іншими можливими методами можуть бути методи максимізації і мінімізації функцій [7].

**ВИСНОВКИ.** У результаті проведених досліджень отримано математичну модель і запропоновано метод розв'язання задачі прогнозування оцінки екологічного ризику від групи точкових джерел викидів ЗР у атмосферу. Рішення задачі дозволяє визначити в залежності від напрямку  $\varphi$  та величини швидкості вітру  $u$  найбільше значення  $\alpha$  у заданій точці місцевості  $A$ , що знаходиться у зоні впливу забруднень від групи джерел викидів. Воно може служити критерієм для забезпечення у заданій точці

**Оцінка та прогнозування техногенного впливу на довкілля**

місцевості високої надійності відсутності впливу забруднень атмосфери на людину, що визначається ГДК<sub>мр</sub>.

Результати досліджень рекомендуються до використання у розділах ОВНС проектів будівництва (реконструкції) підприємств, які мають групу точкових джерел, а також при проведенні екологічної експертизи.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Методичні рекомендації «Оцінка ризику для здоров'я населення від забруднення атмосферного повітря»: 2.2.12. – 142МР – 2007 [Електронний ресурс]. – 2007. – Режим доступу: <http://zakon.nau.ua/doc/>

2. Фалько В. В. К вопросу оценки экологического риска для человека в проектах строительства предприятий // Вісник Сумського державного університету. – 2006. – № 12(96). – С. 171 – 180.

3. Фалько В. В. Алгоритм прогнозной оценки составляющей экологического риска для человека от

точечного источника выбросов // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів» – 2008. – № 2(18) – С. 149 – 156.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – [6-е изд.]. – М. : Высш.школа, 1998. – 576 с.

5. ОНД-86. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. – Л. : Гидрометеоздат, 1987. – 94 с.

6. Зинченко В. Ю., Фалько В. В., Емец Н. А. Особенности оценки экологического риска для здоровья человека от группы стационарных источников загрязнения атмосферного воздуха // Екологія і природокористування. – 2013. – №16. – С. 272 – 278.

7. Иванилов Ю. П., Охрименко В. В. Максимизация и минимизация функций // Математическая энциклопедия: гл. ред. И. М. Виноградов, т. 3. – М.: «Советская энциклопедия», 1982. – С. 489 – 491 с.

**MATHEMATICAL MODEL AND SOLUTION METHOD ELABORATION FOR THE TASK OF ECOLOGICAL RISK PREDICTIVE ASSESSMENT**

**V. Zinchenko**

The National Academy of Public Administration, Office of the President of Ukraine  
vul. Ezhena Pottier, 20, Kyiv, 03057, Ukraine. E-mail: [zvonok-60@mail.ru](mailto:zvonok-60@mail.ru)

**V. Falko**

Sumy State University  
vul. R.-Korsakova, 2, Sumy, 40007, Ukraine. E-mail: [vera\\_falko@ukr.net](mailto:vera_falko@ukr.net)

The predictive stochastic mathematic model of surface concentration distribution from the pollution point source group is elaborated. The concentrations are presented as a random vectorial field that turns into a random vector of cor-relatable amounts in the surface fixed point 'A'. These amounts' distribution density numerical characteristics are obtained through the linearization method and Berland model usage. At that distribution density becomes a multinormal rule. The ecological risk is observed as an excess probability of onetime maximum permissible concentration by even one contaminator. The numerical task computation for ecological risk predictive assessment for uninterrupted enterprise operation is proposed along with the elaborated model usage.

**Key words:** ecological risk, assessment, point sources.

**REFERENCES**

1. Metodichni rekomendatsiyi 'Otsinka riziku dlya zdorovia naseleennia vid zabrudnennia atmosferного povitria' (2007), "Methodical recommendations 'Risk Assessment for Public Health from Air Pollution'", available at: <http://zakon.nau.ua/doc/> (accessed September 2, 2013).

2. Falko, V.V. (2006), "To the question of estimation of ecological risk for a man in the projects of building of enterprises", *Visnyk Sumskogo derzhavnogo universytetu*,. Edition, no. 12(96), pp. 171 – 180.

3. Falko, V.V. (2008), "Ecological Risk Component Prognostic Estimation Algorithm for Human from Emissions Point Source", *Visnyk Sumskogo nazionalnogo agrarnogo universytetu, Seriya "Mehanizatsiya ta avtomatyzatsiya vyrobnychih protsesiv"*, no. 2(18), pp. 149 – 156.

4. Ventsel, Ye.S. (1998), *Teoriya veroiatnostey*

[The Theory of Probability], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.

5. ОНД-86 (1987), *Metodika rascheta kontsentratsiyi v atmosferном vozduhe vrednyh veschestv, sodержashihsia v vybrosah predpriyatij* [Calculation Concentrations Method for Air Contaminators of Enterprises Emissions], Hydrometeoizdat, Leningrad, Russia.

6. Zinchenko, V.Yu., Falko, V.V., and Yemez, N.A. (2013), "Ecological Risk Assessment Particularities for Human Health from the Air Pollution Stationary Sources Group", *Ekologiya ta pryrodokorystuvannia*, no. 16, pp. 272 – 278.

7. Ivaniлов, Yu. P., and Ohrimenko, V.V. (1982), *Maksimizatsiya i minimizatsiya funktsiy. Matematicheskaya entsiklopediya* [Maximizing and Minimizing Functions. Mathematics Encyclopedia], Vol.3, Sovetskaya Enzyklopediya, Moscow, Russia.