УДК 518: 517.948

Ю.Л. Меньшиков, канд. техн. наук
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
(Украина, 49050, Днепропетровск, пр-т Гагарина,72,
тел. (056) 7609461, e-mail: Menshikov2003@list.ru)

Метод обеспечения адекватности динамических моделей

Исследована задача синтеза адекватного математического описания физических процессов. Показано, что в общем случае эта задача сводится к решению нескольких интегральных уравнений Вольтерры первого рода (некорректная задача). Предложено несколько возможных постановок таких задач. Для получения устойчивых результатов синтеза использована модификация метода регуляризации.

Досліджено задачу синтезу адекватного математичного опису фізичних процесів. Показано, що в загальному випадку ця задача зводиться до розв’язку декількох інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду (некоректна задача). Запропоновано декілька можливих постановок таких задач. Для отримання стійких результатів синтезу використано модифікацію методу регуляризації.

Ключевые слова: *математическое моделирование, адекватность, интегральные уравнения.*

Постановка задачи. Одной из основных задач математического моделирования динамических систем или процессов является совпадение с заданной точностью результатов моделирования с экспериментальными данными (измерениями). Под математическим описанием физического процесса понимается аналитическая связь (дифференциальная, алгебраическая, интегральная и др.) между выбранными переменными состояния исследуемой системы и внешними воздействиями (нагрузками). Поэтому задача обеспечения адекватного математического описания физических процессов является одним из основных этапов метода математического моделирования [1, 2]. При этом предполагается, что переменные состояния математической модели соответствуют выбранным характеристикам реального физического процесса. Естественно, структура математической модели, число переменных состояния, значения коэффициентов могут быть различными и определяться целями изучения конкретной физической задачи [3, 4].

Задача синтеза адекватного математического описания в настоящее время остается малоизученной и плохо формализуется [1, 5]. При решении практических задач исследователи, как правило, пользуются математическими описаниями, полученными другими авторами, а самостоятельную задачу получения таких описаний не решают [3, 4]. Однако при проверке выполнения условия адекватности возникают принципиальные трудности. Например, как проверить адекватность построенного математического описания в дальнейших исследованиях? В новых экспериментах могут измениться параметры процесса и внешнего воздействия на него. Где гарантии, что в новых условиях будет выполняться условие адекватности? Естественно предположить, что необходимое совпадение с результатами экспериментов уже не будет выполняться. Следовательно, необходимо строить новое описание процесса в новых условиях. Далее процесс проверки адекватности повторяется.

Проблемой также является оценка степени совпадения результатов математического моделирования с экспериментальными данными. Во многих случаях необходимо сравнивать взаимное отклонение двух вектор-функций в некотором функциональном пространстве с выбранной метрикой. Однако способов задания метрик существует бесконечное множество. Кроме того, есть неопределенность в выборе диапазона изменения переменных, на котором сравниваются две вектор-функции. Очевидно, что один и тот же физический процесс может иметь бесконечное множество адекватных математических описаний. Эти неопределенности усложняют формализацию задачи.

Перечисленные трудности могут быть частично преодолены, если в определении адекватности изменить некоторые условия.

Определение. Математическое описание будем полагать адекватным исследуемому процессу, если результаты математического моделирования (simulation) совпадают с заданной точностью с экспериментальными данными (измерениями), а параметры адекватного математического описания устойчивы к малым изменениям исходных данных [6].

При такой формулировке близость результатов математического моделирования и будущих результатов эксперимента при малых изменениях исходных данных (эксперимента и параметров математической модели процесса) гарантирована.

Сформулируем общие требования, которым должно удовлетворять адекватное математическое описание физического процесса:

1. Адекватное математическое описание существует.

2. Характеристика адекватности математического описания формируется конечными целями исследований физического процесса и его параметры должны определяться единственным способом.

3. Параметры адекватного математического описания устойчивы к малым изменениям экспериментальных данных и математической модели процесса.

В настоящее время существует два основных подхода к проблеме построения адекватного математического описания [2—10]:

1) по математической модели с выбранной априори структурой и неточными (неизвестными) параметрами определяется модель внешнего воздействия, которая в совокупности с математической моделью процесса обеспечивает условие адекватности;

2) по некоторой заданной априори модели внешнего воздействия подбирается математическая модель процесса, которая в совокупности с моделью внешнего воздействия обеспечивает совпадение с экспериментальными данными.

Рассмотрим алгоритм получения адекватного математического описания в рамках первого подхода на примере динамической системы с сосредоточенными параметрами, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bz \tag{1}$$

с уравнением наблюдения

$$y = Cx\,. \tag{2}$$

При этом $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_{n_1}(t))^T$ — вектор-функция переменных состояния ($(.)^T$ — знак транспонирования); $z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_{m_1}(t))^T$ — вектор-функция внешних воздействий; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_{n_1}(t))^T$ — вектор-функция наблюдаемых в эксперименте переменных [2, 6]. Под внешними воздействиями (нагрузками) будем понимать функции $z_1(t), z_2(t), ..., z_{m_1}(t)$, которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1). Положим $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$; A, B, C — матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности. Для простоты рассуждений будем полагать, что матрица C — единичная ($X = Y$).

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений, соответствующую системе (1):

$$\dot{x} = Ax. \tag{3}$$

Введем фундаментальную матрицу $F[t, t_0]$ однородной системы (3) [11]. В дальнейшем будем полагать, что $t_0 = 0$. Изменение координаты $x(t) = x(t,\ t_0, x^0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x^0$, определяется формулой Коши [11]:

$$x(t) = F\ [t] x^0 + \int_0^t F\,[t - \tau]\ Bz(\tau)\ d\tau = P(A, B, x^0, z),$$

где $P(x^0, z) = (p_1(A, B, x^0, z), \ldots, p_n(A, B, x^0, z))^T$ — вектор-функция, каждая компонента которой зависит от матриц A, B и от вектор-функций x^0, z.

Предположим, что наблюдаемая в эксперименте вектор-функция $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n_1}(t))^T = (x_1(t), \ldots, x_{n_1}(t))^T$ отличается от точной вектор-функции $x^{ex}(t) = (x_1^{ex}(t), \ldots, x_{n_1}^{ex}(t))^T$ на известную величину погрешности экспериментальных измерений δ:

$$\left\| y(t) - x^{ex}(t) \right\|_X \leq \delta .$$

Будем считать, что результаты математического моделирования с использованием математического описания A, B и вектор-функции z адекватны экспериментальным измерениям, если выполняется неравенство

$$\rho_X(P(A, B, x^0, z), y) \leq \varepsilon, \tag{4}$$

где $\rho_X(P, y)$ — расстояние между вектор-функциями P и y в некотором метрическом пространстве X; ε — требуемая точность совпадения результатов эксперимента с результатами математического моделирования. Следует заметить, что в рассматриваемом случае (при фиксированных матрицах A, B) устойчивость адекватной модели определяется устойчивостью вектор-функции z к малым изменениям экспериментальных данных.

Одним из возможных вариантов неравенства (4) может быть следующее:

$$\left\| P(A, B, x^0, z) - y \right\|_X \leq \varepsilon, \tag{5}$$

где $\| \cdot \|_X$ — норма в функциональном пространстве X. Величина ε задается априори и характеризует желаемое качество математического моделирования (степень адекватности его результатов). Очевидно, что при выполнении неравенства (5) матрицы A, B и вектор-функция z оказываются связанными. Нетрудно показать, что при фиксированных матрицах A, B существует бесконечное число различных вектор-функций z, удовлетворяющих неравенству (5). И, наоборот, при фиксированной вектор- функции z существует бесконечное число различных матриц A, B, для которых выполняется неравенство (5) [2].

При математическом моделировании проверка неравенства (5), как правило, не осуществляется, но его выполнение подразумевается. Поскольку одним из обязательных слагаемых, составляющих величину ε, является погрешность измерительной аппаратуры δ, можно считать, что выполняется неравенство $\delta \leq \varepsilon$.

Таким образом, для открытых динамических систем критерию адекватности результатов математического моделирования могут удовлетворять совершенно различные системы (различные матрицы A, B) с различными вектор-функциями $z(t)$. Если динамическая система замкнутая, то вектор-функция $P(A, B, x^0, z)$ будет зависеть только от матрицы A и вектора x^0: $P(A, B, x^0, z) = P(A, x^0)$. Неравенство (5) в этом случае также будет определять бесконечное множество различных матриц A. Следовательно, в этом случае критерия выбора одной «хорошей» математической модели не существует.

Возможный алгоритм синтеза математического описания (модели внешнего воздействия). Пусть поведение некоторого физического процесса описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с уравнением наблюдения (2). Математическое описание (1) с переменными состояния $x(t)$ можно представить в виде совокупности взаимодействующих отдельных элементарных звеньев с выходными или внутренними переменными $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n_1}(t)$. Взаимодействие отдельных звеньев определяется переменными состояния (внутренних взаимодействий). Если экспериментальным путем измерить, например, переменную состояния $x_k(t)$, то исходную систему можно представить в виде одной или двух более простых подсистем, приложив дополнительные внешние воздействия $d_k x_k(t)$ и $-d_k x_k(t)$ к соответствующим частям (d_k — const). Назовем такое преобразование k-м сечением исходной системы [6].

Предположим, что с помощью ряда «сечений» указанного типа выделена подсистема исходной системы, у которой известны все внешние воздействия (часть из них получена с помощью переменных состояния) кроме одного, искомого, — $z_k(t)$, а также известна одна из переменных состояния этой подсистемы, например $x_J(t)$.

Для данного случая с помощью ряда сечений может быть выделена подсистема исходной системы, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 z\,, \tag{6}$$

с уравнением наблюдения

$$y = C_1 x + D_1 z\,, \tag{7}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^*$; $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t))^*$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))^*$; A_1, B_1, C_1, D_1 — матрицы с постоянными коэффициентам соответствующей размерности; D_1 — диагональная матрица с первым нулевым диагональным элементом; матрица C_1 имеет только один ненулевой элемент в первой строке, например первый элемент c_1. Следовательно, будем полагать, что полученная подсистема имеет одну известную переменную состояния $x_1(t)$ и все известные внешние воздействия, за исключением первого $z_1(t)$.

Движение подсистемы (6) $x_1(t)=x_1(t,t_0,x_1^0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x_1(0)=x_1^0$, определяется формулой Коши [11]. Из уравнения наблюдения (7) находим

$$x_1(t)=y_1(t)=Q[t]x^0+\int_0^t Q[t-\tau]\,Bz(\tau)\,d\tau,$$
$$x_2(t)=y_2(t)=d_2z_2(t), \tag{8}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m(t)=y_m(t)=d_mz_m(t),$$

где $Q[t,t_0]$ — фундаментальная матрица однородной системы (6). В результате несложных преобразований из системы (8) можно получить уравнение для искомой функции $z_1(t)$:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)\,z_1(\tau)\,d\tau=P_1(t), \tag{9}$$

где $P_1(t)$, $K_1(t-\tau)$ — известные функции. Представим (9) в виде

$$A_pz=u_{\delta,p}=B_px_\delta, \tag{10}$$

где A_p — линейный оператор, $A_p:Z\to U$; $z\in Z$; $u_{\delta,p}\in U$; $x_\delta\in X$; $B_p:X\to U$ — линейный оператор; x_δ — исходные экспериментальные данные, $x_\delta=(x(t), z_1(t), z_2(t), ..., z_r(t))^T$; $z=z_1$ — искомая функция; Z, U, X — функциональные пространства.

Будем полагать, что операторы A_p и B_p непрерывно зависят от некоторого вектора параметров p математической модели движения динамической системы: $p=(p_1,p_2,p_3,...,p_n)^T\in R^n$. В общем случае операторы A_p, B_p могут зависеть от разных векторов или от разных векторов с несколькими совпадающими компонентами. Однако процесс построения уравнения (9) для системы уравнений (6) свидетельствует о том, что в этом случае операторы A_p и B_p зависят от одного вектора p, так как они определяются функциями $q_1^i(t)$, которые построены с использованием всех компонент вектора—параметров p математической модели (6). В большинстве практических задач оператор A_p является вполне непрерывным [7].

В дальнейшем будем полагать, что элемент x_δ задан в виде экспериментально полученной зависимости с известной погрешностью: $\|x_T-x_\delta\|_X\le\delta$, где x_T — точная вектор-функция исходных данных; δ — const, $\delta>0$.

Обозначим через $Q_{\delta, p}$ множество возможных решений обратной задачи идентификации модели внешнего воздействия (10) при фиксированных операторах A_p, B_p:

$$Q_{\delta, p} = \{z : \|A_p z - B_p x_\delta\|_U \le \delta \ \|B_p\| = \delta_0\}.$$

Поскольку оператор A_p — вполне непрерывен, множество $Q_{\delta, p}$ для любых p и δ является неограниченным в Z (некорректная задача) [12]. Однако любая функция z из множества $Q_{\delta, p}$ является «хорошей» моделью внешнего воздействия, так как функция $A_p z$ совпадает с $B_p x_\delta$ с точностью измерения. Таким образом, операторы A_p, B_p и любая функция из множества $Q_{\delta, p}$ составляет тройку, которая обеспечит адекватность результатов математического моделирования с точностью $\delta_0 = \varepsilon$.

Процесс нахождения $z \in Q_{\delta, p}$ будем называть задачей синтеза модели внешнего воздействия методом идентификации [2, 6, 13]. Для выбора наилучшей модели внешнего воздействия $z_{\delta, p}$ из бесконечного множества $Q_{\delta, p}$ различных хороших моделей предлагается несколько устойчивых алгоритмов [2, 13]. Например, математическая модель, адекватно описывающая физический процесс, может быть получена как решение следующей экстремальной задачи:

$$\Omega\,[z_{\delta, p}] = \inf_{z \in Q_{\delta, p}} \Omega\,[z], \tag{11}$$

где $\Omega\,[z]$ — стабилизирующий функционал [12]. При этом нет оснований полагать, что функция $z_{\delta, p}$ близка к реальному внешнему воздействию z_T. Это лишь устойчивая компонента модели внешнего воздействия, обеспечивающая адекватность результатов математического моделирования [2, 13]. Аналогично изложенному выше можно получить модель внешнего воздействия, которая совместно с операторами A, B в системе (1) будет обеспечивать адекватные результаты математического моделирования.

Следует заметить, что в данных задачах не имеет смысла рассматривать поведение приближенного решения $z_{\delta, p}$ при $\delta \to 0$ и оценивать погрешность полученного решения. Эта погрешность может иметь произвольную величину, не имеющую никакого значения для построения адекватного математического описания. Таким образом, не требуется, чтобы оператор, обеспечивающий приближенное решение обратной задачи (10), был регуляризирующим [12]. Более важно, чтобы это описание было устойчивым к малым изменениям исходных данных.

Случай неточного задания параметров математической модели физического процесса. В практике математического моделирования нередки случаи, когда параметры математической модели процесса не определены точно. Обозначим через p вектор параметров математической модели процесса. В силу неточности параметров вектор p может принимать значения в некоторой замкнутой области $D \subset R^n$, т.е. $p \in D$. Каждому вектору параметров $p \in D$ соответствуют определенные операторы A_p, B_p в уравнении (10), которые образуют два класса операторов, $K_A = \{A_p\}$, $K_B = \{B_p\}$, при изменении p внутри D. Будем полагать, что все операторы A_p — линейные и непрерывные, а операторы B_p — линейные и необратимые. Обозначим через h_1 и d_1 величины максимального отклонения операторов A_p из класса K_A и операторов B_p из класса K_B :

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \| A_{p_\alpha} - A_{p_\beta} \| \le h_1, \quad \sup_{p_\gamma, p_\lambda \in D} \| B_{p_\gamma} - B_{p_\lambda} \| \le d_1 .$$

В этом случае множество решений уравнения (10) следует расширить до множества

$$Q_{h_1, d_1, \delta} = \{ z : \| A_p z - B_p x_\delta \| \le h_1 \| z \|_Z + B_0 \}, \tag{12}$$

где $B_0 = d_1 \| x_\delta \|_X + \| B_p \| \delta$.

Любая функция из множества (12) вызывает отклик математической модели, совпадающий с откликом реального объекта с погрешностью, которая учитывает погрешность экспериментальных измерений и погрешность возможного отклонения параметров вектора $p \in D$. Задача нахождения $z \in Q_{h_1, d_1, \delta}$ названа по аналогии с предыдущей задачей синтеза модели внешнего воздействия методом идентификации для класса моделей [5, 13].

Заметим, что в множестве решений обратной задачи синтеза при фиксированном операторе A_p из K_A содержатся элементы с неограниченной нормой (некорректная задача). Поэтому величина $h_1 \| z \|_Z$ может быть бесконечно большой. Формально такая ситуация неприемлема, так как она означает, что погрешность математического моделирования равна бесконечности, если в качестве моделей использовать произвольную функцию из (12). Следовательно, не все функции из (12) будут хорошими моделями внешнего воздействия. Таким образом, учитывая погрешность оператора A_p в неравенстве (5), необходимо величину ε в общем случае полагать равной бесконечности, т.е. неравенство (5) в случае $\delta < \varepsilon$ нельзя обосновать погрешностью оператора.

В данном случае предлагается отказаться от формального расширения множества возможных решений до $Q_{h_1, d_1, \delta}$. Выбор модели внешнего воздействия для получения адекватного математического описания должен определяться конечными целями при построении адекватного математического описания [13]. Например, указанную модель можно выбирать как решение следующей экстремальной задачи:

$$\Omega[z_0] = \inf_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta, p}} \Omega[z], \quad p \in R^n . \tag{13}$$

Функция z_0 определяет устойчивое адекватное математическое описание, которое дополнительно обеспечивает минимальную величину функционала $\Omega[z]$ для всех операторов A_p и B_p из классов K_A и K_B. Это дополнительное свойство позволяет определять оптимальные свойства математических описаний. Аналогичными дополнительными свойствами обладает адекватное математическое описание, которое дополнительно обеспечивает максимальную величину функционала $\Omega[z]$ для всех операторов A_p и B_p из классов K_A и K_B:

$$\Omega[z^1] = \sup_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta,p}} \Omega[z], \quad p \in R^n. \tag{14}$$

Модель внешнего воздействия z_b, обеспечивающая адекватность математического описания и оценку снизу отклика динамической системы (1), может быть получена как решение следующей экстремальной задачи [13, 14]:

$$\|A_{p_b} z_b\| = \inf_{p \in D} \|A_p z_{\delta,p}\|, \tag{15}$$

где $z_{\delta,p}$ — решение экстремальной задачи (6). Аналогично могут быть определены и другие модели с дополнительными свойствами [2, 13]:

$$\|A_{p_c} z_c\| = \sup_{p \in D} \|A_p z_{\delta,p}\|, \tag{16}$$

$$\|A_{p_{un}} z_{un} - B_{p_{un}} x_\delta\| = \inf_{p \in D} \sup_{p \in D} \|A_p z_{\delta,a} - B_p x_\delta\|_U, \tag{17}$$

где $z_{\delta,a}$ — решение экстремальной задачи (11) при $p = a$, $a \in D$.

Для решения задач типа (13)—(17) в работах [13, 14] предложен метод специальных операторов. Примеры расчетов конкретных адекватных математических описаний представлены в работах [2, 13, 14].

Выводы

С помощью предложенного метода разработан алгоритм синтеза адекватной модели, включающий преобразование описаний моделируемого объекта, получение упрощенных составных частей модели с учетом модели внешнего воздействия.

The problem of synthesis of adequate mathematical description of physical processes has been studied. It is shown that in the general case, this problem is reduced to solution of some first kind Volterra integral equations (ill-posed problem). Several possible statements of such problems were proposed. Modifications of the regularization method were used for obtaining stable results of synthesis.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shanon R.* Systems Simulation — the Art and Science. — Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. — New Jersey, 1975. — 329 p.
2. *Меньшиков Ю.Л.* Об адекватности результатов математического моделирования // Тр. Междунар. конф. «Моделирование-2008». — Киев : ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2008. — С. 119—124.
3. *Soeiro N. et al.* Vibratory Working Modelling through Methods of Continuum Mechanics // Proc. Eleventh International Congress on Sound and Vibration. — St. Petersburg (Russia), 2004. — P. 2821—2828.
4. *Sarmar I., Malik A.* Modeling, Analysis and Simulation of a Pan Tilt Platform Based on Linear and Nonlinear Systems // Proc. IEEE/ASME MESA. — China, 2008. — P. 147—152.
5. *Menshikov Yu.L.* Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences. — 2013. —Vol. 2. — N 3. — P. 256—271.
6. *Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.* Алгоритм синтеза устойчивого математического описания эволюционного процесса // Тези XI Міжнар. науково-практичної конф. «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем», MPZIS-2013, 20—22 листопада 2013. — Дніпропетровськ, 2013. — С. 114—115.
7. *Степашко В.С.* Метод критической дисперсии как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 2. — С. 27—32.
8. *Губарев В.Ф.* Метод итеративной идентификации многомерных систем с неточными данными. Ч. 1. Теоретические основы // Там же. — 2008. — № 2. — С. 8—26.
9. *Жуков О.А.* Алгоритмы итеративной идентификации многомерных систем // Тр. 15 междунар. конф. по автоматическому управлению «Автоматика-2008». — Одесса : INIA, 2008, — С. 774—777.
10. *Гельфандбейн Ю.М., Колосов Л.С.* Ретроспективная идентификация возмущений и помех. — М. : Наука, 1972. — 246 с.
11. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. — Киев : Вища школа, 1975. — 328 с.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979. — 342 с.
13. *Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.* Идентификация моделей внешних воздействий. — Днепропетровск : «Наука та Освіта», 2009. — 188 с.
14. *Menshikov Yu.L.* Identification of External Loads as Method of Adequate Mathematical Description Synthesis // Proc. of 32nd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2013). February 11 — 13, 2013. — Innsbruck (Austria), 2013. — 8 p.

Поступила 28.01.14

МЕНЬШИКОВ Юрий Леонидович, канд. техн. наук, доцент, доцент Днепропетровского национального университета им. Олеся Гончара. В 1970 г. окончил Днепропетровский госуниверситет. Область научных исследований — вопросы построения адекватних математических описаний физических процессов, теория некорректных задач, приложения в механике и физике.