



УДК 519.832+514.752.44

В.В. Романюк, канд. техн. наук
Хмельницкий национальный университет
(Украина, 29016, Хмельницкий, ул. Институтская, 11,
тел. (0382) 725237, e-mail: romanukevadimv@mail.ru)

Приемлемость приближенного решения бесконечной антагонистической игры на единичном гиперкубе при индивидуальной дискретизации в каждом из его измерений

Представлен трехэтапный метод получения приближенного решения бесконечной антагонистической игры на единичном гиперкубе с помощью индивидуальной равномерной дискретизации ядра игры вдоль каждого из измерений куба. После дискретизации согласно предлагаемым требованиям выполнено взаимнообратимое преобразование многомерной матрицы игры в двухмерную матрицу, в результате чего получено приближенное решение. Приемлемость этого решения оценивается по согласованности спектров оптимальных стратегий игроков, где его изменение ограничивается в минимальной окрестности шагов дискретизации.

Представлено трьохетапний метод отримання наближеного розв'язку нескінченної антагоністичної гри на одиничному гіперкубі за допомогою індивідуальної рівномірної дискретизації ядра гри уздовж кожного з вимірів куба. Після дискретизації відповідно до запропонованих вимог здійснено взаємозворотне перетворення багатовимірної матриці гри у двовимірну матрицю, результатом чого є наближений розв'язок. Прийнятність цього розв'язку оцінюється за узгодженістю спектрів оптимальних стратегій гравців, де його зміна обмежується в мінімальному околі кроків дискретизації.

К л ю ч е в ы е с л о в а: бесконечная антагонистическая игра, единичный гиперкуб, многомерная матрица, спектр оптимальной стратегии, согласованность приближенного решения.

Бесконечная антагонистическая игра как модель рационального распределения ресурсов. Главной причиной возникновения конфликтных ситуаций является преобладание требований и запросов над возможностями (ресурсами). При этом участниками (сторонами) конфликтов выступают как одушевленные объекты, так и противостоящие им природные факторы или обстоятельства (неопределенности) [1, 2]. Для разрешения

© В.В. Романюк, 2014

конфликтных процессов применяется теория игр, фундаментальной составляющей которой является теория антагонистических игр [3, 4].

Антагонистическая игровая модель позволяет справедливо и логично распределять ресурсы, устранять неопределенности в наиболее трудно прогнозируемых ситуациях, когда применим минимаксный принцип оптимальности. В большинстве случаев возможное действие (или контрдействие) описывается одним или несколькими параметрами, которые принимают значения из некоторых интервалов, в результате чего получаются бесконечные игры на евклидовых подпространствах размерностью два и более [5, 6].

Типичными примерами таких бесконечных антагонистических игр являются модели рационального распределения ограниченных ресурсов (в частности, производственных мощностей) в условиях частичной неопределенности, предложенные в [7, 8], где использован случай игры на единичном квадрате, который был рассмотрен в работе [3]. Подобные игры на единичных гиперкубах решены с учетом свойств выпуклости их ядер [9, 10]. Но в случаях более общих, когда ядро игры не обладает ни свойством выпуклости или вогнутости, ни какой-либо другой характерной особенностью, существует сравнительно небольшой перечень методов, позволяющих найти решение игры аналитически [3, 4, 11].

Решение бесконечных антагонистических игр на компактах. Как известно, решение конечных антагонистических (матричных) игр осуществляется методами линейного программирования [3, 4, 12]. Любая матричная игра или, вообще говоря, игра на конечном множестве ситуаций в чистых стратегиях всегда имеет решение (по крайней мере, в смешанных стратегиях), и проблема его отыскания заключается лишь во времени вычислений (операций).

Бесконечные игры даже в тривиальных примерах не имеют решения ни в чистых, ни в смешанных стратегиях. В качестве примера можно привести класс игр на открытом единичном квадрате, ядра которых являются выпуклой комбинацией чистых стратегий игроков [3]. В обобщенном случае рассматривается класс игр на открытом единичном гиперкубе, где ядро каждой игры является выпуклой комбинацией компонент чистых стратегий игроков.

Если игра непрерывна и компактна (т.е. ее ядро задано на компактном множестве и измеримо), то она имеет решение, по крайней мере, в смешанных, а также в ε -оптимальных стратегиях, являющихся смесями конечного числа чистых стратегий [3, 4, 12]. Вполне ограниченная игра также имеет решение в ε -оптимальных стратегиях, которое в известном смысле

не является точным, хотя во вполне ограниченных играх существуют ε -оптимальные стратегии с конечным спектром [3, 4, 12].

Если ядро игры суть неизмеримая функция или оно задается на некомпактном множестве, приходится довольствоваться приближенным решением [13]. Избавиться от приближенности не удастся при дополнении множеств чистых стратегий игроков так, чтобы они совпадали с их замыканиями (и соответственно превращались в компакты), поскольку такое дополнение выполняется строго доминируемыми чистыми стратегиями, не изменяющими суть решения [3, 13]. Однако если решение и существует (например, антагонистических игр на компактах евклидовых конечномерных пространств), то это не означает, что существует известный способ его нахождения.

Внедрение решения в форме оптимальной стратегии с бесконечным спектром вызывает концептуальные трудности, так как требует много-раундовых повторов игры вплоть до неограниченности [14]. Поэтому приходится заниматься играми, получаемыми вследствие либо дискретизации, либо построения ε -сетей для приближенного решения ограниченных игр [3, 13, 15]. Однако такие игры не всегда превращаются в матричные, поскольку первоначально чистая стратегия игрока может быть многокомпонентной.

Постановка задачи. Распространенность антагонистических моделей на компактах евклидовых пространств (большой размерности) и отсутствие алгоритмизированного подхода к их решению мотивирует исследование возможностей перевода бесконечной антагонистической игры в конечную (матричную). Поэтому цель состоит в разработке метода такого перевода с сохранением всех особенностей ядра исходной бесконечной игры. Для достижения этой цели необходимо в первую очередь выполнить дискретизацию ядра игры. Поскольку дискретизация не может выполняться произвольно, следует указать требования к ее параметрам, из которых главным является условие выбора шага дискретизации.

После дискретизации ядра игры полученную многомерную матрицу необходимо преобразовать в обычную и тогда получение решения матричной игры как приближенного решения исходной не составит особого труда (вопрос вычислительных затрат лежит в иной плоскости исследования теории игр). При этом преобразование многомерной матрицы в двухмерную должно быть однозначным и взаимнообратимым. И, поскольку качество решения определено степенью дискретизации, принципиально важно знать, насколько будут близки решения при различных шагах дискретизации. Таким образом, для приближенного решения исходной

бесконечной антагонистической игры должна быть установлена его приемлемость (совместимость).

Дискретизация бесконечной антагонистической игры. Пусть множества чистых стратегий первого и второго игроков суть гиперкубы соответственно

$$U_M = \prod_{m=1}^M [0; 1] \subset \mathbb{R}^M, \quad (1)$$

$$U_N = \prod_{n=1}^N [0; 1] \subset \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

где $M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим антагонистическую игру с измеримым ядром $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ при $\mathbf{X} \in U_M$ и $\mathbf{Y} \in U_N$, где $\mathbf{X} = [x_m]_{1 \times M} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{Y} = [y_n]_{1 \times N} \in \mathbb{R}^N$, определенным на единичном $(M + N)$ -мерном гиперкубе

$$U_M \times U_N = \left\{ \prod_{m=1}^M [0; 1] \right\} \times \left\{ \prod_{n=1}^N [0; 1] \right\} = \left\{ \prod_{k=1}^{M+N} [0; 1] \right\} \subset \mathbb{R}^{M+N}. \quad (3)$$

Полученная игра

$$\langle U_M, U_N, K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle \quad (4)$$

изоморфна антагонистическим играм с измеримым ядром, определяемым на компакте в пространстве \mathbb{R}^{M+N} , в котором множества первого и второго игроков являются компактами соответственно в пространствах \mathbb{R}^M и \mathbb{R}^N . Предположим, что ядро $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ дифференцируемо по любой из переменных $\{\{x_m\}_{m=1}^M, \{y_n\}_{n=1}^N\}$. Кроме того, существуют смешанные частные производные функции $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ по любой совокупности переменных, куда каждая переменная входит не более одного раза.

Будем рассматривать дискретизацию вдоль каждого из M измерений в U_M и каждого из N измерений в U_N с некоторыми индивидуальными шагами. При этом заметим, что шаг в каждом из $M + N$ измерений будет неизменным. Разобьем m -е измерение пространства \mathbb{R}^M у первого игрока на L_m интервалов одинаковой меры (длины), а n -е измерение пространства \mathbb{R}^N у второго игрока — на L_{M+n} одинаковых интервалов, $m = \overline{1, M}$ и $n = \overline{1, N}$. Условимся также обязательно выбирать точки разбиения, являющиеся концами единичных сегментов. Тогда формально $L_k \in \mathbb{N}$ при $k = \overline{1, M + N}$ с учетом самой «грубой» дискретизации для каждого из игроков. Теперь в m -м измерении у первого игрока вместо сегмента $[0; 1]$ значений m -й компоненты его чистой стратегии \mathbf{X} будет множество точек

$$D_m^{(\mathbf{X})}(L_m) = \{x_m^{(s_m)}\}_{s_m=1}^{L_m+1}, \quad x_m^{(s_m)} = \frac{s_m - 1}{L_m} \quad \forall m = \overline{1, M}. \quad (5)$$

В n -м измерении у второго игрока вместо сегмента $[0; 1]$ значений n -й компоненты его чистой стратегии \mathbf{Y} будет множество точек

$$D_n^{(Y)}(L_{M+n}) = \{y_n^{\langle s_{M+n} \rangle}\}_{s_{M+n}=1}^{L_{M+n}+1}, \quad y_n^{\langle s_{M+n} \rangle} = \frac{s_{M+n} - 1}{L_{M+n}} \quad \forall n = \overline{1, N}. \quad (6)$$

В результате выполненной дискретизации получаем конечную антагонистическую игру, в которой первый и второй игроки обладают множествами чистых стратегий соответственно

$$D^{(X)} = \prod_{m=1}^M D_m^{(X)}(L_m) = \prod_{m=1}^M \{ \{x_m^{\langle s_m \rangle}\}_{s_m=1}^{L_m+1} \} \quad (7)$$

и

$$D^{(Y)} = \prod_{n=1}^N D_n^{(Y)}(L_{M+n}) = \prod_{n=1}^N \{ \{y_n^{\langle s_{M+n} \rangle}\}_{s_{M+n}=1}^{L_{M+n}+1} \}. \quad (8)$$

Следует заметить, что в k -м измерении гиперкуба (3) шаг дискретизации равен L_k^{-1} , $k = \overline{1, M+N}$. Также очевидно, что полученная конечная антагонистическая игра

$$\langle D^{(X)}, D^{(Y)}, K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle, \quad \mathbf{X} \in D^{(X)}, \quad \mathbf{Y} \in D^{(Y)} \quad (9)$$

еще не является, вообще говоря, матричной вследствие структуры ее ядра, определяемого на решетке $D^{(X)} \times D^{(Y)}$.

Требования к выбору шагов дискретизации ядра бесконечной антагонистической игры (4). Естественно, шаги дискретизации $\{L_k^{-1}\}_{k=1}^{M+N}$, или числа $\{L_k\}_{k=1}^{M+N}$, не могут выбираться произвольно. Их выбор, определяющий перевод игры (4) в игру (9) посредством отображений гиперкубов (1) и (2) в решетчатые множества (7) и (8), не должен коренным образом повлиять на решение игры (9), которое обязано быть «похожим» на решение игры (4). Для этого необходимо сохранять все характерные особенности ядра исходной бесконечной игры.

Такие особенности представляют собой и частные локальные экстремумы, и точки, где частные производные не существуют, и точки разрыва первого или второго рода. Иными словами, после выбора чисел $\{L_k\}_{k=1}^{M+N}$ в каждом из $\prod_{m=1}^M L_m$ сегментов

$$\{ \{ [x_m^{\langle s_m \rangle}; x_m^{\langle s_m+1 \rangle}] \}_{s_m=1}^{L_m} \}_{m=1}^M \quad (10)$$

и $\prod_{n=1}^N L_{M+n}$ сегментов

$$\{ [y_n^{(s_{M+n})}; y_n^{(s_{M+n+1})}]_{s_{M+n}=1}^{L_{M+n}} \}_{n=1}^N \quad (11)$$

не должно быть ни частных локальных экстремумов, ни точек, где частные производные не существуют, ни точек разрыва первого и второго рода.

Следовательно, непосредственным требованием к выбору шагов дискретизации является такое условие: для всех $s_m = \overline{1}, L_m$ и $s_{M+n} = \overline{1}, L_{M+n}$ должно быть

$$\frac{\partial^{M+N} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_M \partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_N} \geq 0 \text{ или } \frac{\partial^{M+N} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_M \partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_N} \leq 0$$

$$\forall x_m \in [x_m^{(s_m)}; x_m^{(s_m+1)}], \forall y_n \in [y_n^{(s_{M+n})}; y_n^{(s_{M+n+1})}], m = \overline{1}, M \text{ и } n = \overline{1}, N. \quad (12)$$

Однако даже при соблюдении условия (12) может случиться так, что перевод игры (4) в игру (9) нивелирует особенности ядра игры, сопряженные с его быстро осциллирующими значениями в пределах некоторых сегментов из множеств (10) и (11). Отсюда вытекает еще одно важное требование к выбору шагов дискретизации ядра игры: для всех $s_m = \overline{1}, L_m$ и $s_{M+n} = \overline{1}, L_{M+n}$ должно быть

$$\left| \frac{\partial^{M+N} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_M \partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_N} \right| \leq \gamma \quad \forall x_m \in [x_m^{(s_m)}; x_m^{(s_m+1)}],$$

$$\forall y_n \in [y_n^{(s_{M+n})}; y_n^{(s_{M+n+1})}], m = \overline{1}, M \text{ и } n = \overline{1}, N, \quad (13)$$

где γ — допустимая скорость осциллирования ядра игры на каждом из сегментов во множествах (10) и (11). Значение параметра γ выбирается из практических соображений, основанных на размерности значений ядра игры, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma \leq \lambda \cdot \left(\max_{\mathbf{X} \in U_M} \max_{\mathbf{Y} \in U_N} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \min_{\mathbf{X} \in U_M} \min_{\mathbf{Y} \in U_N} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right),$$

где $\lambda \in \{0,001, 0,005, 0,01, 0,05\}$, но элементы этого множества предложены в традиционном перечне и могут быть изменены, если это потребуется. Однако окончательный выбор чисел $\{L_k\}_{k=1}^{M+N}$ и параметров $\{\gamma, \lambda\}$ зависит от того, окажется ли впоследствии приемлемым решение игры (9) в качестве приближенного решения игры (4).

Взаимообратимое преобразование многомерной матрицы антагонистической игры (9) в двухмерную матрицу. После L_m^{-1} -дискретизации m -го измерения чистой стратегии первого игрока и L_{M+n}^{-1} -дискретизации n -го измерения чистой стратегии второго игрока вместо гиперповерхности $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ на единичном гиперкубе (3) получаем $(M+N)$ -мерную матрицу $\mathbf{P} = [p_J]_{\mathcal{F}_{MN}}$ формата

$$\mathcal{F}_{MN} = \prod_{k=1}^{M+N} (L_k + 1)$$

с индексами

$$J = \{j_k\}_{k=1}^{M+N}, \quad j_k \in \{\overline{1}, \overline{L_k + 1}\} \quad \forall k = \overline{1, M+N}, \quad (14)$$

ее элементов

$$\begin{aligned} p_J &= K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad x_m = L_m^{-1}(j_m - 1) \quad \forall m = \overline{1, M}, \\ y_n &= L_{M+n}^{-1}(j_{M+n} - 1) \quad \forall n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Первые M индексов $\{j_m\}_{m=1}^M \subset J$ элемента (15) $(M+N)$ -мерной матрицы $\mathbf{P} = [p_J]_{\mathcal{F}_{MN}}$ соответствуют компонентам чистой стратегии первого игрока, а последние N индексов $\{j_{M+n}\}_{n=1}^N \subset J$ элемента (15) — компонентам чистой стратегии второго игрока. Поэтому $(M+N)$ -мерную матрицу $\mathbf{P} = [p_J]_{\mathcal{F}_{MN}}$ можно переформатировать (осуществить ее преобразование) в обычную двухмерную

$$\mathbf{G} = [g_{uw}]_{\mathcal{F}_2} \quad (16)$$

формата

$$\mathcal{F}_2 = \prod_{m=1}^M (L_m + 1) \times \prod_{n=1}^N (L_{M+n} + 1)$$

с элементами $g_{uw} = p_j$, индексы которых имеют вид

$$u = \sum_{m=1}^M \left(\prod_{m_1=1}^{m-1} (L_{M-m_1+1} + 1) \right) (j_{M-m+1} - \text{sign}(m-1)), \quad (17)$$

$$w = \sum_{n=1}^N \left(\prod_{n_1=1}^{n-1} (L_{M+N-n_1+1} + 1) \right) (j_{M+N-n+1} - \text{sign}(n-1)). \quad (18)$$

Таким образом, вместо бесконечной игры (4) при условиях (12) и (13) для ядра $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ на гиперкубе (3) можно рассмотреть ее аппроксимацию в форме матричной \mathcal{F}_2 -игры

$$\left\langle \{z_u^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M)\}_{u=1}^{Q_1}, \{z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)\}_{w=1}^{Q_2}, \mathbf{G} \right\rangle, \quad (19)$$

в которой чистая стратегия $z_u^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M)$ первого игрока соответствует его стратегии **X** в исходной игре (4) с компонентами

$$\{x_m = L_m^{-1}(j_m - 1)\}_{m=1}^M, \quad Q_1 = \prod_{m=1}^M (L_m + 1),$$

а чистая стратегия $z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)$ второго игрока соответствует стратегии **Y** в игре (4) с компонентами

$$\{y_n = L_{M+n}^{-1}(j_{M+n} - 1)\}_{n=1}^N, \quad Q_2 = \prod_{n=1}^N (L_{M+n} + 1).$$

По индексам (17) и (18) чистых стратегий $z_u^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M)$ и $z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)$ должны однозначно восстанавливаться точки единичных гиперкубов (1) и (2). Это осуществимо с помощью перехода от (17) к индексам $\{j_m\}_{m=1}^M$ и от (18) к индексам $\{j_{M+n}\}_{n=1}^N$ во множестве (14). Такую возможность обеспечивает следующая теорема.

Теорема. Преобразование многомерной матрицы $\mathbf{P} = [p_J]_{\mathcal{F}_{MN}}$ в двухмерную матрицу (16) взаимнообратимо.

Доказательство. Пусть функция $\theta(a, b)$ возвращает дробную часть дроби a/b . Тогда M -й (последний) индекс во множестве $\{j_m\}_{m=1}^M$ определяется так:

$$j_M = \theta(u, L_M + 1) + (L_M + 1)(1 - \text{sign}[\theta(u, L_M + 1)]). \quad (20)$$

Для остальных $M - 1$ индексов индуктивно получаем

$$j_{M-m} = 1 + \theta \left(\frac{u - j_M - \sum_{m_1=1}^{m-1} \left(\prod_{m_2=1}^{m_1} (L_{M-m_2+1} + 1) \right) (j_{M-m_1} - 1)}{\prod_{m_1=1}^m (L_{M-m_1+1} + 1)}, L_{M-m} + 1 \right) \quad (21)$$

при $m = \overline{1, M - 1}$. Аналогично по индексу (18) чистой стратегии $z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)$ восстанавливается точка гиперкуба (2), индексы $\{j_{M+n}\}_{n=1}^N$ которой находятся в том же порядке, начиная с последнего:

$$j_{M+N} = \theta(w, L_{M+N} + 1) + (L_{M+N} + 1)(1 - \text{sign}[\theta(w, L_{M+N} + 1)]), \quad (22)$$

$$j_{M+N-n} = 1 +$$

$$+ \theta \left(\frac{w - j_{M+N} - \sum_{n_1=1}^{n-1} \left(\prod_{n_2=1}^{n_1} (L_{M+N-n_2+1} + 1) \right) (j_{M+N-n_1} - 1)}{\prod_{n_1=1}^n (L_{M+N-n_1+1} + 1)}, L_{M+N-n} + 1 \right) \quad (23)$$

при $n = \overline{1, N-1}$. Итак, соотношения (17), (20), (21) устанавливают взаимоднозначное соответствие (отображение) первого индекса каждого элемента матрицы (16) и первых M индексов каждого элемента матрицы $\mathbf{P} = [p_J]_{\mathcal{F}_{MN}}$, а соотношения (18), (22), (23) устанавливают взаимоднозначное соответствие (отображение) второго индекса каждого элемента матрицы (16) и последних N индексов каждого элемента матрицы $\mathbf{P} = [p_J]_{\mathcal{F}_{MN}}$. Теорема доказана.

Слабая согласованность спектров оптимальных стратегий игроков. Обозначим решение матричной \mathcal{F}_2 -игры (19) через множество

$$\{ \{ p_* (z_u^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M)) \}_{u=1}^{Q_1}, \{ q_* (z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)) \}_{w=1}^{Q_2} \}, \quad (24)$$

в котором $p_* (z_u^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M))$ — оптимальная вероятность применения первым игроком его чистой стратегии $z_u^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M)$, а $q_* (z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N))$ — оптимальная вероятность применения вторым игроком его чистой стратегии $z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)$. Теперь необходимо установить, насколько приемлемо решение (24) матричной \mathcal{F}_2 -игры (19), являющейся аппроксимацией бесконечной антагонистической игры (4). Для этого необходимо провести анализ структуры решения (24) и порождаемого им оптимального значения $v_*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})$ в \mathcal{F}_2 -игре (19).

Пусть спектр оптимальной стратегии первого игрока в \mathcal{F}_2 -игре (19) представляет собой множество

$$\{ z_{u_i}^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M) \}_{i=1}^{Q_1^*}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}), \{ u_i \}_{i=1}^{Q_1^*} \subset \left\{ 1, \prod_{m=1}^M (L_m + 1) \right\}, \quad (25)$$

а спектр оптимальной стратегии второго игрока в этой же игре — множество

$$\{ z_{w_l}^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N) \}_{l=1}^{Q_2^*}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}), \{ w_l \}_{l=1}^{Q_2^*} \subset \left\{ 1, \prod_{n=1}^N (L_{M+n} + 1) \right\}. \quad (26)$$

Тогда оба игрока в своих оптимальных стратегиях во множестве (24) обладают наборами ненулевых вероятностей

$$\{ p_* (z_{u_i}^{(X)}(\{L_m\}_{m=1}^M)) \}_{i=1}^{Q_1^*}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}), \quad (27)$$

$$\{ q_* (z_{w_l}^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)) \}_{l=1}^{Q_2^*}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}), \quad (28)$$

на которых и достигается оптимальное значение \mathcal{F}_2 -игры (19):

$$v_* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) = \sum_{u=1}^{Q_1} \sum_{w=1}^{Q_2} g_{uw} \cdot p_* (z_u^{(X)} (\{L_m\}_{m=1}^M)) \cdot q_* (z_w^{(Y)} (\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{Q_1^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} \left(\sum_{l=1}^{Q_2^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} g_{u_i w_l} \cdot p_* (z_{u_i}^{(X)} (\{L_m\}_{m=1}^M)) \cdot q_* (z_{w_l}^{(Y)} (\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)) \right). \quad (29)$$

Очевидно, что решение (24) можно считать приближенным решением игры (4) только тогда, когда при минимальном уменьшении шагов дискретизации $\{L_k^{-1}\}_{k=1}^{M+N}$ мощность спектра оптимальной стратегии не уменьшится:

$$Q_r^* (\{L_k + 1\}_{k=1}^{M+N}) \geq Q_r^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (30)$$

Это лишь одно из необходимых условий приемлемости решения (24). Еще одно условие приемлемости, более естественное, следующее: значение новой матричной игры, получаемой минимальным уменьшением шагов дискретизации $\{L_k^{-1}\}_{k=1}^{M+N}$, изменяется относительно значения (29) не больше, чем в случае, если бы шаги дискретизации были минимально увеличены:

$$\left| v_* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - v_* (\{L_k + 1\}_{k=1}^{M+N}) \right| \leq \left| v_* (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - v_* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) \right|. \quad (31)$$

Естественно, условий (30) и (31) недостаточно для принятия решения (24) в качестве приближенного решения игры (4). Например, при выполнении неравенства (30) запрещается приемлемому решению уменьшать спектральное наполнение в оптимальной стратегии каждого из игроков, однако это не информирует о том, как изменяется спектральное наполнение при минимальном изменении шагов дискретизации. При минимальном уменьшении шагов дискретизации плотность точек с ненулевыми вероятностями их выбора на соответствующем единичном гиперкубе в некоторых местах может и уменьшиться, несмотря на выполненное условие (30).

Следовательно, необходимы дополнительные условия, при выполнении которых оптимальные стратегии игроков будут достаточно «близкими», по крайней мере, в наименьших окрестностях шагов дискретизации $\{L_k^{-1}\}_{k=1}^{M+N}$. Для формулировки этих условий рассмотрим ломаную гиперповерхность $h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N})$, вершинами которой являются точки

$$\{\{L_m^{-1}(j_m - 1)\}_{m=1}^M, p_* (z_u^{(X)} (\{L_m\}_{m=1}^M))\}$$

в пространстве \mathbb{R}^{M+1} , и ломаную $h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N})$, вершинами которой являются точки

$$\{L_{M+n}^{-1}(j_{M+n} - 1)\}_{n=1}^N, q^*(z_w^{(Y)}(\{L_{M+n}\}_{n=1}^N)),$$

в пространстве \mathbb{R}^{N+1} .

Выделим ненулевые вершины ломаных гиперповерхностей $h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N})$ и $h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N})$ в качестве точек гиперкубов (1) и (2), соответствующих множествам (27) и (28). Применяя операции обратной индексации (20) — (23), индексу u_i из (27) сопоставим точку

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) &= [x_m^{(i)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]_{1 \times M} = \\ &= [L_m^{-1}(j_m^{(i)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1)]_{1 \times M} \in U_M, \quad i=1, \overline{Q_1^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})}, \end{aligned} \quad (32)$$

а индексу w_l из (28) — точку

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_l(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) &= [y_n^{(l)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]_{1 \times N} = \\ &= [L_{M+n}^{-1}(j_{M+n}^{(l)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1)]_{1 \times N} \in U_N, \quad l=1, \overline{Q_2^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})}. \end{aligned} \quad (33)$$

В дополнение к этому выполним сортировку точек (32) и (33) для их преобразования во множества

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{X}}_i(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})\}_{i=1}^{Q_1^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} &= \\ &= \{[L_m^{-1}(j_m^{(i)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1)]_{1 \times M}\}_{i=1}^{Q_1^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} = \\ &= \{\mathbf{X}_i(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})\}_{i=1}^{Q_1^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{Y}}_l(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})\}_{l=1}^{Q_2^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} &= \\ &= \{[L_{M+n}^{-1}(j_{M+n}^{(l)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1)]_{1 \times N}\}_{l=1}^{Q_2^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} = \\ &= \{\mathbf{Y}_l(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})\}_{l=1}^{Q_2^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})} \end{aligned} \quad (35)$$

так, чтобы минимум

$$\min_{i_1 \in \{i+1, Q_1^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})\}} \sqrt{\sum_{m=1}^M L_m^{-2} [j_m^{(i)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - j_m^{(i_1)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]^2} \quad (36)$$

был достигнут при $i_1 = i+1$ для каждого $i=1, \overline{Q_1^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1}$, а минимум

$$\min_{i_1 \in \{l+1, \overline{Q_2^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})}\}} \sqrt{\sum_{n=1}^N L_{M+n}^{-2} [\bar{j}_{M+n}^{(l)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_{M+n}^{(i_1)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]^2} \quad (37)$$

достигался при $l_1 = l+1$ для каждого $l=1, \overline{Q_2^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1}$. Далее можно оперировать понятиями «близости» спектров оптимальных стратегий игроков (25) и (26), подразумевая различные метрики функциональных пространств на гиперкубах (1) и (2).

Определение 1. Решение (24) матричной \mathcal{F}_2 -игры (19) называется слабо согласованным для приближенного решения игры (4), если вместе с неравенствами (30) и (31) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{i \in \{1, \overline{Q_1^* (\{L_k+1\}_{k=1}^{M+N}) - 1}\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{m=1}^M \frac{[\bar{j}_m^{(i)} (\{L_k+1\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_m^{(i+1)} (\{L_k+1\}_{k=1}^{M+N})]^2}{(L_m+1)^2}} \right\}} \leq \\ & \leq \frac{\max_{i \in \{1, \overline{Q_1^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1}\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{m=1}^M L_m^{-2} [\bar{j}_m^{(i)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_m^{(i+1)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]^2} \right\}}, \\ & \frac{\max_{l \in \{1, \overline{Q_2^* (\{L_k+1\}_{k=1}^{M+N}) - 1}\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{[\bar{j}_{M+n}^{(l)} (\{L_k+1\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_{M+n}^{(l+1)} (\{L_k+1\}_{k=1}^{M+N})]^2}{(L_{M+n}+1)^2}} \right\}} \leq \\ & \leq \frac{\max_{l \in \{1, \overline{Q_2^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1}\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{n=1}^N L_{M+n}^{-2} [\bar{j}_{M+n}^{(l)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_{M+n}^{(l+1)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]^2} \right\}}, \end{aligned} \quad (38)$$

неравенства

$$\begin{aligned} & \left| h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - h_1(u, \{L_k+1\}_{k=1}^{M+N}) \right| \leq \\ & \leq \left| h_1(u, \{L_k-1\}_{k=1}^{M+N}) - h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) \right|, \\ & \left| h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - h_2(w, \{L_k+1\}_{k=1}^{M+N}) \right| \leq \\ & \leq \left| h_2(w, \{L_k-1\}_{k=1}^{M+N}) - h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) \right| \end{aligned} \quad (39)$$

соответственно на гиперкубах U_M и U_N и неравенства

$$\begin{aligned} & \left\| h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - h_1(u, \{L_k + 1\}_{k=1}^{M+N}) \right\| \leq \\ & \leq \left\| h_1(u, \{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) \right\|, \\ & \left\| h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - h_2(w, \{L_k + 1\}_{k=1}^{M+N}) \right\| \leq \\ & \leq \left\| h_2(w, \{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N}) \right\| \end{aligned} \quad (40)$$

соответственно в пространствах $\mathbb{L}_2(U_M)$ и $\mathbb{L}_2(U_N)$.

Вопрос о том, можно ли считать приемлемым слабо согласованное решение, остается дискуссионным. С одной стороны, если решение (24) матричной \mathcal{F}_2 -игры (19) слабо согласовано, то при минимальном уменьшении шагов дискретизации ни мощность спектра оптимальной стратегии, ни плотность точек с ненулевыми вероятностями их выбора на соответствующем единичном гиперкубе согласно (38) не уменьшится. А согласно (39) и (40) при минимальном уменьшении шагов дискретизации ломаная гиперповерхность, аппроксимирующая спектральное наполнение оптимальной стратегии игрока, изменится не больше, чем если бы шаги дискретизации были минимально увеличены. Это же касается и значений $v_*(\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N})$ и $v_*(\{L_k + 1\}_{k=1}^{M+N})$ «соседних» матричных игр. С другой стороны, неизвестно, что происходит с мощностями спектров оптимальных стратегий игроков при минимальном увеличении шагов дискретизации.

Сильная согласованность спектров оптимальных стратегий игроков. Слабая согласованность согласно (30) и (38) предусматривает уход дискретизации «вправо». Видимо, ее можно усилить, предусмотрев также и уход «влево». Потребуем, чтобы для сильно согласованного решения при минимальном увеличении шагов дискретизации ни мощность спектра оптимальной стратегии, ни плотность точек с ненулевыми вероятностями их выбора на соответствующем единичном гиперкубе не увеличилась.

Определение 2. Слабо согласованное решение (24) матричной \mathcal{F}_2 -игры (19) называется согласованным для приближенного решения игры (4), если выполнены неравенства

$$Q_r^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) \geq Q_r^*(\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}), \quad r \in \{1, 2\}, \quad (41)$$

$$\max_{i \in \{1, Q_1^*(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1\}} \left\{ \sqrt{\sum_{m=1}^M L_m^{-2} [j_m^{(i)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - j_m^{(i+1)}(\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]^2} \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{\max_{i \in \{1, Q_1^* (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - 1\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{m=1}^M \frac{[\bar{j}_m^{(i)} (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_m^{(i+1)} (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N})]^2}{(L_m - 1)^2}} \right\}}, \\
 &\frac{\max_{l \in \{1, Q_2^* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - 1\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{n=1}^N L_{M+n}^{-2} [\bar{j}_{M+n}^{(l)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_{M+n}^{(l+1)} (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})]^2} \right\}} \leq \\
 &\leq \frac{\max_{l \in \{1, Q_2^* (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - 1\}}}{\left\{ \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{[\bar{j}_{M+n}^{(l)} (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N}) - \bar{j}_{M+n}^{(l+1)} (\{L_k - 1\}_{k=1}^{M+N})]^2}{(L_{M+n} - 1)^2}} \right\}}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

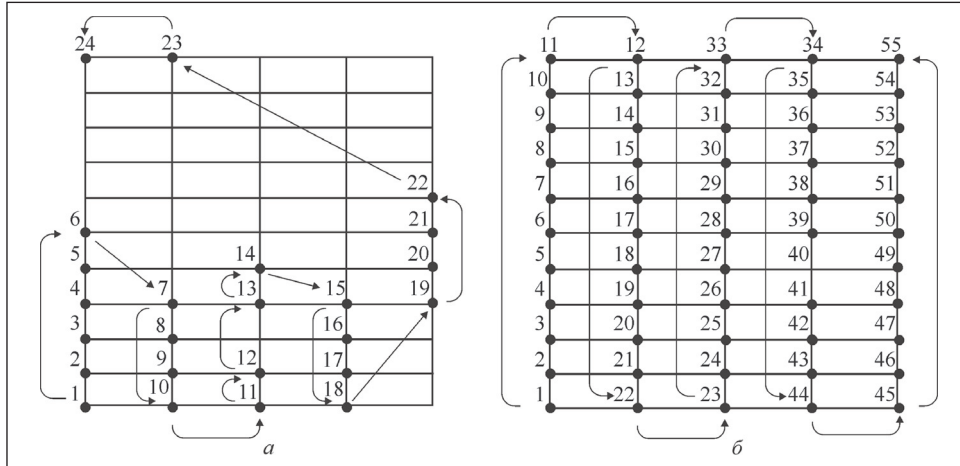
Выполняемый посредством дискретизации по (5) и (6) перевод (отображение) бесконечной антагонистической игры (4) в матричную игру (19) сохраняет все особенности гиперповерхности $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ как ядра игры не только в результате контроля неравенств (12) и (13), но и с помощью (слабой) согласованности решения игры (19). Фактически проверка условий (30), (31), (38)—(42) дополняет требования к выбору шагов дискретизации. Если полученное решение не окажется хотя бы слабо согласованным, шаги дискретизации придется уменьшить.

Следует заметить, что если условие (12) для всех $s_m = \overline{1, L_m}$ и $s_{M+n} = \overline{1, L_{M+n}}$ вдоль некоторых измерений гиперкуба (3) невыполнимо, то на этих измерениях константы дискретизации следует увеличить на единицу. Вообще говоря, требование (12) можно заменить требованием (13), так как частные локальные экстремумы вдоль измерения необязательно должны располагаться в точках дискретизации, что будет приводить к невыполнению требования (12).

Для принятия решения (24) игры (19) в качестве приближенного решения игры (4) следует проверить согласованность спектров оптимальных стратегий игроков, составляющих это решение. При этом основные вычислительные затраты будут связаны с сортировкой множеств (34) и (35) для решения соответствующих минизадч (36) и (37). Незначительное сокращение этих затрат возможно при рациональном выборе начальной точки (см. рисунок *a*), но для вполне смешанных стратегий это несущественно (см. рисунок *b*).

Поскольку существование и равенство предела

$$\lim_{\substack{L_k \rightarrow \infty \\ \forall k=1, M+N}} v_* (\{L_k\}_{k=1}^{M+N})$$



Примеры решения задачи сортировки спектрального наполнения (•) оптимальной смешанной стратегии игрока с 24-элементным спектром (а) и тривиального решения этой задачи для оптимальной вполне смешанной стратегии игрока (б) в пространстве \mathbb{R}^2 при $\{4^{-1}, 10^{-1}\}$ -дискретизации этих стратегий

оптимальному значению исходной игры (4) не доказано, и пока отсутствует доказательство того, что ломаные гиперповерхности

$$\lim_{\substack{L_k \rightarrow \infty \\ \forall k=1, M+N}} h_1(u, \{L_k\}_{k=1}^{M+N})$$

и

$$\lim_{\substack{L_k \rightarrow \infty \\ \forall k=1, M+N}} h_2(w, \{L_k\}_{k=1}^{M+N})$$

будут сколь угодно близкими в смысле соответствующих функциональных пространств к оптимальным стратегиям игроков в исходной игре (4), обнаружение согласованности спектров оптимальных стратегий игроков не гарантирует безупречности приближенного решения [13]. Поэтому прежде чем выполнять ресурсоемкую сортировку типа (34)—(37) для проверки неравенств (42), следует проверить наличие слабой согласованности. Переход к согласованности свидетельствует о том, что в минимальной окрестности шагов дискретизации мощность спектра оптимальной стратегии не убывает и наблюдается невозрастающее расхождение между плотностью точек спектра оптимальной стратегии каждого игрока. Тем не менее, приближенность даже слабо согласованного решения (24) практически более реализуема, чем бесконечные спектры [14].

Выводы

Для получения приближенного решения игры (4) на единичном гиперкубе (3) необходимо выполнить $\{L_k^{-1}\}_{k=1}^{M+N}$ -дискретизацию по (5) и (6) и, получив конечную антагонистическую игру (9), перейти к матричной \mathcal{F}_2 -игре (19), используя доказанную теорему. Вынужденный перевод бесконечной антагонистической игры (4) на единичном гиперкубе (3) в матричную \mathcal{F}_2 -игру (19) подразумевает не только нахождение приближенного решения игры (4), но и его практическую реализацию.

Предлагаемая дискретизация бесконечной антагонистической игры (4) на единичном гиперкубе (3) актуальна и для неизмеримых ядер $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, даже если некоторые из требований (12) и (13) окажутся невыполнимыми. Тогда по приближенному решению игры (4) можно оценить исход моделируемого конфликта.

A three-stage method is presented for obtaining the approximate solution of the infinite antagonistic game on unit hypercube with specified uniform sampling of the game kernel along each of the cube dimensions. After the sampling in accordance with the suggested requirements is accomplished, mutually invertible reshaping of the game multidimensional matrix into the two-dimensional matrix is implemented, whereupon the approximate solution results. Admissibility of this solution is estimated over the consistency of the players' optimal strategies supports, where its variation is restricted within minimal neighborhood of the sampling steps.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений: Пер. с нем. — М. : Мир, 1990. — 208 с.
2. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навчальний посібник. — Київ : ВПЦ «Київський університет», 2010. — 336 с.
3. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М. : Наука, 1985. — 272 с.
4. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.
5. Belenky A.S. A 3-person Game on Polyhedral Sets // Computers & Mathematics with Applications. — 1994. — Vol. 28, Iss. 5. — P. 53—56.
6. Яновская Е.Б. Об антагонистических играх, разыгрываемых на функциональных пространствах // Литовский математический сборник. — 1967. — № 3. — С. 547—557.
7. Романюк В.В. Регулярна оптимальна стратегія проектувальника у моделі дії нормованого одичного навантаження на N -колонну будівельну конструкцію-опору // Проблеми трибології. — 2011. — № 2. — С. 111—114.
8. Романюк В.В. Узагальнена модель усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу як континуальна антагоністична гра на $(2N - 2)$ -вимірному паралелепіпеді з мінімізацією максимального дисбалансу // Вісн. Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2011. — № 3. — С. 45—60.
9. Romanuk V.V. Coming up at the Left Off-bound Projector Optimal Strategy in Support Construction with Four Props under Unit-normed Uncertain Squeezes // Зб. наук. праць Ін-ту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. — 2011. — Вип. 60. — С. 76—82.

10. *Romanuke V.V.* Optimal Strategies Continuum for Projecting the Four-mount Construction under Interval Uncertainties with Incorrectly Pre-evaluated Two Left and One Right End-points // *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* — 2012. — № 1. — С. 92—96.
11. *Яновская Е.Б.* Теоремы о минимаксах для игр на единичном квадрате // *Теория вероятностей и ее применения.* — 1964. — 9, вып. 3. — С. 554—555.
12. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семин Е.А.* Теория игр: учеб. пособие для ун-тов. — М. : Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.
13. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М. : Наука, 1984. — 496 с.
14. *Romanuke V.V.* Method of Practicing the Optimal Mixed Strategy with Innumerable Set in its Spectrum by Unknown Number of Plays // *Measuring and Computing Devices in Technological Processes.* — 2008. — № 2. — P. 196—203.
15. *Ushakov V.N., Khripunov A.P.* Approximate Construction of Solutions in Game-theoretic Control Problems // *J. of Applied Mathematics and Mechanics.* — 1997. — Vol. 61, Iss. 3. — P. 401 — 408.

Поступила 14.01.14;
после доработки 06.03.14

РОМАНИЮК Вадим Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики и социальной информатики Хмельницкого национального университета. В 2001 г. окончил Технологический университет Подолья (г. Хмельницкий). Область научных исследований — моделирование конфликтно-управляемых явлений, методы принятия решений и классификации, нейросетевое моделирование.

