
УДК 519.6

Ю.В. Кравченко, д-р техн. наук
Государственный университет телекоммуникаций
(Украина, Киев, ул. Соломенская, 7, тел. 095 0688625),

М.Ю. Ракушев, канд. техн. наук
Национальный университет обороны Украины им. Ивана Черняховского
(Украина, Киев, пр-т Воздухофлотский, 28,
тел. 067 2252363, r16mu0977@meta.ua)

Устойчивость дифференциального спектра системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Получены мажорантные оценки зависимости погрешностей рекуррентного расчета T -спектра для однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами от погрешностей представления вещественных чисел в ЭВМ с плавающей запятой. Исходя из условия устойчивости T -спектра определены ограничения на число рассчитываемых T -дискрет с учетом длины мантиссы чисел, используемых при расчете.

Отримано мажорантні оцінки залежності похибок рекуррентного розрахунку T -спектру для однорідної системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами від похибок зображення дійсних чисел в ЕОМ із плаваючою комою. Згідно з умовою стійкості T -спектру визначено обмеження на кількість T -дискрет, виходячи з довжини мантиси чисел, що використовуються при розрахунку.

К л ю ч е в ы е с л о в а: дифференциальные преобразования, T -спектр, область устойчивости, система обыкновенных дифференциальных уравнений.

При использовании численных методов для решения математических задач необходимо различать свойства задачи и свойства вычислительного алгоритма, предназначенного для ее решения. Так, следует отдельно рассматривать вопросы о существовании и единственности решения математической задачи и о том, что оно непрерывно зависит от входных данных. Последнее свойство называется также устойчивостью относительно входных данных. Хорошо известны определение и методы исследования существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Хорошие свойства исходной математической задачи не гарантируют хороших свойств численного метода ее

© Ю.В. Кравченко, М.Ю. Ракушев, 2015

решения. Поэтому свойства численных методов для решения таких задач требуют отдельного изучения [1].

Метод дифференциальных преобразований является математическим методом прикладного анализа, который позволяет решать интегро-дифференциальные задачи в численном, аналитическом и численно-аналитическом видах. Одна из основных отличительных характеристик дифференциальных преобразований — возможность рекуррентного вычисления коэффициентов дифференциального спектра (T -спектра) решаемой задачи. По сути, это коэффициенты ряда Тейлора. Такой расчет методически просто реализуется в виде соответствующих подпрограмм на ЭВМ, при этом методическая сложность аналитических действий (взятие соответствующих производных в явном виде) заменяется вычислительной сложностью рекуррентных зависимостей. Указанное свойство метода дифференциальных преобразований существенно влияет на возможность его применения для решения интегро-дифференциальных задач [2, 3].

Устойчивость вычислительных схем решения задачи Коши для системы ОДУ, разработанных на основе дифференциальных преобразований (как и для других численных методов интегрирования ОДУ), исследована для однородных систем линейных ОДУ (СЛОДУ) с постоянными коэффициентами (ПК) [4, 5]. Однако в работах [4, 5] рассмотрены только характеристики устойчивости разностной схемы интегрирования, а именно распространение ошибок от одного шага интегрирования к другому. При этом не проводилось исследование устойчивости рекуррентного расчета T -спектра на одном шаге интегрирования.

Основная часть математических операций, реализуемых на ЭВМ и, как следствие, основной вклад в вычислительную сложность решения задачи Коши для системы ОДУ методом дифференциальных преобразований выполняется при рекуррентном вычислении T -спектра [6, 7]. Известно, что все математические операции на ЭВМ вследствие конечной длины мантиссы используемых в ней чисел выполняются с ошибками округления. Поэтому необходимо исследовать численные алгоритмы для определения влияния этих ошибок на результат расчета [1, 8].

Постановка задачи и ее решение. На основании изложенного представляется весьма актуальным исследование устойчивости численного расчета T -спектра СЛОДУ с ПК, т.е. получение оценок зависимости погрешностей рекуррентного расчета T -спектра СЛОДУ с ПК от погрешностей представления вещественных чисел в ЭВМ с плавающей запятой.

Задача Коши для однородной СЛОДУ с ПК имеет вид [1]

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0, \quad u(t=0) = u_0, \quad (1)$$

где $u = (u_{j_1})_n$ — вектор размером n с элементами u_{j_1} , $j_1 = 1, \dots, n$; $A = (a_{j_1 j_2})_{n \times n}$ — невырожденная квадратная матрица ($\det A \neq 0$) размером $n \times n$ с индексами элементов; j_1 и j_2 — строка и столбец.

Дифференциальными преобразованиями называют функциональные преобразования вида [3]:

$$Z(k) = \frac{h^k}{k!} \left[\frac{d^k z(t)}{dt^k} \right]_{t_*}, \quad (2)$$

$$z(t) \approx \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{(t-t_*)^k}{h^k} Z(k), \quad (3)$$

где t — аргумент, по которому выполняется преобразование; t_* — значение аргумента, при котором выполняется преобразование; h — отрезок аргумента, на котором рассматривается функция $z(t)$; k — целочисленный аргумент, $k = 0, 1, \dots$; $Z(k)$ — дискретная функция по аргументу k ; k_{\max} — максимальный номер, учитываемый при восстановлении T -дискретности. Без потери общности дальнейших выкладок будем рассматривать дифференциально-тейлоровские преобразования.

Выражение (2) представляет собой прямое преобразование, позволяющее по оригиналу $z(t)$ найти изображение $Z(k)$. Обратное преобразование, восстанавливающее оригинал $z(t)$ в виде отрезка ряда Тейлора, определяется выражением (3). Множество значений (изображений) $Z(k)$ принято называть T -спектром, а значение функции $Z(k)$ при конкретных значениях аргумента k — дискретами T -спектра (T -дискретами) [3].

Без потери общности дальнейших выкладок рассмотрим явную (самую простую на основе (2), (3)) T -схему интегрирования СЛОДУ (1) на равномерной вычислительной сетке $\omega_i = \{t_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots\}$ (для упрощения дальнейших выкладок все операции проводятся в матричном виде) [2, 3, 6, 7]:

$$U(0) = u_i, t_i = ih,$$

$$U(k+1) = \frac{h}{k+1} AU(k), k = 0, \dots, k_{\max} - 1, \quad (4)$$

$$u_{i+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} U_i(k), \quad (5)$$

где u_i — сеточная функция, принимаемая в качестве решения (1) на ω_i ; $U(k)$ — T -дискреты решения (1) на ω_i ; h — шаг вычислительной сетки ω_i по независимой переменной ОДУ; k_{\max} — максимальный номер учитываемой при восстановлении T -дискреты.

Для СЛОДУ (1) справедливо тождество (точное решение (1), записанное с помощью матричной экспоненты) [9]

$$U(k_{\max}) = \frac{H^{k_{\max}}}{k_{\max}!} A^{k_{\max}} U(0). \quad (6)$$

При вычислении на ЭВМ реализация каждой математической операции неизбежно сопровождается ошибкой счета (округления). Следовательно, результаты расчета (6) на основании рекуррентной формулы (4) не будут тождественны, а именно $\tilde{U}(k_{\max}) \neq U(k_{\max})$, где $\tilde{U}(k_{\max})$ и $U(k_{\max})$ — T -дискреты численного и точного решений (4).

Оценим количественно влияние такой ошибки, используя подход называемый обратным анализом ошибок [8]. Положим, что расчет согласно (4) на ЭВМ выполнен точно, но при некоторых возмущенных данных. На основании этого запишем исходные данные (4) (полагая, что возмущения внесены только в матрицу A) в виде

$$\tilde{U}(k+1) = \frac{h}{k+1} \tilde{A}_k \tilde{U}(k), \quad U(0) = u_i, \quad k = 0, \dots, k_{\max} - 1, \quad (7)$$

$$\tilde{U}(k) = U(k) + \delta U(k), \quad (8)$$

$$\tilde{A}_k = A + \delta A_k, \quad (9)$$

где $\tilde{U}(k)$ и $\delta U(k)$ — возмущенные T -дискреты и возмущения, внесенные в T -дискрету (4); \tilde{A}_k и δA_k — возмущенная матрица и возмущение, внесенное в эту матрицу при рекуррентном вычислении $k + 1$ -й T -дискреты. Запишем (7) с учетом (9), используя метод математической индукции (результат подобен (6)):

$$\begin{aligned} \tilde{U}(k_{\max}) &= \frac{h}{k_{\max}} (A + \delta A_{k_{\max}}) \tilde{U}(k_{\max} - 1) \Rightarrow \tilde{U}(k_{\max}) = \\ &= \frac{h^2}{k_{\max}(k_{\max} - 1)} (A + \delta A_{k_{\max}})(A + \delta A_{k_{\max} - 1}) \tilde{U}(k_{\max} - 2) \Rightarrow \tilde{U}(k_{\max}) = \\ &= \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} \left(\prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (A + \delta A_k) \right) U(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку ошибки счета малы, положим

$$\|A^{-1}\| \|\delta A_k\| < 1. \quad (11)$$

Здесь $\|\cdot\|$ — оператор нормы (далее рассматриваются нормы матриц, согласованные с нормами векторов). Из (10) с учетом (8), (9) получаем [8]

$$\begin{aligned} \delta U(k_{\max}) &= \tilde{U}(k_{\max}) - U(k_{\max}) = \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} \left(\prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (A + \delta A_k) \right) U(0) - \\ &- \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} A^{k_{\max}} U(0) \Rightarrow \delta U(k_{\max}) = \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} \left(\left(\prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (A + \delta A_k) \right) - A^{k_{\max}} \right) U(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta U(k_{\max}) &= \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} \left(\left(A^{k_{\max}} \prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (E + A^{-1} \delta A_k) \right) - A^{k_{\max}} \right) U(0) \Rightarrow \delta U(k_{\max}) = \\ &= \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} A^{k_{\max}} \left(\left(\prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (E + A^{-1} \delta A_k) \right) - E \right) U(0), \end{aligned} \quad (12)$$

где E — единичная матрица. Рассмотрим матрицу

$$\prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (E + A^{-1} \delta A_k) - E,$$

для которой с учетом (11) справедлива оценка

$$\left\| \left(\prod_{k=0}^{k_{\max}-1} (E + A^{-1} \delta A_k) \right) - E \right\| \leq \prod_{k=0}^{k_{\max}-1} \|A^{-1}\| \|\delta A_k\| = \|A^{-1}\| \prod_{k=0}^{k_{\max}-1} \|\delta A_k\|. \quad (13)$$

Согласно (4) получаем

$$U(0) = \frac{k_{\max}!}{h^{k_{\max}}} A^{-k_{\max}} U(k_{\max}) \Rightarrow \|U(0)\| \leq \frac{k_{\max}!}{h^{k_{\max}}} \|A^{-1}\|^{k_{\max}} \|U(k_{\max})\|. \quad (14)$$

С учетом (13) и (14) из (12) следует

$$\begin{aligned} \|\delta U(k_{\max})\| &\leq \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} \|A\|^{k_{\max}} \|A^{-1}\| \left(\sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \|\delta A_k\| \right) \|U(0)\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\delta U(k_{\max})\| &\leq \frac{h^{k_{\max}}}{k_{\max}!} \|A\|^{k_{\max}} \|A^{-1}\| \left(\sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \|\delta A_k\| \right) \frac{k_{\max}!}{h^{k_{\max}}} \|A^{-1}\|^{k_{\max}} \|U(k_{\max})\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\|\delta U(k_{\max})\|}{\|U(k_{\max})\|} &\leq \|A\|^{k_{\max}} \|A^{-1}\|^{k_{\max}} \|A^{-1}\| \left(\sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \|\delta A_k\| \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta U(k_{\max})\|}{\|U(k_{\max})\|} \leq M_A^{k_{\max}} \|A^{-1}\| \left(\sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \|\delta A_k\| \right), \quad (15)$$

где $M_A = \|A\| \|A^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы A , имеющее следующие свойства [1]:

$$M_A \geq \frac{\max |\lambda(A)|}{\min |\lambda(A)|} \geq 1, \quad (16)$$

где $\lambda(A)$ — собственные числа матрицы A . При этом для СЛОДУ (1) при $n=1$ неравенство (16) используется как равенство $M_A=1$.

Положим, что вносимое на каждой итерации (4) возмущение матрицы A удовлетворяет условию

$$\|\delta A_k\| \leq \|\delta A\|. \quad (17)$$

С учетом (17) запишем (15) (отбрасывая величины большего порядка малости) в виде неравенства

$$\frac{\|\delta U(k_{\max})\|}{\|U(k_{\max})\|} \leq k_{\max} M_A^{k_{\max}} \|A^{-1}\| \|\delta A\|, \quad (18)$$

где левая часть является относительной ошибкой рекуррентного расчета T -спектра СЛОДУ (1). Зависимость (18) описывает влияние погрешности округления (возмущения матрицы A) на относительную погрешность рекуррентного расчета T -спектра СЛОДУ (1) на основании (4).

Оценим количественно величину $\|\delta A\|$, используя подход, называемый прямым анализом ошибок [8], согласно которому рассматриваемые выражения записываются и анализируются по правилам машинной арифметики. В подавляющем большинстве практических задач при проведении арифметических операций на ЭВМ используется представление чисел в системе с плавающей запятой, для которой ошибки представления чисел в ЭВМ и ошибки округления при выполнении арифметических операций (*, /, ±) имеют вид [1, 8]

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} = |\varepsilon_x| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} p^{-q+1}, \quad (19)$$

где ε_x и ε — относительная ошибка представления числа x в ЭВМ и ее максимальное значение; q — число разрядов мантиссы; p — основание системы счисления.

Раскроем векторные выражения в (4) по элементам:

$$U(k+1) = \frac{h}{k+1} AU(k) \Rightarrow (U_{j_1}(k+1))_n = \frac{h}{k+1} (a_{j_1 j_2})_{n \times n} (U_{j_1}(k))_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{j_1}(k+1) = \frac{h}{k+1} \sum_{j_2=1}^n a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k), \quad j_1 = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где $U_{j_1}(k)$ — T -дискрета соответствующего элемента вектора. Запишем (20) в виде алгоритма, реализуемого на ЭВМ (оператор суммы вычисляется рекуррентно в цикле) по правилам машинной арифметики [1, 8]. Положим, что при вычислениях не возникает чисел меньше машинного нуля и больше машинной бесконечности:

$$\tilde{U}_{j_1}(k+1) = fl \left(fl \left(\frac{\tilde{h}}{k+1} \right) \tilde{z}_n \right),$$

$$\tilde{z}_{j_2} = fl(\tilde{z}_{j_2-1} + fl(a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k))), \quad z_0 = 0, \quad j_2 = 1, \dots, n, \quad (21)$$

где $fl(\dots)$ — конечная дробь, получаемая после округления мантиссы числа аргумента с плавающей запятой до q -го разряда после запятой. С учетом вносимых ошибок при проведении каждой арифметической операции запишем (21) в виде

$$\tilde{U}_{j_1}(k+1) = \frac{h}{k+1} (1 + \varepsilon_{n+2}) \tilde{z}_n (1 + \varepsilon_{n+1}),$$

$$\tilde{z}_{j_2} = (1 + \varepsilon_{j_2}) \tilde{z}_{j_2-1} + a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) (1 + \varepsilon_{j_2}) (1 + \xi_{j_2}), \quad z_0 = 0, \quad j_2 = 1, \dots, n, \quad (22)$$

где $\varepsilon_{\dots}, \xi_{\dots}$ — относительные ошибки представления чисел в ЭВМ (19).

Второе уравнение (22) является разностным уравнением первого порядка, решение которого имеет вид [1]

$$\tilde{z}_n = \sum_{j_2=1}^n \left(\left[\prod_{d=j_2+1}^n (1 + \varepsilon_d) \right] a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) (1 + \varepsilon_{j_2}) (1 + \xi_{j_2}) \right). \quad (23)$$

С учетом (23) запишем решение (22) в виде

$$\tilde{U}_{j_1}(k+1) = \frac{H}{k+1} (1 + \varepsilon_{n+2}) (1 + \varepsilon_{n+1}) \times$$

$$\times \sum_{j_2=1}^n \left(\left[\prod_{d=j_2+1}^n (1 + \varepsilon_d) \right] a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) (1 + \varepsilon_{j_2}) (1 + \xi_{j_2}) \right). \quad (24)$$

Поскольку для ошибок округления выполняются условия $\varepsilon_{j_1} \ll 1, \xi_{j_1} \ll 1$, из (24), пошагово отбрасывая величины большего порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{j_1}(k+1) &\approx \frac{h}{k+1}(1+\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}) \times \\ &\times \sum_{j_2=1}^n \left(\left[1 + \sum_{d=j_2+1}^n \varepsilon_d \right] a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) (1 + \varepsilon_{j_2} + \xi_{j_2}) \right) \Rightarrow \tilde{U}_{j_1}(k+1) \approx \\ &\approx \frac{h}{k+1}(1+\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}) \sum_{j_1=1}^n \left(\left[1 + \varepsilon_{j_2} + \xi_{j_2} + \sum_{d=j_2+1}^n \varepsilon_d \right] a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) \right) \Rightarrow \tilde{U}_{j_1}(k+1) \approx \\ &\approx \frac{h}{k+1} \sum_{j_1=1}^n \left((1+\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}) \left[1 + \xi_{j_2} + \sum_{d=j_2}^n \varepsilon_d \right] a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) \right) \Rightarrow \tilde{U}_{j_1}(k+1) \approx \\ &\approx \frac{h}{k+1} \sum_{j_2=1}^n \left(\left[1 + \xi_{j_2} + \sum_{d=j_2}^{n+2} \varepsilon_d \right] a_{j_1 j_2} U_{j_2}(k) \right) \Rightarrow \tilde{U}_{j_1}(k+1) \approx \\ &\approx \frac{h}{k+1} \sum_{j_2=1}^n \left(a_{j_1 j_2} \left[1 + \left(\xi_{j_2} + \sum_{d=j_2}^{n+2} \varepsilon_d \right) \right] U_{j_2}(k) \right), \quad j_2 = 1, \dots, n. \quad (25) \end{aligned}$$

На основании (20) запишем (25) в матричном виде (7), (9), обозначая ошибки индексом j_1 и учитывая, что выражение под знаком суммы не зависит от k :

$$\delta A_k = (\delta a_{j_1 j_2})_{n \times n} \approx \left(a_{j_1 j_2} \left[\mu_{j_1 j_2} + \sum_{d=j_2}^{n+2} \varepsilon_{j_1 d} \right] \right)_{n \times n}. \quad (26)$$

Оценим норму (26) при условии (19):

$$\begin{aligned} \|\delta A\| &= \left\| \left(a_{j_1 j_2} \left[\mu_{j_1 j_2} + \sum_{d=j_2}^{n+2} \varepsilon_{j_1 d} \right] \right)_{n \times n} \right\| \leq \left\| \left(a_{j_1 j_2} \left[|\mu_{j_1 j_2}| + \sum_{d=j_2}^{n+2} |\varepsilon_{j_1 d}| \right] \right)_{n \times n} \right\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|\delta A\| \leq \left\| \left(a_{j_1 j_2} \left[\varepsilon + \sum_{d=j_2}^{n+2} \varepsilon \right] \right)_{n \times n} \right\| \Rightarrow \|\delta A\| \leq \varepsilon \|(n+3-j_2) a_{j_1 j_2}\|_{n \times n}. \quad (27) \end{aligned}$$

При этом справедливо соотношение

$$3\varepsilon \|A\| \leq \varepsilon \left\| \begin{pmatrix} (n+2) a_{11} & (n+1) a_{12} & \cdots & 4 a_{1,n-1} & 3 a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n+2) a_{n1} & (n+1) a_{n2} & \cdots & 4 a_{n,n-1} & 3 a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leq (n+2) \varepsilon \|A\|. \quad (28)$$

С учетом (28) перепишем (27) в виде

$$\|\delta A\| \leq f(n) \varepsilon \|A\|, \text{ при } 3 \leq f(n) \leq n+2, \quad (29)$$

где $f(n)$ — функция, определяющая коэффициент главного члена ошибки разложения, зависящая только от порядка матрицы A . Из (27)—(29) видно, что для СЛОДУ (1) матрица $\|\delta A_k\|$ не зависит от значения k и условие (17) выполняется. Исходя из (19), (29) перепишем (18) в виде

$$\frac{\|\delta U(k_{\max})\|}{\|U(k_{\max})\|} \leq k_{\max} \varepsilon f(n) M_A^{k_{\max}+1} = \frac{1}{2} p^{-q+1} k_{\max} f(n) M_A^{k_{\max}+1},$$

$$3 \leq f(n) \leq n+2. \quad (30)$$

Согласно (17) правая часть (30) является возрастающей функцией максимального номера T -дискрети k_{\max} . Таким образом, расчет T -спектра СЛОДУ

q	M_A	k_{\max}^*					
		$n=3$		$n=10$		$n=20$	
		$f(n)=3$	$f(n)=n+2$	$f(n)=3$	$f(n)=n+2$	$f(n)=3$	$f(n)=n+2$
10	10^1	6	6	6	6	6	6
	10^2	3	3	3	2	3	2
	10^3	1	1	1	1	1	1
	10^5	0	0	0	0	0	0
15	10^1	11	11	11	11	11	10
	10^2	5	5	5	5	5	5
	10^3	3	3	3	3	3	3
	10^5	1	1	1	1	1	1
20	10^1	16	16	16	16	16	15
	10^2	7	7	7	7	7	7
	10^3	5	4	5	4	5	4
	10^5	2	2	2	2	2	2
25	10^1	21	21	21	20	21	20
	10^2	10	10	10	10	10	9
	10^3	6	6	6	6	6	6
	10^5	3	3	3	3	3	3
30	10^1	26	26	26	25	26	25
	10^2	12	12	12	12	12	12
	10^3	8	8	8	8	8	8
	10^5	4	4	4	4	4	4

(1) с удовлетворительной точностью возможен только для ограниченной величины k_{\max} , а именно

$$k_{\max}^* = \arg \left\{ 1 \geq \max \left(\frac{1}{2} p^{-q+1} k_{\max} f(n) M_A^{k_{\max}+1} \right) \right\}, \quad 3 \leq f(n) \leq n+2. \quad (31)$$

Теперь оценим возможный порядок числа обусловленности матрицы M_A для (31). При решении практических задач выделяют решение задачи Коши для жесткой СЛОДУ. Для такой СЛОДУ вида (1) вводится характеристика — число жесткости системы $S_A = \frac{\max |\operatorname{Re} \lambda(A)|}{\min |\operatorname{Re} \lambda(A)|}$, которое может

иметь значения $10^3—10^6$ и более [1]. Из характеристик S_A и M_A следует, что на практике значение числа обусловленности матрицы, входящей в правую часть СЛОДУ (1), может также достигать достаточно больших значений, т.е. $M_A = 10^3 \div 10^6$.

Результаты расчета на основании (31) максимального номера T -дискретности СЛОДУ k_{\max}^* при размерности СЛОДУ n для основания системы счисления $p = 10$ приведены в таблице.

Условие устойчивого расчета T -спектра (31) для однородного линейного ОДУ при $n = 1$ и $M_A = 1$ имеет вид

$$k_{\max}^* \leq \frac{2}{3} p^{q-1}. \quad (32)$$

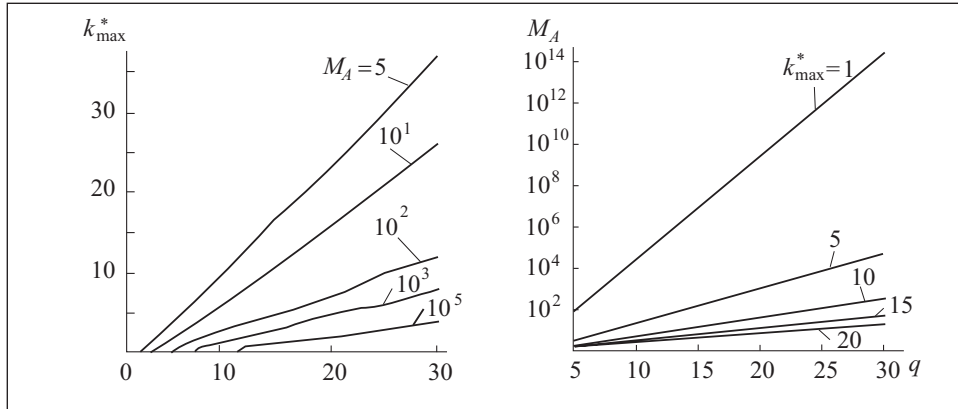
Согласно (32) результаты расчета максимального номера T -дискретности линейного ОДУ при $p = 10$ следующие:

q	3	5	10	15	20
k_{\max}^*	66	6666	6666666666	6666666666666666	66666666666666666666

На основании полученных результатов установлено следующее:

- устойчивость (точность) рекуррентного расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК существенно зависит от длины мантиисы чисел, используемых в ЭВМ, и числа обусловленности матрицы, входящей в правую часть однородной СЛОДУ с ПК;
- при небольшой длине мантиисы и большом числе обусловленности матрицы, входящей в правую часть однородной СЛОДУ с ПК, невозможно точно рассчитать большое число T -дискрет для такого СЛОДУ;
- при рекуррентном вычислении T -спектра однородного линейного ОДУ ошибками численного расчета можно пренебречь.

Таким образом, из длины мантиисы чисел, используемых в ЭВМ, с учетом (31) можно определить число рассчитываемых с приемлемой точностью T -дискрет СЛОДУ с ПК.



Графики границ областей устойчивости численного расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК для десятичной системы счисления

В задаче оценки устойчивости решения системы линейных уравнений по правой части, которая рассматривается в численных методах линейной алгебры, при выполнении условия (19) получено [8]:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \varphi(n) M_A, \quad (33)$$

где $\varphi(n)$ — функция, имеющая порядок от n^0 до n^1 . Из подобия зависимостей (30) и (33) можно сделать вывод о том, что (30) является оценкой устойчивости численного расчета T -спектра СЛОДУ (1).

На основании изложенного введем понятие — область устойчивости численного расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК, определяемая как множество всех номеров рекуррентно рассчитываемых T -дискрет СЛОДУ вида (1), для которых выполняется условие

$$1 \geq \frac{1}{2} p^{-q+1} k_{\max} f(n) M_A^{k_{\max}+1}, \quad 3 \leq f(n) \leq n+2. \quad (34)$$

С учетом (34) и данных, приведенных в таблице, построены графики границ областей устойчивости (см. рисунок). Рассмотрим различие между полученными результатами численного расчета T -спектра СЛОДУ (1) и положениями по устойчивости T -схем решения задачи Коши для ОДУ.

Вычислительная схема (4), (5), как и другие известные T -схемы [2, 4, 10]), состоит из комбинации T -дискрет и является разностным уравнением (в результате обратного преобразования (5)), которое описывает решение ОДУ в узлах вычислительной сетки. Она позволяет получать решение ОДУ в узле t_{i+1} — $u(t_{i+1}) = u_{i+1}$ — на основании значения в предыдущем

узле t_i — $u(t_i) = u_i$. При исследовании устойчивости T -схем решения ОДУ рассматривают свойства полученного разностного уравнения на введенной вычислительной сетке с учетом влияния (распространения) ошибки численного решения ОДУ в узле t_i на ошибку численного решения ОДУ в следующем узле t_{i+1} . Исходя из характеристик СЛОДУ (1) (характеристик матрицы A) и характеристик T -схемы (числа учтенных T -дискрет k_{\max} , определяющих порядок точности T -схемы) накладываются ограничения на максимальный шаг интегрирования $h \leq h_{\max}(A, k_{\max})$. При этом, в общем случае, чем больше значение k_{\max} , тем меньше ограничение на шаг h_{\max} [4], а именно $k_{\max} \uparrow \Rightarrow h_{\max} \uparrow$.

Исследование устойчивости численного расчета T -спектра СЛОДУ (1) выполняется при расчете элементов T -схемы (только T -спектра) в одном узле вычислительной сетки. При этом анализируется распространение ошибок численного расчета k -й T -дискреты на численный расчет $k + 1$ -й T -дискреты. Результатом такого исследования, с учетом свойств СЛОДУ (1) и характеристик системы счисления в ЭВМ (19), являются накладываемые ограничения на максимальный номер рассчитываемой с удовлетворительной точностью T -дискреты k_{\max} , а именно $(M_A \downarrow q \uparrow) \Rightarrow k_{\max}^* \uparrow$. Отсюда вытекает, что при исследовании устойчивости численного расчета T -спектра СЛОДУ (1) и устойчивости T -схем решения ОДУ рассматриваются различные стороны применения дифференциальных преобразований.

Выводы

Полученные выражения (30), (31) являются оценкой точности расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК по мажорантной оценке норм эквивалентных возмущений, следовательно, они являются мажорантными [8].

На основании полученных мажорантных оценок точности расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК введено понятие области устойчивости численного расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК. Это позволяет определить максимальное число T -дискрет однородной СЛОДУ с ПК, которое можно вычислять с приемлемой точностью, исходя из характеристик системы счисления, используемой в ЭВМ, и числа обусловленности матрицы, входящей в правую часть рассматриваемого СЛОДУ.

Поскольку в общем случае порядок точности T -схемы интегрирования систем ОДУ определяется числом учтенных в ней T -дискрет, полученные результаты по устойчивости численного рекуррентного расчета T -спектра однородной СЛОДУ с ПК позволяют определить ограничения на максимально возможный порядок точности T -схем интегрирования систем ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М. : Наука, 1989. — 432 с.
2. Семагина Э.П. Дифференциальные преобразования и их возможности для решения задач динамики // Электрон. моделирование. — 1986. — № 4. — С. 44—50.
3. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. — Киев: Наук. думка, 1990. — 184 с.
4. Коваль Н.В., Семагина Э.П. Об устойчивости алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциального преобразования // Теоретическая электротехника. — 1985. — Вып. 39. — С. 108—118.
5. Ракушев М.Ю. Апроксимація та стійкість методу зміщених диференціально-тейлорівських перетворень для рішення задачі Коші // Вісник ЖДТУ. — Житомир: ЖДТУ, 2007. — 42, № 3. — С. 128—132.
6. Семагина Э.П. Об эффективности T -преобразований при численном решении дифференциальных уравнений // Электрон. моделирование. — 1981. — № 4. — С. 103—104.
7. Ракушев М.Ю. Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 6. — С. 87—96.
8. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М. : Наука, 1977. — 304 с.
9. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е стереотип. — Киев: Техніка, 1977. — 768 с.
10. Степанов А.В. Аппроксимационный вариант неявной T -схемы численного интегрирования // Теоретическая электротехника. — 1985. — Вып. 39. — С. 123—126.

Yu. V. Kravchenko, M. Yu. Rakushev

THE STABILITY OF THE DIFFERENTIAL SPECTRUM
FOR LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM

The majorant estimations of dependence of recursive calculations errors of T -spectrum for the system of linear ordinary differential equations with constant coefficients on representation errors of real numbers in a computer with a floating point were obtained. Proceeding from T -spectrum stability condition the limitations on T -discrete number were defined which are calculated with allowance for the mantissa length of the numbers which used in calculations.

Keywords: differential transformation, T-spectrum, stability range, linear ordinary differential equations system.

REFERENCES

1. Samarsky, A.A. and Gulin, A.V. (1989), *Chislennyye metody: Ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical Methods: Studies. manual for schools], Nauka, Moscow, Russia.
2. Semagina, E.P. (1986), "Differential transformations and their ability to solve the problems of dynamics", *Elektronnoe modelirovanie*, no. 4, pp. 44-50.
3. Pukhov, G.E. (1990), *Differentsialnye spektry i modeli* [Differential spectrum and model], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
4. Koval, N.V. and Semagina, E.P. (1985), "On the stability of algorithms for solving ordinary differential equations systems by the method of differential transformation", *Teoreticheskaya elektrotekhnika*, Vol. 39, pp. 108-118.

5. Rakushev, M.Yu. (2007), "Approximation and stability of the method of shifted differential-taylorivskyh transformations to solve the Cauchy problem", *Visnik ZhDTU*, Vol. 42, no. 3, pp. 128-132.
6. Semagina, E.P. (1981), "On the efficiency of T -transformations in the numerical solution of differential equations", *Elektronnoe modelirovanie*, no. 4, pp. 103-104.
7. Rakushev, M.Yu. (2012), "Computational scheme for integration of stiff ordinary differential equations on the basis of shifted differential transformations", *Problemy upravleniya i informatiki*, no. 6, pp. 87-96.
8. Voevodin, V.V. (1977), *Vyichislitelnye osnovy lineynoy algebry* [Numerical linear algebra basics], Nauka, Moscow, Russia.
9. Sigorskiy, V.P. (1977), *Matematicheskiy apparat inzhenera. Izd. 2-e stereotip* [Mathematical apparatus engineer], Tekhnika, Kiev, Ukraine.
10. Stepanov, A.V. (1985), "Approximation implicit variant T -scheme of numerical integration", *Teoreticheskaya elektrotehnika*, Iss. 39, pp. 123-126.

Поступила 05.09.14;
после доработки 31.10.14

КРАВЧЕНКО Юрий Васильевич, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой компьютерных систем и сетей Государственного университета телекоммуникаций. В 1986 г. окончил Киевское высшее военное авиационное инженерное училище, а в 2004 г. — магистратуру Национальной академии обороны Украины. Область научных исследований — синтез функционально устойчивых сложных технических систем.

РАКУШЕВ Михаил Юрьевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., докторант Национального университета обороны Украины им. Ивана Черняховского. В 1999 г. окончил Житомирский военный ин-т радиоэлектроники, в 2004 г. — адъюнктуру при Житомирском военном ин-те радиоэлектроники. Область научных исследований — баллистико-навигационное обеспечение управления космическими аппаратами, математическое моделирование и дифференциальные преобразования.