
УДК 621.311.001.57:519.86

С.Е. Саух, д-р техн. наук

Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15,
e-mail: ssaukh@gmail.com)

Модель конкурентного равновесия на рынке электроэнергии с улучшенной адекватностью математического описания генерирующих компаний, системного оператора и электрической сети

Представлена модель конкурентного равновесия на энергорынке, в которой множество целевых функций прибылей системного оператора и генерирующих компаний отражает все составляющие баланса товарно-денежных отношений между ними. В предлагаемой модели суммарная стоимость электроэнергии, теряемой в линиях электропередачи, учтена в целевой функции прибыли системного оператора, а отдельные слагаемые той же стоимости потерь учтены в целевых функциях прибылей генерирующих компаний в виде стоимостей услуг системного оператора по передаче электроэнергии, принадлежащей этим компаниям. Стоимость таких услуг для каждой генерирующей компании определяется на основе принципа суперпозиции потоков в линиях электропередачи, действующего в условиях модельного представления электрической сети в виде линейной цепи постоянного тока. Для моделирования потоков и потерь электроэнергии в линиях электропередачи использовано представление электрической сети в виде нелинейной цепи постоянного тока.

Представлено модель конкурентної рівноваги на енергоринку, в якій множина цільових функцій прибутків системного оператора і генеруючих компаній відображає всі складові балансу товарно-грошових відносин між ними. В запропонованій моделі сумарну вартість електроенергії, яка втрачається в лініях електропередачі, враховано в цільовій функції прибутку системного оператора, а окремі складові тієї ж вартості втрат відображено в цільових функціях прибутків генеруючих компаній у вигляді вартостей послуг системного оператора з передачі електроенергії, що належить цим компаніям. Вартість таких послуг для кожної генеруючої компанії визначається на основі принципу суперпозиції потоків в лініях електропередачі, діючого в умовах модельного представлення електричної мережі у вигляді лінійного кола постійного струму. Для моделювання потоків і втрат електроенергії в лініях електропередачі використано представлення електричної мережі у вигляді нелінійного кола постійного струму.

К л ю ч е в ы е с л о в а : электрическая сеть, модель, рынок электроэнергии, равновесное состояние.

© С.Е. Саух, 2016

Существующие модели конкурентного равновесия энергорынков с совершенной и несовершенной конкуренцией [1—5] в целом адекватно отображают поведение генерирующих компаний, системного оператора и потребителей. Однако, присутствующие в таких моделях лагранжевые множители учета балансовых уравнений потоков электроэнергии в узлах электрической цепи используются в виде искусственных ценовых показателей при формировании и для решения задач условной оптимизации целевой функции прибыли системного оператора, а также целевых функций прибылей генерирующих компаний, что снижает степень адекватности такого математического описания равновесных состояний энергорынков.

Кроме того, в известных моделях равновесия энергорынков [1—5] поведение системного оператора представлено в упрощенном виде: цель его деятельности ограничена задачей балансирования потоков электроэнергии в энергоузлах; потери электроэнергии, передаваемой по электрической сети, полагаются равными нулю; потоки электроэнергии в линиях электропередачи определяются на основе упрощенной модели сети — цепи постоянного тока — и используются в балансовых уравнениях потоков электроэнергии в энергоузлах сети, а так же в неравенствах, отражающих ограничения на потоки электроэнергии в линиях.

Для адекватного отображения подобных явлений в работе [6] предложена модель электрической сети в виде нелинейной цепи постоянного тока. Анализ описанной в [6] модели и результатов вычислительных экспериментов показал наличие двух методических ошибок, которые влияют на адекватность моделирования равновесного состояния энергорынка:

1) алгебраическая сумма потоков электроэнергии из энергоузлов в сеть и из сети в энергоузлы установлена равной нулю, а не сумме потерь во всех линиях электрической сети;

2) первый закон Кирхгофа для энергоузлов представлен в виде неравенств с целью «...обеспечения видимости области сходимости...» применяемого вычислительного алгоритма решения задачи дополненности. Несмотря на то, что получаемые результаты при определенных условиях могут строго соответствовать выполнению этого закона, такое его представление является некорректным. Предлагаемая модель конкурентного равновесия на рынке электроэнергии лишена указанных недостатков.

Модель электрической сети в виде линейной цепи постоянного тока без потерь. Из рис. 1 видно, что при неизменных величинах частоты ω , амплитуд U_i и U_j , а также фазовых углов δ_i и δ_j переменных напряжений $u_i(t)$ и $u_j(t)$ активные мощности $\text{flow}_{i \rightarrow m}$ и $\text{flow}_{m \rightarrow j}$ потоков электроэнергии из энергоузла i в линию m и из линии m в энергоузел j в любой момент времени t являются постоянными величинами и определяются постоянной величиной разности напряжений $u_j(t) - u_i(t)$.

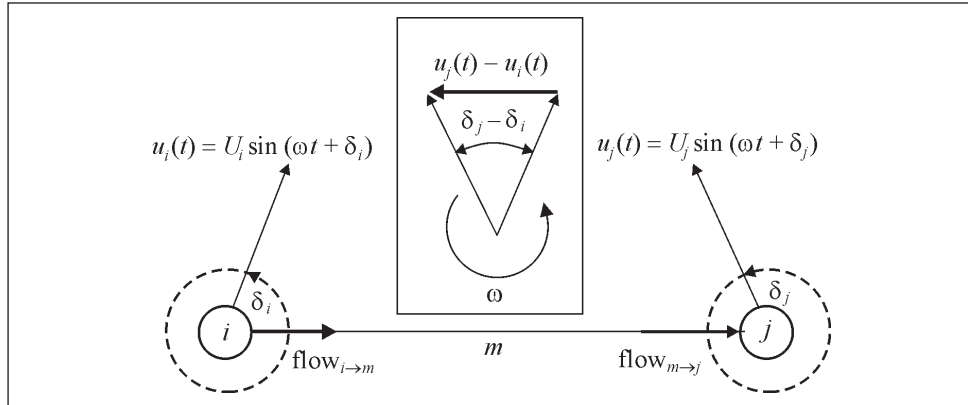


Рис. 1. Мощности $\text{flow}_{i \rightarrow m}$ и $\text{flow}_{m \rightarrow j}$ потоков электроэнергии из энергоузла i в линию m и из линии m в энергоузел j в момент времени t при неизменных величинах ω , U_i и U_j , а также фазовых углов δ_i и δ_j переменных напряжений $u_i(t)$ и $u_j(t)$

Пусть электрическая сеть образована из M линий электропередачи, соединяющих I энергоузлов. Следуя [7], для линии $m \in M$, подсоединенной к энергоузлам $i \in I$ и $j \in J$, имеющей активное сопротивление R_m и реактивное сопротивление X_m , находящейся под напряжением V_m , запишем выражения для активных мощностей $\text{flow}_{i \rightarrow m}$ и $\text{flow}_{m \rightarrow j}$ в виде

$$\text{flow}_{i \rightarrow m} = \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} [U_i^2 - U_i U_j \cos(\delta_i - \delta_j)] + \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} U_i U_j \sin(\delta_i - \delta_j), \quad (1)$$

$$\text{flow}_{m \rightarrow j} = \frac{R_m}{R_m^2 + X_m^2} [U_j^2 - U_i U_j \cos(\delta_j - \delta_i)] + \frac{X_m}{R_m^2 + X_m^2} U_i U_j \sin(\delta_j - \delta_i). \quad (2)$$

Полагая близость амплитуд U_i и U_j напряжений $u_i(t)$ и $u_j(t)$ в узлах i и j к амплитуде V_m напряжения на линии m , запишем

$$U_i \cong U_j \cong V_m. \quad (3)$$

Кроме того, полагая относительно малыми аргументы $(\delta_i - \delta_j)$ и $(\delta_j - \delta_i)$ функций косинуса и синуса, входящих в выражения (1) и (2), представим их в виде многочленов Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа [8]. Для многочленов нулевого и первого порядка соответственно запишем

$$\cos(\delta_i - \delta_j) = \cos(\delta_j - \delta_i) = 1 + \frac{\cos^{(2)}(\theta_c(\delta_i - \delta_j))}{2!} (\delta_i - \delta_j)^2, \quad (4)$$

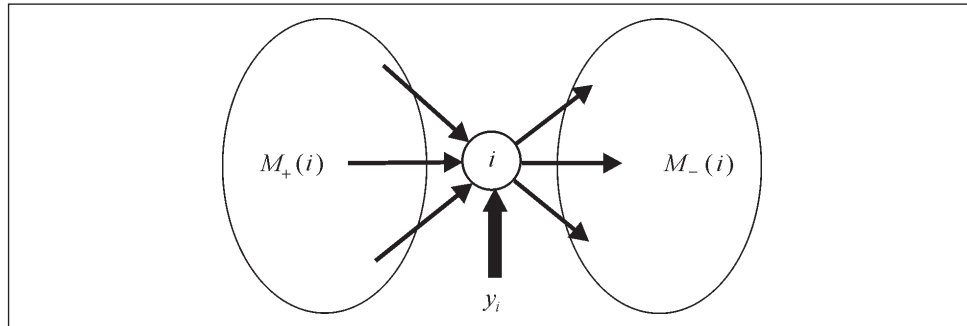


Рис. 2. Суммарный поток y_i электроэнергии, производимой и потребляемой в энергоузле i , а также потоки электроэнергии, покидающие этот энергоузел и поступающие в него по линиям электропередачи

$$\sin(\delta_i - \delta_j) = -\sin(\delta_j - \delta_i) = (\delta_i - \delta_j) + \frac{\sin^{(3)}(\theta_s(\delta_i - \delta_j))}{3!} (\delta_i - \delta_j)^3, \quad (5)$$

где $0 < \theta_c < 1$ и $0 < \theta_s < 1$. С учетом выражений (3)—(5) соотношения (1)—(2) можно представить в приближенном виде:

$$\text{flow}_{i \rightarrow m} \cong + \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j), \quad (6)$$

$$\text{flow}_{m \rightarrow j} \cong - \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j). \quad (7)$$

В этом случае потери электроэнергии в линии m будут равны нулю, так как

$$L_m = \text{flow}_{i \rightarrow m} + \text{flow}_{m \rightarrow j} = 0. \quad (8)$$

В каждом энергоузле $i \in I$ потоки электроэнергии подчинены первому закону Кирхгофа, т.е.

$$\sum_{m \in M_-(i)} \text{flow}_{i \rightarrow m} + \sum_{m \in M_+(i)} \text{flow}_{m \rightarrow j} + y_i = 0, \quad i \in I, \quad (9)$$

где y_i — алгебраическая сумма потоков электроэнергии, производимой и потребляемой в этом энергоузле; $M_-(i)$ и $M_+(i)$ — множества, представляющие две группы линий, по которым потоки электроэнергии соответственно покидают энергоузел i и поступают в него (рис. 2).

С учетом (6), (7) множество соотношений (9) удобно рассматривать в векторно-матричной форме вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{X} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}, \quad (10)$$

где векторы \mathbf{y} и $\boldsymbol{\delta}$ состоят из элементов $\{y_i, i = \overline{1, I}\}$ и $\{\delta_i, i = \overline{1, I}\}$; диагональная матрица $\mathbf{X} = \text{diag} \left\{ \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2}, m = \overline{1, M} \right\}$ содержит элементы, вычисляемые по заданным физическим параметрам линий; \mathbf{D} и $\overline{\mathbf{D}}$ — матрицы инцидентности ориентированного и неориентированного графов сети; матрица \mathbf{D}^T образована транспонированием матрицы \mathbf{D} .

Поскольку активные мощности $\text{flow}_{i \rightarrow m}$ и $\text{flow}_{m \rightarrow j}$ потоков электроэнергии из энергоузла i в линию m и из линии m в энергоузел j удовлетворяют уравнению (8), и поэтому $\text{flow}_{i \rightarrow m} = -\text{flow}_{m \rightarrow j} = \text{flow}_m$, с учетом принятых обозначений множество соотношений (6), (7) можно представить в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{flow} = \mathbf{X} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}, \quad (11)$$

где вектор \mathbf{flow} состоит из элементов $\{\text{flow}_m, m = \overline{1, M}\}$.

Выражения (10) и (11) используем для исключения вектора $\boldsymbol{\delta}$ и получения соотношения

$$\mathbf{flow} = \Omega \mathbf{y}, \quad (12)$$

непосредственно связывающего активные мощности \mathbf{flow} потоков электроэнергии в линиях с алгебраическими суммами \mathbf{y} потоков электроэнергии, производимой и потребляемой в энергоузлах. Здесь матрица Ω определяется выражением

$$\Omega = \langle \mathbf{X} \hat{\mathbf{D}}^T (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{X} \hat{\mathbf{D}}^T)^{-1}, \mathbf{0} \rangle,$$

где $\hat{\mathbf{D}}$ — $M \times (I-1)$ -матрица, образованная из матрицы инцидентности \mathbf{D} удалением в ней произвольно выбираемого столбца с номером h , что соответствует выбору номера базового узла (узла-хаба) электрической сети; $\langle \rangle$ — оператор объединения $M \times (I-1)$ -матрицы $\mathbf{X} \hat{\mathbf{D}}^T (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{X} \hat{\mathbf{D}}^T)^{-1}$ и нулевого вектор-столбца $\mathbf{0}$, результатом действия которого является образование $M \times I$ матрицы Ω с нулевым h -м столбцом.

Представление мощностей $\text{flow}_{i \rightarrow m}$ и $\text{flow}_{m \rightarrow j}$ в виде приближенных соотношений (6), (7) широко используется в равновесных моделях энергорынков, функционирующих в условиях совершенной или несовершенной (олигополистической) конкуренции. Такие соотношения отличаются простотой и являются основой представления электрической сети в виде линейной цепи постоянного тока. Однако их использование ухудшает адекватность математического описания технологических процессов, наблюдаемых в электрической сети, а также товарно-денежных отношений между основными агентами рынка, такими как системный оператор и генерирующие компании.

Модель электрической сети в виде нелинейной цепи постоянного тока с потерями. Если для представления функции косинуса использовать многочлен Тейлора второго порядка, т.е. вместо (4) использовать выражение

$$\cos(\delta_i - \delta_j) = \cos(\delta_j - \delta_i) = 1 - \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2} + \frac{\cos^{(4)}(\theta_c(\delta_i - \delta_j))}{4!} (\delta_i - \delta_j)^4, \quad (13)$$

то соотношения (1), (2) можно представить в виде

$$\text{flow}_{i \rightarrow m} \cong + \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j) + \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2}, \quad (14)$$

$$\text{flow}_{m \rightarrow j} \cong - \frac{V_m^2 X_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j) + \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} \frac{(\delta_i - \delta_j)^2}{2}. \quad (15)$$

Тогда потери мощности в линии m составят величину

$$L_m = \text{flow}_{i \rightarrow m} + \text{flow}_{m \rightarrow j} = \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j)^2.$$

Учитывая (14), (15), множество соотношений (9) представим в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}}\mathbf{R} [(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}) \circ (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta})]. \quad (16)$$

Здесь \mathbf{R} — диагональная матрица, содержащая элементы, определяемые по заданным физическим параметрам линий,

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left\{ \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2}, m = \overline{1, M} \right\};$$

символом \circ обозначено произведение Адамара.

Соотношение (16) отличается от соотношения (10) наличием квадратичного слагаемого, учитывающего потери электроэнергии в линиях электропередачи, и является основой представления электрической сети в виде нелинейной цепи постоянного тока.

Принцип минимума потенциальной энергии в электрической сети. В системе уравнений (16) отражена связь между векторами узловых потоков электроэнергии \mathbf{y} и фазовых углов $\boldsymbol{\delta}$. Однако система (16) не устанавливает взаимно однозначного соответствия между этими векторами. Так, заданному вектору \mathbf{y} можно поставить в соответствие множество векторов $\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичный вектор, а δ_0 — произвольно

выбираемая константа. Таким образом, система (16) тождественна множеству систем уравнений вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{D}^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{D}}\mathbf{R} [(D^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1})) \circ (D^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}))]. \quad (17)$$

Для установления взаимной однозначности между векторами \mathbf{y} и $\boldsymbol{\delta}$ обратимся к основным положениям теории энергетических цепей [9], а именно воспользуемся классификацией переменных в цепи, в соответствии с которой векторы \mathbf{y} и $\boldsymbol{\delta}$ отнесем к обобщенным последовательным и параллельным переменным действия. Поиск минимума обобщенной потенциальной энергии в электрической сети по параметру δ_0 приводит к необходимости поиска решения задачи вида $1/2 (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) \xrightarrow{\delta_0} \min$, что равнозначно поиску решения уравнения вида

$$\mathbf{1}^T (\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}) = 0. \quad (18)$$

Очевидно, для каждого фиксированного значения параметра δ_0 система уравнений (17) вместе с уравнением (18) устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами \mathbf{y} и $\boldsymbol{\delta} + \delta_0 \mathbf{1}$. При условии $\delta_0 = 0$ уравнение

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\delta} = 0 \quad (19)$$

дополняет систему (16), образуя модель электрической сети.

Модель конкурентного равновесия энергорынка, учитывающая потери электроэнергии в электрической сети. Воспользуемся представлением потоков электроэнергии в электрической сети в виде (14)—(16), (19) для уточнения равновесной модели энергорынка, описанной в [6]. Неизменной частью модели является описание поведения на рынке конкурирующих между собой F генерирующих компаний, максимизирующих свою прибыль, т.е. для любого $f \in F$ справедливо критериальное выражение

$$\sum_{i \in I} \left[(1-B)p_i \left(a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right) + Bp_i \left(s_{fi} + \sum_{j \in F, j \neq f} s_{ji} + a_i \right) - w_i \right] s_{fi} - \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} [C_{fih}(g_{fih}) - w_i g_{fih}] \xrightarrow{\{s_{fi}, g_{fih}\}} \max, \quad (20)$$

уравнение баланса объемов продаж s_{fi} и производства g_{fih} электроэнергии

$$\sum_{i \in I} s_{fi} - \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} g_{fih} = 0, \quad (21)$$

а также множество неравенств вида

$$0 \leq g_{fih} \leq G_{fih}^{\max}, \quad i \in I, \quad h \in H(f, i), \quad (22)$$

отражающих ограничения сверху и снизу на объемы производства электроэнергии g_{fih} для каждой генерирующей мощности h из имеющихся у компании f генерирующих мощностей, установленных в энергоузле $i \in I$ и образующих множество $H(f, i)$. Верхние границы таких ограничений обозначены G_{fih}^{\max} .

В выражении (20) параметр B может принимать одно из двух значений, а именно 0 или 1, что соответствует условиям совершенной и несовершенной конкуренции между генерирующими компаниями на энергорынке. Обратная функция спроса p_i вида

$$p_i = \alpha_i - \beta_i \left(a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right), \quad i \in I, \quad (23)$$

определяют цену электроэнергии в энергоузле $i \in I$ в зависимости от объемов ее продаж $\sum_{f \in F} s_{fi}$ и a_i соответственно генерирующими компаниями и арбитражным торговцем. Коэффициенты $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ обратной функции спроса p_i определяются заранее на основе статистических данных об объемах и ценах потребления электроэнергии в энергоузлах. Особая форма записи аргумента этой функции в выражении (20) выбрана с целью выделить в нем варьируемую s_{fi} и неварьируемую $\sum_{j \in F, j \neq f} s_{ji} + a_i$ части слагаемых. Функция $C_{fih}(g_{fih})$ отражает себестоимость производства электроэнергии объемом g_{fih} , при этом $\partial C_{fih} / \partial g_{fih} \geq 0$. Обычно эта функция представляется в упрощенном виде, $C_{fih}(g_{fih}) = C_{fih}^M(g_{fih})$, что позволяет воспользоваться коэффициентом удельных маржинальных затрат C_{fih}^M для определения себестоимости производства электроэнергии на каждом блоке $h \in H(f, i)$.

Неизменной частью модели является также цель деятельности системного оператора по максимизации своей прибыли,

$$\sum_{i \in I} w_i y_i(\delta) + \sum_{m \in M} p_i a_i \xrightarrow{\{\delta_i, a_i\}, i \in I} \max, \quad (24)$$

которая формируется в результате решения задач диспетчерского управления балансированием потоков электроэнергии в сети, что дает прибыль $\sum_{i \in I} w_i y_i(\delta)$, и арбитражной торговли, что дает прибыль $\sum_{m \in M} p_i a_i$.

В выражениях (20) и (24) цены поставок электроэнергии в энергоузлы являются лагранжевыми множителями, которые используются для учета

ограничений в виде балансовых уравнений вида

$$w_i : y_i(\boldsymbol{\delta}) - a_i - \sum_{f \in F} \left(s_{fi} - \sum_{h \in H(f,i)} g_{fih} \right) = 0, \quad i \in I. \quad (25)$$

Выражение (24) с учетом (25) дополняем уравнениями (16), (19), т.е.

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}}\mathbf{R}[(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}) \circ (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta})], \quad (26)$$

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

а также неравенствами, отражающими ограничения на потоки электроэнергии в линиях электропередачи, вида

$$\mathbf{X}\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2} \mathbf{R}[(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}) \circ (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta})] \leq \bar{\mathbf{Y}}, \quad (28)$$

$$-\mathbf{X}\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2} \mathbf{R}[(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta}) \circ (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\delta})] \leq \bar{\mathbf{Y}}, \quad (29)$$

где вектор $\bar{\mathbf{Y}}$ состоит из значений предельных нагрузок линий электропередачи, а левые части выражений (28), (29) представляют собой векторно-матричную форму записи выражений (14), (15) для потоков электроэнергии на концах линий. Следовательно, алгебраическая сумма $\mathbf{1}^T \mathbf{a}$ объемов арбитражных сделок системного оператора и алгебраическая сумма $\mathbf{1}^T \mathbf{y}(\boldsymbol{\delta})$ объемов электроэнергии, поставляемой им в энергоузлы, будут равны объему L потерь электроэнергии в сети, т.е.

$$\mathbf{1}^T \mathbf{a} - \mathbf{1}^T \mathbf{y}(\boldsymbol{\delta}) = 0, \quad (30)$$

$$L = \mathbf{1}^T \mathbf{y}(\boldsymbol{\delta}). \quad (31)$$

Модель конкурентного равновесия энергорынка, представленная формулами (20)—(31), несмотря на методическую строгость и адекватность отображения в ней процессов передачи электроэнергии в электрических сетях, в абстрактной форме отражает цель деятельности системного оператора для получения прибыли от выполнения работ по балансированию потоков электроэнергии в электрической сети и товарно-денежные отношения между системным оператором и генерирующими компаниями.

Улучшение адекватности модели поведения на энергорынке системного оператора. Слагаемое $\sum_{i \in I} w_i y_i(\boldsymbol{\delta})$ в выражении (24), определяющее прибыль, рассматривается в [1—5] как стоимость услуг системного оператора по балансированию потоков электроэнергии в электрической сети.

При этом лагранжевые множители $\{w_i, i=\overline{1, I}\}$ изначально вводятся в модель для учета ограничений (25) в задаче (24), а затем формально интерпретируются как ценовые параметры соответствующих услуг системного оператора и специфически учитываются в целевой функции прибыли (20) каждой генерирующей компании.

Для улучшения адекватности модели поведения системного оператора на энергорынке предлагается заменить часть абстрактной формы его прибыли $\sum_{i \in I} w_i y_i(\delta)$ фактическими затратами на передачу электроэнергии по электрической сети. Очевидно, такие затраты непосредственно определяются стоимостью электроэнергии, потерянной в линиях электропередачи. Так, для отдельной линии $m \in M$, подсоединенной к энергоузлам $i \in I$ и $j \in J$, где цены потребления электроэнергии достигают величин p_i и p_j , стоимость потерянной электроэнергии составит

$$\Lambda_m = \frac{p_i + p_j}{2} \frac{V_m^2 R_m}{R_m^2 + X_m^2} (\delta_i - \delta_j)^2. \quad (32)$$

Учитывая (32), цель деятельности системного оператора на энергорынке представим в виде

$$\sum_{i \in I} p_i a_i - \sum_{m \in M} \Lambda_m \xrightarrow{\{\delta_i, a_i\}, i \in I} \max,$$

или в матрично-векторной форме:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{a} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \overline{\mathbf{D}} \right) \mathbf{R} [(D^T \delta) \circ (D^T \delta)] \xrightarrow{\{\delta, a_i\}} \max. \quad (33)$$

Улучшение адекватности модели поведения на энергорынке генерирующих компаний. Очевидно, затраты системного оператора, определяемые стоимостью теряемой в сетях электроэнергии, должны быть компенсированы ему генерирующими компаниями в виде оплаты стоимости предоставляемых им услуг по передаче электроэнергии. Стоимость $\{\Lambda_m, m=\overline{1, M}\}$ электроэнергии, теряемой в каждой линии электропередачи, должна быть распределена между генерирующими компаниями пропорционально объемам услуг, оказанным каждой компании по передаче принадлежащей ей электроэнергии. Такое распределение можно осуществить, используя модель электрической сети в виде линейной цепи постоянного тока без потерь.

Поскольку к линейной цепи применим принцип суперпозиции, равенство (12) можно рассматривать как совокупность равенств вида

$$\mathbf{flow}_f = \Omega \mathbf{y}_f, \quad (34)$$

определяющих потоки электроэнергии в линиях $\{\text{flow}_{mf}, m=\overline{1, M}\}$ при заданных объемах ее генерации и продаж в энергоузлах для отдельно взятой генерирующей компании $f \in F$. Следовательно, стоимость Λ_{mf} услуг, оказанных генерирующей компании f по передаче электроэнергии flow_{mf} через линию m , можно представить в виде

$$\Lambda_{mf} = \text{flow}_{mf} \frac{\Lambda_m}{\sum_{f \in F} \text{flow}_{mf}}. \quad (35)$$

С учетом (35) критериальное выражение (20) примет окончательный вид

$$\sum_{i \in I} \left[(1-B)p_i \left(a_i + \sum_{f \in F} s_{fi} \right) + Bp_i \left(s_{fi} + \sum_{j \in F, j \neq f} s_{ji} + a_i \right) \right] s_{fi} - \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,i)} C_{fih}(g_{fih}) - \sum_{m \in M} \Lambda_{mf} \xrightarrow{\{s_{fi}, g_{fih}\}} \max. \quad (36)$$

Совокупность соотношений (21)—(23), (25)—(36) представляет собой новую модель конкурентного равновесия энергорынка, которая отличается от известных улучшенной адекватностью отображения в ней как технологических процессов передачи электроэнергии в электрических сетях, так и особенностей поведения генерирующих компаний и системного оператора.

Модели (20)—(36) были имплементированы в программное приложение с применением известных и оригинальных методов и алгоритмов формирования и решения нелинейных смешанных задач дополнительности [9, 10]. Канонизация записи предложенной модели равновесных состояний энергорынков осуществлялась на основе матрично-векторной формы записи соответствующей ей системы комплементарных соотношений и алгебраических уравнений в соответствии с подходом, детально изложенным в [9]. Решение сформированной смешанной задачи дополнительности выполнено на основе оригинального приложения ICRS [10]. В результате создано программное обеспечение, предназначенное для компьютерного моделирования равновесных состояний энергорынков с различным числом компаний-производителей электроэнергии, генерирующих блоков, которыми они владеют, энергоузлов генерации-потребления электроэнергии, а также с разными электрическими сетями.

Результаты вычислительных экспериментов. Задача математического моделирования равновесного состояния энергорынка решена применительно к энергосистеме, представленной на рис. 3. В этой энергосистеме все линии электропередачи находятся под напряжением 35 кВ и имеют

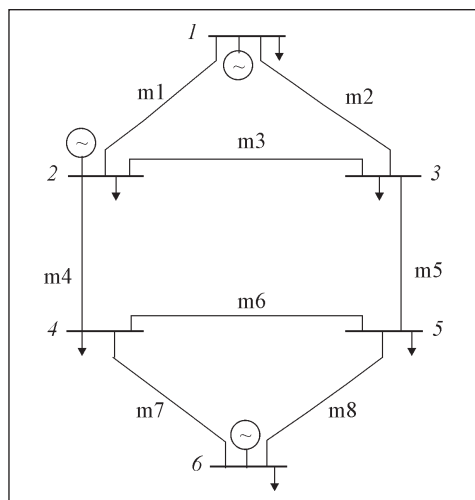


Рис. 3. Схема энергосистемы, состоящей из шести энергоузлов, восьми линий и трех генераторов

одинаковые реактивные и активные сопротивления, равные соответственно 2,0 Ом и 0,256 Ом. Предельные нагрузки линий — 300 МВт. В энергоузлах 1, 2 и 6 находятся три генератора одинаковой мощности 1000 МВт с удельными маржинальными затратами соответственно 50, 60 и 20 \$/МВт·ч. Генератором в узле 1 владеет одна компания, а генераторами в узлах 2 и 6 — другая

компания. Потребители электроэнергии расположены во всех шести энергоузлах и имеют одинаковые характеристики в виде обратных функций спроса с коэффициентами $\{\alpha_i = 200\}$, $\{\beta_i = 0,4\}$. Все указанные значения параметров энергосистемы, кроме двух типов параметров линий электропередачи, взяты из работы [6]. Неиспользуемые и поэтому отсутствующие в [6] значения напряжения и активных сопротивлений линий электропередачи были оценены по объемам потерь электроэнергии, указанным в [6].

В табл. 1 и 2 представлены результаты решения двух задач моделирования энергорынков, функционирующих в условиях совершенной и несовершенной конкуренции: задачи Бертрана и задачи Курно.

В столбце I приведены результаты, полученные в работе [6], в столбце II — результаты, полученные с использованием модели (20)—(31), а в столбце III — результаты, полученные с использованием модели (21)—(23), (25)—(36).

Как видно из табл. 1 и 2, результаты, представленные в столбцах I и II, близки. Однако, следует заметить, что значения потоков мощностей в линиях электропередачи, приведенные в работе [6], не дают детального представления о потерях электроэнергии в них, поскольку эти потоки отнесены лишь к входным энергоузлам линии электропередачи. В ряде случаев они неверно позиционируются, о чем свидетельствуют различные знаки потоков в столбцах I и II.

Результаты, полученные с помощью предложенных моделей конкурентного равновесия энергорынков с улучшенной адекватностью представления электрической сети (столбец II), а также генерирующих компаний и системного оператора (столбец III), отличаются корректностью и полнотой представления потоков электроэнергии в линиях электропе-

Таблица 1. Результаты решения задачи Бертрана

Переменная	Модель		
	I	II	III
Объем генерации, МВт:			
$g_{f=1,i=1}$	902,8	901,3	896,3
$g_{f=2,i=2}$	293,8	292,6	298,7
$g_{f=2,i=6}$	1000,0	1000,0	1000,0
Потоки мощностей в линии, МВт:			
$flow_{1 \rightarrow m1} / flow_{m1 \rightarrow 2}$	227,9	215,9/-226,3	212,3/-222,4
$flow_{1 \rightarrow m2} / flow_{m2 \rightarrow 3}$	300,0	282,0/-300,0	282,0/-300,0
$flow_{2 \rightarrow m3} / flow_{m3 \rightarrow 3}$	72,1	69,4/-70,5	73,1/-74,2
$flow_{2 \rightarrow m4} / flow_{m4 \rightarrow 4}$	89,1	86,4/-88,0	86,3/-87,9
$flow_{3 \rightarrow m5} / flow_{m5 \rightarrow 5}$	26,4	25,7/-25,8	24,5/-24,7
$flow_{4 \rightarrow m6} / flow_{m6 \rightarrow 5}$	9,4	8,5/-8,5	11,1/-11,7
$flow_{6 \rightarrow m7} / flow_{m7 \rightarrow 4}$	290,6	274,1/-291,0	271,5/-288,2
$flow_{6 \rightarrow m8} / flow_{m8 \rightarrow 5}$	300,0	282,0/-300,0	282,0/-300,0
Потери, МВт	66,1	66,1	65,6
Цена в энергоузле, \$/МВт · ч:			
p_1	50,0	50,0	50,4
p_2	60,0	60,0	60,4
p_3	69,3	69,8	67,8
p_4	59,3	59,2	61,3
p_5	72,9	73,5	72,9
p_6	36,2	36,4	35,3

Таблица 2. Результаты решения задачи Курно

Переменная	Модель		
	I	II	III
Объем генерации, МВт:			
$g_{f=1,i=1}$	681,7	682,2	640,6
$g_{f=2,i=2}$	0,0	0,0	0,0
$g_{f=2,i=6}$	900,0	900,0	897,7
Потоки мощностей в линии, МВт:			
$flow_{1 \rightarrow m1} / flow_{m1 \rightarrow 2}$	210,1	201,4/-210,4	180,4/-187,5
$flow_{1 \rightarrow m2} / flow_{m2 \rightarrow 3}$	210,1	201,4/-210,4	180,4/-187,5
$flow_{2 \rightarrow m3} / flow_{m3 \rightarrow 3}$	0,0	0,0/0,0	0,0/0,0
$flow_{2 \rightarrow m4} / flow_{m4 \rightarrow 4}$	38,5	-38,4/38,0	-45,8/45,4
$flow_{3 \rightarrow m5} / flow_{m5 \rightarrow 5}$	38,5	-38,4/38,0	-45,8/45,4
$flow_{4 \rightarrow m6} / flow_{m6 \rightarrow 5}$	0,0	0,0/0,0	0,0/0,0
$flow_{6 \rightarrow m7} / flow_{m7 \rightarrow 4}$	300,0	282,0/-300,0	282,0/-300,0
$flow_{6 \rightarrow m8} / flow_{m8 \rightarrow 5}$	300,0	282,0/-300,0	282,0/-300,0

Таблица 2. (Окончание)

Переменная	Модель		
	I	II	III
Потери, МВт	54,2	54,6	51,2
Цена в энергоузле, \$/МВт · ч:			
p_1	95,4	95,5	93,8
p_2	104,2	104,2	109,7
p_3	104,2	104,2	109,7
p_4	102,6	102,5	105,5
p_5	54,6	102,5	105,5
p_6	80	80	80,9

редачи. Результаты, приведенные в столбце III, показывают степень влияния изменений, внесенных в существующие модели, а именно снижение общих потерь в сети, что адекватно отражает деятельность системного оператора по минимизации стоимости таких потерь. При этом изменение цен и объемов продаж электроэнергии в энергоузлах адекватно отражает влияние стоимости услуг системного оператора на товарно-денежные отношения между генерирующими компаниями и потребителями, что существенно в условиях несовершенной конкуренции между генерирующими компаниями на энергорынке.

Выводы

В предложенной математической модели в отличие от известных лагранжевые множители учета балансовых уравнений потоков электроэнергии в узлах электрической цепи не используются в качестве абстрактных ценовых показателей при формировании и решении задач условной оптимизации целевой функции прибыли системного оператора, а также целевых функций прибыли генерирующих компаний. Напротив, в выражении целевой функции прибыли системного оператора используются цены электроэнергии в энергоузлах для определения стоимости потерь электроэнергии в отдельных линиях электропередачи, а в выражениях целевых функций прибыли генерирующих компаний стоимости указанных потерь учитываются в виде стоимости услуг по передаче электроэнергии. При этом дифференцирование стоимости услуг, предоставляемых системным оператором каждой генерирующей компании в отдельности, осуществляется на основе принципа суперпозиции потоков в линиях электропередачи, действующего в условиях модельного представления электрической сети в виде линейной цепи постоянного тока.

Для описания потоков электроэнергии в электрической сети с потерями использовано ее представление в виде нелинейной цепи постоянного тока. В отличие от известных, в таком описании сетей потоки электроэнергии являются сбалансированными, т.е. такими, которые соответствуют законам Кирхгофа. Кроме того, используемые здесь коэффициенты, непосредственно определяются по существующим параметрам линий электропередачи, что обеспечивает возможность применения такого описания электрической сети для решения практических задач моделирования энергорынков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wei J.-Y., Smeers Y.* Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices // *Operations Research*. — 1999. — Vol. 47, No. 1. — P. 102—112.
2. *Hobbs B.F.* Linear Complementarity Models of Nash—Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets // *IEEE Transactions on Power Systems*. — 2001. — Vol. 16, No. 2. — P. 194—202.
3. *Day C.J., Hobbs B.F., Pang J.-S.* Oligopolistic Competition in Power Networks: A Conjectured Supply Function Approach // *IEEE Transactions on Power Systems*. — 2002. — Vol. 17, No. 3. — P. 597—607.
4. *Murphy F., Smeers Y.* Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets // *Operations Research*. — 2005. — Vol. 53, No. 4. — P. 646—661.
5. *Борисенко А.В., Саух С.Е.* Моделирование равновесного состояния электроэнергетических систем в рыночных условиях // Сб. трудов конференции «Моделирование—2008». — Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова, 2008. — С. 172—177.
6. *Hobbs B.F., Drayton G., Fisher E.B., Lise W.* Improved Transmission Representations in Oligopolistic Market Models: Quadratic Losses, Phase Shifters, and DC Lines // *IEEE Transactions on Power Systems*. — 2008. — Vol. 23, No. 3. — P. 1018—1029.
7. *Schweppe F.C., Caramanis M.C., Tabors R.E., Bohn R.E.* Spot Pricing of Electricity.— Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1988. — 355 p.
8. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / M.Abramowitz, I.Stegun.* — National Bureau of Standards, USA, 1972. — 1046 p.
9. *Саух С.Е.* Математическое моделирование энергетических цепей // *Электрон. моделирование*. — 2011. — **33**, № 3. — С. 3—12.
10. *Саух С.Е.* Методы компьютерного моделирования конкурентного равновесия на рынках электроэнергии // Там же. — 2013. — **35**, № 5. — С. 11—26.
11. *Саух С.Е.* Метод смещения малых элементов в обобщенных якобинах Кларка для обеспечения численной устойчивости квази-ньютоновских методов решения вариационных неравенств // Там же. — 2013. — **37**, № 4. — С. 3—18.

S.Ye. Saukh

COMPETITIVE EQUILIBRIUM ELECTRICITY MARKET MODEL WITH IMPROVED ADEQUACY OF MATHEMATICAL DESCRIPTION OF GENERATING COMPANIES, SYSTEM OPERATOR AND ELECTRICAL NETWORK

The model of competitive equilibrium of the electricity market is presented, in which a set of objective functions of profits of the system operator and generating companies contains all components of the balance of commodity-money relations between them. In particular, the total cost of electricity losses in transmission lines is included in the objective function of profit of the system operator. Separate compo-

nents of this cost of losses are accounted in the objective functions of profits of the generating companies in the form of cost of transmission services of electrical power belonging to these companies. The cost of these services for each generating company is based on the principle of superposition of flows of electricity in transmission lines, acting in terms of a model representing the electrical grid as a linear circuit of DC. To simulate the flows of electricity and losses in transmission lines the representation of the power grid in a form of a non-linear DC circuit is used.

Key words: electrical network, model, electricity market, equilibrium state.

REFERENCES

1. Wei, J.-Y. and Smeers, Y. (1999), "Spatial oligopolistic electricity models with Cournot generators and regulated transmission prices", *Operations Research*, Vol. 47, no. 1, pp. 102-112.
2. Hobbs, B.F. (2001), "Linear complementarity models of Nash–Cournot competition in bilateral and POOLCO power markets", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 16, no. 2, pp. 194-202.
3. Day, C.J., Hobbs, B.F. and Pang, J.-S. (2002), "Oligopolistic competition in power networks: a conjectured supply function approach", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 17, no. 3, pp. 597-607.
4. Murphy, F. and Smeers, Y. (2005), "Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets", *Operations Research*, Vol. 53, no. 4, pp. 646-661.
5. Borisenko, A.V. and Saukh, S.Ye. (2008), "Simulation of equilibrium state of the electric power systems under market conditions", *Sbornik trudov konferentsii "Modelirovanie-2008"* [Simulation-2008, Conference Proceedings], Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering, Kyiv, Ukraine, pp. 172-177.
6. Hobbs, B.F., Drayton, G., Fisher, E.B. and Lise, W. (2008), "Improved transmission representations in oligopolistic market models: quadratic losses, phase shifters, and DC lines", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 23, no. 3, pp. 1018-1029.
7. Schweppe, F.C., Caramanis, M.C., Tabors, R.E. and Bohn, R.E. (1988), *Spot pricing of electricity*, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.
8. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* (1972), Abramowitz, M. and Stegun, I., National Bureau of Standards, USA.
9. Saukh, S.Ye. (2011), "Mathematical modeling of the energy circuits", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 33, no 3, pp. 3-12.
10. Saukh, S.Ye. (2013), "Methods of computer simulation of competitive equilibrium in electricity markets", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 35, no 5, pp. 11-26.
11. Saukh, S.Ye. (2015), "Method of shearing matrix elements of the Clarke's generalized Jacobian for providing numerical stability of the quasi-Newton methods of solving of the variational inequalities problems", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no 4, pp. 3-18.

Поступила 17.06.16

САУХ Сергей Евгеньевич, д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — численные операторные методы решения дифференциальных уравнений, методы и технологии решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности, методы решения вариационных неравенств, равновесные модели, математическое моделирование энергорынков, газотранспортных систем, макроэкономических процессов.