УДК 004.94

Я.А. Калиновский[1], д-р техн. наук, **Ю.Е. Бояринова**[1, 2], канд. техн. наук,
Т.В. Синькова[1], **А.С. Сукало**[1], аспирантка
[1] Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2,
тел. 4542138, e-mail: kalinovsky@i.ua),
[2] Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37, e-mail: ub@ua.fm)

Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем

Представлен метод построения изоморфных гиперкомплексных числовых систем, использование которых в математическом моделировании позволяет значительно сократить объем вычислений. Приведены примеры построения изоморфных пар на основе систем двойных и квадриплексных чисел.

Запропоновано метод побудови ізоморфних гіперкомплексних числових систем, використання яких в математичному моделюванні дозволяє значно скоротити об'єм обчислень. Наведено приклади побудови ізоморфних пар на базі систем подвійних і квадриплексних чисел.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, таблица Кели, изоморфизм, процедура удвоения, линейный оператор.

Объем вычислений при решении конкретных научно-технических задач существенно зависит от их организации. Одним из наиболее эффективных методов организации вычислений является переход от исходного представления информации к такому виду, при котором оперирование с данными становится более продуктивным. Так, например, переход от чисел к их логарифмам позволяет заменить операции умножения и деления значительно менее трудоемкими операциями сложения и вычитания.

Идея перехода от одних объектных пространств к другим продуктивна и в области гиперкомплексного исчисления. Этому способствует тот факт, что среди множества гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) фиксированной размерности существуют подмножества изоморфных между собой систем. Напомним, что две ГЧС являются изоморфными, если между ними существует такое взаимно однозначное соответствие, что образ операции над операндами в одной ГЧС равен операции над образами этих же операндов в другой ГЧС. Это означает, что какие-либо вычисления можно делать в любой изоморфной ГЧС. При этом результат будет тот же с учетом перевода данных и результатов из одной системы в другую.

Две изоморфные ГЧС подобны относительно определяющих их операций, однако существуют и весьма интересные отличия. Известно, что таблицы умножения изоморфных ГЧС могут быть существенно различны по числу нулевых ячеек: в сильнозаполненной ГЧС мало нулей, в слабозаполненной — много. Как следствие, оперирование с гиперкомплексными числами в сильнозаполненной ГЧС сопряжено с необходимостью выполнения большего числа операций над вещественными числами, чем в слабозаполненной.

Рассмотрим для примера систему двойных чисел W и изоморфную ей систему ортогональных двойных чисел $R \oplus R = W_1$, таблицы Кели которых имеют следующий вид:

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

W_1	E_1	E_2
E_1	E_1	0
E_2	0	E_2

Как видно из этих таблиц, для умножения двойных чисел в системе W требуется четыре вещественных умножения, а в системе W_1 — только два. Более подробно этот процесс рассмотрен далее.

Опыт разработки математических моделей с применением ГЧС свидетельствует о необходимости применения обоих видов ГЧС: сильнозаполненных — для идентификации моделей, слабозаполненных — для интенсификации самого процесса моделирования. Следовательно, для успешного использования методов ГЧС в математическом моделировании необходимо иметь множество пар изоморфных ГЧС различных размерностей и типов. В настоящее время известно небольшое число таких пар, особенно высоких размерностей. Цель данной работы — создание методов генерации пар изоморфных ГЧС высоких размерностей, их получение и изучение свойств для повышения эффективности вычислительных процессов.

Изоморфизм ГЧС. Гиперкомплексные числовые системы Γ_1 и Γ_2 называются изоморфными, $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$, если существует такое взаимно однозначное отображение L пространства Γ_1 на пространство Γ_2, что выполняются следующие свойства:

$$L(a+b) = L(a) + L(b), \tag{1}$$

$$L(a \times b) = L(a) \times L(b), \tag{2}$$

где $a, b \in \Gamma_1, L(a), L(b) \in \Gamma_2$. Операции умножения в левой и правой частях различаются в соответствии со структурными константами в Γ_1 и Γ_2. Из (2) следует, что Γ_1 и Γ_2 — линейные пространства с базисами соответственно $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $f = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Поэтому между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с матрицей A:

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{12} f_2 + ... + \alpha_{1n} f_n \\ e_2 &= \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2 + ... + \alpha_{2n} f_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= \alpha_{n1} f_1 + \alpha_{n2} f_2 + ... + \alpha_{nn} f_n. \end{aligned} \tag{3}$$

При этом детерминант матрицы A отличен от нуля,

$$||A|| \neq 0, \tag{4}$$

поскольку A имеет обратное преобразование A^{-1}.

Как вытекает из теории линейных пространств, для каждой пары линейно независимых базисов можно найти взаимно однозначное линейное преобразование (3), которое переводит один базис в другой, и наоборот. Однако выполнение одновременно с требованием (1) требования (2), которое сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, не всегда возможно.

Если $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, то их произведение $ab = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i b_j \gamma_{ij}^k e_k$, а линейное преобразование этого произведения имеет вид

$$L(ab) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i b_j \gamma_{ij}^k e_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k a_i b_j L(e_k).$$

Но согласно (1) $L(e_k) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks} f_s$. Поэтому

$$L(ab) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks} \gamma_{ij}^k a_i b_j f_s. \tag{5}$$

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} L(a) \times L(b) &= \sum_{i=1}^{n} a_i L(e_i^1) \sum_{j=1}^{n} b_j L(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_i f_k \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{js} b_j f_s = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{y=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{js} \gamma_{ks}^y a_i b_j f_y. \end{aligned} \tag{6}$$

Приравнивая в правых частях уравнений (5) и (6) выражения при одинаковых $a_i b_j e_r^1$, получаем n^3 нелинейных алгебраических уравнений от n^2 неизвестных α_{ij}:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ks}\gamma_{ij}^{k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{js}\gamma_{ks}^{r},\ i,j,k\in 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Система (7) переопределена, но всегда имеет тривиальное решение. Однако наличие нетривиальных вещественных решений при выполнении условия (4) не гарантируется. Поэтому, если существует хотя бы одно нетривиальное вещественное решение с выполнением условия (4), то эти две ГЧС, Γ_1 и Γ_2, являются изоморфными, если таких решений нет, то они неизоморфны.

Изоморфный переход сохраняет нулевой и единичный элементы систем, т.е. нулевой и единичный элементы системы Γ_1 превращаются соответственно в нулевой и единичный элементы системы Γ_2. В работах [1, 2] показано, что любая система Γ размерности $n=2$, базис которой $e=\{e_1, e_2\}$ содержит единичный элемент e_1, и $e_2^2=pe_1+qe_2,\ p,q\in R$, является изоморфной одной из трех канонических систем: системе комплексных чисел C, системе двойных чисел W и системе дуальных чисел D. Критерием изоморфности является знак величины $p+q^2/4$:

$$p+\frac{q^2}{4}\begin{cases}<0\simeq C,\\ =0\simeq D,\\ >0\simeq W.\end{cases}$$

Рассмотрим изоморфизм системы двойных чисел $W(e,2)$ и $R\oplus R=$ $=W_1(f,2)$, таблицы Кели которых приведены выше. Единичные элементы в системах ε и φ такие [1]:

$$\varepsilon=e_1,\ \ \varphi=f_1+f_2\ .$$

Оператор изоморфизма имеет вид [1]

$$L:\begin{cases}e_1=f_1+f\ ,\\ e_2=f_1-f_2,\end{cases}\qquad L^{-1}:\begin{cases}f_1=(e_1+e_2)/2,\\ f_2=(e_1-e_2)/2.\end{cases} \tag{8}$$

Определим правила преобразования гиперкомплексных чисел. Пусть заданы числа $M=m_1e_1+m_2e_2\in W,\ N=n_1f_1+n_2f_2\in W_1$ и известно, что $M=L(N)$. Тогда, как показано в [1],

$$m_1=n_1+n_2,\ \ n_1=(m_1+m_2)/2\,,$$
$$m_2=n_1-n_2,\ \ n_2=(m_1-m_2)/2\,.$$

Рассмотрим изоморфизм неканонической системы триплексных чисел $T\ (e,3)$ и прямой суммы вещественных и комплексных чисел $R \oplus C\ (f,2)$:

$T(e,3)$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

,

$R \oplus C(f,2)$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	f_3
f_3	0	f_3	$-f_2$

.

Оператор изоморфизма имеет вид [1]

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2, \\ e_2 = \pm f_3, \\ e_3 = f_1 - f_2, \end{cases} \quad L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_3)/2, \\ f_2 = (e_1 - e_3)/2, \\ f_3 = \pm e_2. \end{cases}$$

Приведем правила преобразования гиперкомплексных чисел [1]. Пусть заданы числа $M = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 \in T$, $N = n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3 \in R \oplus C$ и известно, что $M = L(N)$. Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 + n_3, \quad n_1 = (m_1 + m_2)/2, \\ m_2 &= n_1 - n_3, \quad n_2 = \pm m_3, \\ m_3 &= \pm n_2, \qquad n_3 = (m_1 + m_2)/2. \end{aligned}$$

Рассмотрим изоморфизм систем квадриплексных $K\ (e,4)$ и бикомплексных чисел $C \oplus C\ (f,4)$:

$K\ (e,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

,

$C \oplus C\ (f,4)$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	0	0
f_2	f_2	$-f_1$	0	0
f_3	0	0	f_3	f_4
f_4	0	0	f_4	$-f_3$

.

Как следует из [1],

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_3, \\ e_2 = -f_2 + f_4, \\ e_3 = -f_2 - f_4, \\ e_4 = -f_1 + f_3, \end{cases} \quad L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2, \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2, \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2, \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть заданы числа $M = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4 \in K$, $N = n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3 + n_4 f_4 \in C \oplus C$ и известно, что $M = L(N)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
m_1 &= n_1 - n_4, & n_1 &= (m_1 + m_3)/2, \\
m_2 &= -n_2 - n_3, & n_2 &= (m_4 - m_2)/2, \\
m_3 &= n_1 + n_4, & n_3 &= (-m_4 - m_2)/2, \\
m_4 &= n_2 - n_3, & n_4 &= (-m_1 + m_3)/2.
\end{aligned}
$$

Для дальнейших построений и практического применения большое значение имеют ГЧС в виде прямых сумм ГЧС меньших размерностей. Простейшая из таких ГЧС — система двойных чисел W_1, являющаяся прямой суммой двух систем вещественных чисел R: $W_1 = R \oplus R$. Как видим, если ГЧС есть прямая сумма, $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{k} \Gamma_k$, то размерность ГЧС равна сумме размерностей входящих в нее ГЧС: $\dim \Gamma = \sum_{i=1}^{k} \dim \Gamma_i$. Таблица умножения подобных ГЧС имеет диагональный вид: на главной диагонали находятся таблицы умножения систем меньшей размерности, а в остальных клетках таблицы — нули.

ГЧС диагонального вида легко строить, зная таблицы умножения ГЧС меньших размерностей. Все арифметические, алгебраические и функциональные операции и процедуры сводятся к таким же действиям отдельно в каждой системе меньшей размерности. Поэтому трудоемкость операций в них меньшая, чем в ГЧС недиагоналного вида.

Процедуры удвоения ГЧС. Существуют два типа процедур удвоения: процедуры Кейли—Диксона (КД-процедура) и процедуры Грассмана—Клиффорда (ГК-процедура).

КД-процедуры позволяют получать вполне нормированные ГЧС размерности 2^n, где $n \in N$ — порядок удвоения [3—7]. При $n > 4$ они неассоциативные.

ГК-процедуры позволяют получить более широкие классы ГЧС как по размерности, так и по свойствам [5, 8].

Рассмотрим подробнее процесс удвоения по ГК-процедуре, которая будет использована далее.

В самом общем случае ГЧС обозначим символом $\Gamma(e, n)$, где $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — базис $\Gamma(e, n)$, n — размерность ГЧС $\Gamma(e, n)$. В случае, когда речь идет о ГЧС конкретного типа, она будет обозначена именем своего типа, как, например, рассмотренная выше система двойных чисел $W(e)$. В этом случае размерность можно не указывать, так как она известна из типа ГЧС. Однако имя базиса указывать нужно, так как при удвоении могут рассматриваться два экземпляра одной и той же ГЧС, но их базисы следует различать.

Введем обозначение оператора удвоения системы $Г_1(e, n)$ системой $Г_2(f, 2)$: $Д\,(Г_1(e, n), Г_2(f, 2))$. Результатом выполнения оператора удвоения $Д$ является некоторая ГЧС (коммутативная) размерности $2n$, базис которой ef будет таким:

$$ef = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2, ..., e_n f_1, e_n f_2\},$$

т.е. $Д\,(Г_1(e, n), Г_2(f, 2)) = Г_3(ef, 2n)$. Следует заметить, что размерность полученной ГЧС равна $2n$ исключительно вследствие коммутативности ГЧС $Г_1$ и $Г_2$. В противном случае размерность полученной системы в общем случае была бы равной $4n$.

Рассмотрим удвоение $Д\,(Г_1(e, 2), Г_2(f, 2)) = Г_3(ef, 4)$. Базис системы $Г_3(ef, 4)$: $ef = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}$. Выполним следующие символические преобразования таблицы умножения системы $Г_3(ef, 4)$, основанные на коммутативности всех рассматриваемых систем:

$Г_3$	$e_1 f_1$	$e_1 f_2$	$e_2 f_1$	$e_2 f_2$
$e_1 f_1$	$e_1 e_1 f_1 f_1$	$e_1 e_1 f_1 f_2$	$e_1 e_2 f_1 f_1$	$e_1 e_2 f_1 f_2$
$e_1 f_2$	$e_1 e_1 f_1 f_2$	$e_1 e_1 f_2 f_2$	$e_1 e_2 f_1 f_2$	$e_1 e_2 f_2 f_2$
$e_2 f_1$	$e_1 e_2 f_1 f_1$	$e_1 e_2 f_1 f_2$	$e_2 e_2 f_1 f_1$	$e_2 e_2 f_1 f_2$
$e_2 f_2$	$e_1 e_2 f_1 f_2$	$e_1 e_2 f_2 f_2$	$e_2 e_2 f_1 f_2$	$e_2 e_2 f_2 f_2$

$\Leftrightarrow$

<table>
<tr><td>$Г_3$</td><td>$e_1 f_1$</td><td>$e_1 f_2$</td><td>$e_2 f_1$</td><td>$e_2 f_2$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_1$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1 e_1 Г_2$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1 e_2 Г_2$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_2$</td></tr>
<tr><td>$e_2 f_1$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1 e_2 Г_2$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_2 e_2 Г_2$</td></tr>
<tr><td>$e_2 f_2$</td></tr>
</table>

. (10)

Изменив порядок следования базисных элементов системы $Г_3(ef, 4)$, а именно $ef = \{e_1 f_1, e_2 f_1, e_1 f_2, e_2 f_2\}$, что равносильно перемене мест второй и третьей строк и соответственно столбцов таблицы умножения системы $Г_3(ef, 4)$, получим такую блочную таблицу умножения:

<table>
<tr><td>$Г_3(ef, 4)$</td><td>$e_1 f_1$</td><td>$e_2 f_1$</td><td>$e_1 f_2$</td><td>$e_2 f_2$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_1$
$e_2 f_1$</td><td colspan="2">$f_1 f_1 Г_1$</td><td colspan="2">$f_1 f_2 Г_1$</td></tr>
<tr><td>$e_1 f_2$
$e_2 f_2$</td><td colspan="2">$f_1 f_2 Г_1$</td><td colspan="2">$f_2 f_2 Г_1$</td></tr>
</table>

. (11)

Заметим, что в таблицах (10) и (11) вынесенные символически произведения базисных элементов сами представляют собой таблицу умножения «своей» ГЧС: в (10) — $Г_1(e, 2)$, в (11) — $Г_2(f, 2)$. Полученный результат приводит к выводу о коммутативности процедуры умножения относительно своих операндов. Формальное доказательство этого факта, а также его обобщение приведено далее.

Представление результата удвоения с помощью блочных таблиц позволяет быстро построить конечную таблицу умножения. Процедура удвоения фактически означает, что компоненты гиперкомплексного числа для данной ГЧС уже не являются вещественными числами, а есть числа, принадлежащие какой-либо ГЧС размерности 2. Они могут принадлежать ГЧС любой размерности. В этом случае размерность полученной ГЧС будет не удваиваться по отношению к исходной, а умножаться на размерность той ГЧС, элементами которой являются компоненты исходной ГЧС.

В отличие от процедуры удвоения назовем такой процесс процедурой умножения размерности ГЧС. Оператор умножения размерности обозначим, как и оператор удвоения размерности,

$$Д\,(Г_1(e,n),\ Г_2(f,m)) = Г_3(ef,nm).$$

Базис полученной системы состоит из nm элементов:

$$ef = \{e_1 f_1,\ e_1 f_2, \dots,\ e_1 f_m,\ e_2 f_1,\ e_2 f_2, \dots,\ e_2 f_m, \dots,\ e_n f_1,\ e_n f_m\}.$$

Представление результата умножения размерности с помощью блочных таблиц позволяет быстро построить таблицу умножения. Блочная таблица в зависимости от порядка перечисления элементов базиса может представлять собой либо $n \times n$ блоков размерами $m \times m$, либо $m \times m$ блоков размерами $n \times n$.

Оператор умножения размерности и его свойства. При использовании процедуры умножения размерности базис получаемых ГЧС состоит из парных произведений базисных элементов исходных ГЧС. При этом предполагается коммутативность базисных элементов относительно их произведения. Поэтому, независимо от порядка расположения ГЧС в операторе умножения размерности, полученные базисы будут одинаковыми. А значит, будут идентичными и таблицы умножения ГЧС, полученных при перестановке их в операторе умножения размерности.

Таким образом, можно сформулировать теорему о коммутативности процедуры умножения размерности относительно своих операндов.

Теорема 1. Если $Г_1(e,n)$ и $Г_2(f,m)$ коммутативны и $e_i f_j = f_j e_i$, $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m$, то $Д\,(Г_1(e,n), Г_2(f,m)) \simeq Д\,(Г_2(f,m), Г_1(e,n))$. При этом изоморфизм устанавливается перестановкой строк и столбцов таблиц умножения.

Действительно, пусть $Д\,(Г_1(e,n), Г_2(f,m)) = Г'(ef,nm)$, а $Д\,(Г_2(f,m),$ $Г_1(e,n)) = Г''(fe,nm)$. Из коммутативности элементов базисов $e_i f_j = f_j e_i$ вытекает коммутативность базисов $\{ef\} = \{fe\}$, откуда следует $Г'(ef,nm)$ $\simeq Г''(fe,nm)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда к одной и той же ГЧС применяются процедуры умножения размерностей различными ГЧС, размерности которых одинаковы. Тогда в результате получаются различные ГЧС одинаковой размерности, но, в общем случае, неизоморфные между собой. Однако, если для умножения размерности применяются изоморфные ГЧС, то и результаты умножения также будут изоморфными между собой. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\Gamma_2(f, m)) \simeq (\Gamma_3(g, m)$. Тогда $Д\,(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m)) \simeq$ $\simeq Д\,(\Gamma_1(e, n), \Gamma_3(g, m))$, т.е. умножение размерности одной и той же ГЧС изоморфными ГЧС приводит к изоморфным ГЧС.

Для доказательства необходимо показать существование невырожденного линейного преобразования, связывающего базисы полученных ГЧС. Пусть

$$Д\,(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m)) = (\Gamma_4(ef, nm), Д\,(\Gamma_1(e, n), \Gamma_3(g, m)) = \Gamma_5(eg, mn)\,.$$

Поскольку $\Gamma_2 \simeq \Gamma_3$, существует линейное преобразование L_1, переводящее базис $\{f\}$ в базис $\{g\}$:

$$L_1: f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} g_j, \ \ \forall i = 1, \ldots, m, \ \det \|\alpha_{ij}\| \neq 0. \tag{12}$$

Тогда базис $\{ef\}$ преобразуется так:

$$e_k f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_k g_j, \ \ \forall i = 1, \ldots, m, \ \ \forall k = 1, \ldots, m\,.$$

Это — также линейное преобразование, матрица которого имеет размеры $mn \times mn$. В каждой строке матрицы только m ненулевых элементов α_{ij}. Данное линейное преобразование можно построить так, что на главной диагонали его матрицы будут располагаться n квадратных матриц линейного преобразования $L_1(m \times m)$. Определитель этого линейного преобразования $(\det L_1)^n \neq 0$.

Представим более наглядно структуру линейного преобразования для случая $n = 3$, $m = 2$. Пусть $f_1 = \alpha_{11} g_1 + \alpha_{12} g_2$, $f_2 = \alpha_{21} g_1 + \alpha_{22} g_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
e_1 f_1 &= \alpha_{11} e_1 g_1 + \alpha_{12} e_1 g_2 + 0 \cdot e_2 g_1 + 0 \cdot e_2 g_2 + 0 \cdot e_3 g_1 + 0 \cdot e_3 g_2,\\
e_1 f_2 &= \alpha_{21} e_1 g_1 + \alpha_{22} e_1 g_2 + 0 \cdot e_2 g_1 + 0 \cdot e_2 g_2 + 0 \cdot e_3 g_1 + 0 \cdot e_3 g_2,\\
e_2 f_1 &= 0 \cdot e_1 g_1 + 0 \cdot e_1 g_2 + \alpha_{11} e_2 g_1 + \alpha_{12} e_2 g_2 + 0 \cdot e_3 g_1 + 0 \cdot e_3 g_2,\\
e_2 f_2 &= 0 \cdot e_1 g_1 + 0 \cdot e_1 g_2 + \alpha_{21} e_2 g_1 + \alpha_{22} e_2 g_2 + 0 \cdot e_3 g_1 + 0 \cdot e_3 g_2,\\
e_3 f_1 &= 0 \cdot e_1 g_1 + 0 \cdot e_1 g_2 + 0 \cdot e_2 g_1 + 0 \cdot e_2 g_2 + \alpha_{11} e_3 g_1 + \alpha_{12} e_3 g_2,\\
e_3 f_2 &= 0 \cdot e_1 g_1 + 0 \cdot e_1 g_2 + 0 \cdot e_2 g_1 + 0 \cdot e_2 g_2 + \alpha_{21} e_3 g_1 + \alpha_{22} e_3 g_2.
\end{aligned}$$

Согласно (12) детерминант матрицы этого линейного преобразования Δ отличен от нуля. В общем случае $\Delta = (\det \| \alpha_{ij} \|)^n \neq 0$.

Таким образом, показано существование невырожденного линейного преобразования, переводящего базис $\Gamma_4(ef, nm)$ в базис $\Gamma_5(eg, mn)$. Значит, эти ГЧС изоморфны:

$$Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m)) \simeq Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_3(g, m)),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть есть две пары изоморфных между собой систем $\Gamma_1(e, n) \simeq \Gamma_3(f, m)$ и $\Gamma_2(g, n) \simeq \Gamma_4(h, m)$, так что

$$e = L_1 g, \text{ или } e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} g_j, \quad f = L_2 h, \text{ или } f_k = \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl} h_l.$$

Как видим, системы $Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m))$ и $Д(\Gamma_3(g, n), \Gamma_4(h, m))$, полученные умножениями размерности, изоморфны, и их изоморфизм вытекает из теорем 1 и 2:

$$Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m)) \simeq Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_4(f, m)) =$$

$$= Д(\Gamma_4(e, n), \Gamma_1(f, m)) \simeq Д(\Gamma_4(e, n), \Gamma_3(f, m)) = Д(\Gamma_3(e, n), \Gamma_4(f, m)).$$

Возникает вопрос, как построить линейное преобразование, связывающее системы $Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m))$ и $Д(\Gamma_3(g, n), \Gamma_4(h, m))$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\Gamma_1(e, n) \simeq \Gamma_3(f, n)$ и $\Gamma_2(g, m) \simeq \Gamma_4(h, m)$, $e = L_1 g$, $f = L_2 h$. Тогда $Д(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, m)) = \Gamma_5(ef, mn) \simeq \Gamma_6(gh, mn) = Д(\Gamma_3(g, n), \Gamma_4(h, m))$ и существует невырожденное линейное преобразование, переводящее базис $\{ef\}$ в базис $\{gh\}$.

Первая часть утверждения доказана выше. Искомое линейное преобразование имеет вид

$$e_i f_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} g_j \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl} h_l = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{kl} g_j h_l, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall k = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Невырожденность линейного преобразования (13) можно доказать также, как и при доказательстве теоремы 2.

Метод построения пар изоморфных ГЧС высоких размерностей. С помощью теорем 1—3 можно строить ряды изоморфных пар ГЧС, а также операторы изоморфизма. Интерес к возможности конструирования пар изоморфных ГЧС высокой размерности, одна из которых сильнозаполненная, а другая — слабозаполненная, возник сравнительно недавно в связи с использованием ГЧС для математического моделирования. Для создания математических моделей, как правило, нужны сильнозаполненные ГЧС, а при вычислениях выгоднее применять изоморфные слабозаполненные ГЧС, так как в этом случае значительно сокращается количество вычислений.

Слабозаполненной гиперкомплексной числовой системой называется такая ГЧС, в таблице умножения которой много нулевых ячеек. В сильнозаполненной ГЧС нулевых ячеек мало или они вообще отсутствуют. Простейшими примерами таких ГЧС является пара следующих изоморфных ГЧС: $W \simeq W_1$.

Метод создания пар изомофных ГЧС высоких размерностей заключается в использовании процедуры умножения размерностей. При этом, как видно из (10), если к одной и той же ГЧС применять умножение сильнозаполненной ГЧС, то получится сильнозаполненная система, если применять умножение слабозаполненной ГЧС, то получится слабозаполненная система. Самым замечательным при таком процессе умножения размерности является то, что в соответствии с теоремой 2 полученные ГЧС будут изоморфными, если изоморфны системы, с помощью которых умножается размерность.

С помощью теоремы 3 строится линейное преобразование из одной системы в другую и обратно. Рассмотрим примеры построения таких систем.

Последовательность изоморфных пар ГЧС на основе системы двойных чисел. Пусть $\Gamma_1(e,2) = W(e,2) \simeq W_1(f,2) = \Gamma_3(f,2)$ и $\Gamma_2(g,2) =$ $= W(g,2) \simeq W_1(h,2) = \Gamma_4(h,2)$. Из (8) следует

$$L_1: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2, \\ e_2 = f_1 - f_2, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} g_1 = h_1 + h_2, \\ g_2 = h_1 - h_2, \end{cases}$$
$$L_1^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2)/2, \\ f_2 = (e_1 - e_2)/2, \end{cases} \quad L_2^{-1}: \begin{cases} h_1 = (g_1 + g_2)/2, \\ h_2 = (g_1 - g_2)/2. \end{cases} \tag{14}$$

Применим процедуру умножения размерности к системам Γ_1 и Γ_2 и к системам Γ_3 и Γ_4:

$$Д\,(\Gamma_1(e,2), \Gamma_2(g,2)) = \Gamma_5(eg,4),\ Д\,(\Gamma_3(f,2), \Gamma_4(h,2)) = \Gamma_6(fh,4).$$

На основании теорем 2 и 3 системы Γ_5 и Γ_6 изоморфны. Построим их таблицы умножения на основе блочных таблиц умножения (10):

<table>
<tr><td>$\varGamma_5$</td><td>e_1g_1</td><td>e_1g_2</td><td>e_2g_1</td><td>e_2g_2</td></tr>
<tr><td>e_1g_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1e_1\varGamma_2$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1e_2\varGamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_1g_2</td></tr>
<tr><td>e_2g_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_1e_2\varGamma_2$</td><td colspan="2" rowspan="2">$e_2e_2\varGamma_2$</td></tr>
<tr><td>e_2g_2</td></tr>
</table>

$\Rightarrow$

$\varGamma_5$	e_1g_1	e_1g_2	e_2g_1	e_2g_2
e_1g_1	e_1g_1	e_1g_2	e_2g_1	e_2g_2
e_1g_2	e_1g_2	e_1g_1	e_2g_2	e_2g_1
e_1g_2	e_2g_1	e_2g_2	e_1g_1	e_1g_2
e_2g_2	e_2g_2	e_1g_2	e_1g_2	e_1g_1

<table>
<tr><td>$\varGamma_6$</td><td>f_1h_1</td><td>f_1h_2</td><td>f_2h_1</td><td>f_2h_2</td></tr>
<tr><td>f_1h_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_1\varGamma_4$</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_2\varGamma_4$</td></tr>
<tr><td>f_1h_2</td></tr>
<tr><td>f_2h_1</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_2\varGamma_4$</td><td colspan="2" rowspan="2">$f_1f_1\varGamma_4$</td></tr>
<tr><td>f_2h_2</td></tr>
</table>

$\Rightarrow$

$\varGamma_6$	f_1h_1	f_1h_2	f_2h_1	f_2h_2
f_1h_1	f_1h_1	0	0	0
f_1h_2	0	f_1h_2	0	0
f_2h_1	0	0	f_2h_1	0
f_2h_2	0	0	0	f_2h_2

Как видим, система $\varGamma_5(eg,4)$ — сильнозаполненная, а система $\varGamma_6(fh,4)$ — слабозаполненная. В то же время, они изоморфны, как это следует из теорем 1 и 2. Построим линейное преобразование, связывающее базисы $\{eg\}$ и $\{fh\}$ в соответствии с теоремой 2, (11) и (14):

$$
\begin{aligned}
e_1g_1 &= (f_1+f_2)(h_1+h_2) = f_1h_1+f_1h_2+f_2h_1+f_2h_2,\\
e_2g_1 &= (f_1-f_2)(h_1+h_2) = f_1h_1+f_1h_2-f_2h_1-f_2h_2,\\
e_1g_2 &= (f_1+f_2)(h_1-h_2) = f_1h_1-f_1h_2+f_2h_1-f_2h_2,\\
e_2g_2 &= (f_1-f_2)(h_1-h_2) = f_1h_1-f_1h_2-f_2h_1+f_2h_2.
\end{aligned}
$$

Легко убедиться, что детерминант этого преобразования отличен от нуля, т.е. оно имеет обратное преобразование, которое проще построить по обратным преобразованиям (14):

$$
\begin{aligned}
f_1h_1 &= (e_1g_1+e_1g_2+e_2g_1+e_2g_2)/4,\\
f_2h_1 &= (e_1g_1+e_1g_2-e_2g_1-e_2g_2)/4,\\
f_1h_2 &= (e_1g_1-e_1g_2+e_2g_1-e_2g_2)/4,\\
f_2h_2 &= (e_1g_1-e_1g_2-e_2g_1+e_2g_2)/4.
\end{aligned}
$$

Многосимвольные обозначения можно заменить односимвольными: $e_ig_j = m_{j+2(i-1)}, f_ih_j = M_{j+2(i-1)}, i=1,2, j=1,2$.

Обозначим полученные ГЧС $W^{(2)}(m,4)$ и $W_1^{(2)}(M,4)$, где показатель в верхних скобках — порядок удвоения исходных систем W и W_1, при этом $W^{(2)}(m,4) \simeq W_1^{(2)}(M,4)$:

$W^{(2)}$	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4
m_2	m_2	m_1	m_4	m_3
m_3	m_3	m_4	m_1	m_2
m_4	m_4	m_3	m_2	m_1

$\simeq$

$W_1^{(2)}$	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	M_1	0	0	0
M_2	0	M_2	0	0
M_3	0	0	M_3	0
M_4	0	0	0	M_3

,

$$\begin{aligned}
m_1 &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \quad M_1 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) / 4, \\
m_2 &= M_1 - M_2 + M_3 - M_4, \quad M_2 = (m_1 - m_2 + m_3 - m_4) / 4, \\
m_3 &= M_1 + M_2 - M_3 - M_4, \quad M_3 = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4) / 4, \\
m_4 &= M_1 - M_2 - M_3 + M_4, \quad M_4 = (m_1 - m_2 - m_3 + m_4) / 4.
\end{aligned}$$

Продолжим процесс умножения размерности: $Д\,(W^{(2)}(m, 4), W(e, 2)) = W^{(3)}(em, 8)$ и $Д\,(W_1^{(2)}(M, 4), W_1(f, 2)) = W_1^{(3)}(fM, 8)$. Из теорем 1 и 2 следует $W^{(3)}(em, 8) \simeq W_1^{(3)}(fM, 8)$. Построим блочное представление этих систем:

$W^{(3)}$	$e_1(m_1, ..., m_2)$	$e_2(m_1, ..., m_2)$
$e_1(m_1, ..., m_2)$	$e_1\ W^{(2)}(m, 4)$	$e_2\ W^{(2)}(m, 4)$
$e_2(m_1, ..., m_2)$	$e_2\ W^{(2)}(m, 4)$	$e_1\ W^{(2)}(m, 4)$

$W_1^{(3)}$	$f_1(M_1, ..., M_4)$	$f_2(M_1, ..., M_4)$
$f_1(M_1, ..., M_4)$	$f_1\ W_1^{(2)}(M, 4)$	$0 \cdot W_1^{(2)}(M, 4)$
$f_2(M_1, ..., M_4)$	$0 \cdot W_1^{(2)}(M, 4)$	$f_1\ W_1^{(2)}(M, 4)$

.

Число умножений при переходе к слабозаполненным системам для этого класса сокращается в *n* раз.

Последовательность изоморфных пар ГЧС на основе системы квадриплексных чисел. Пусть $Г_7(e, 4) = K(e, 4) \simeq C \oplus C(f, 4) = Г_9(f, 4)$ и $Г_8(g, 4) = K(g, 4) \simeq C \oplus C(h, 4) = Г_{10}(h, 4)$. Как показано выше, есть прямое и обратное преобразования (8). Применим процедуру умножения размерности к системам $Г_7$ и $Г_8$:

$$Д\,(Г_7(e, 4), Г_8(g, 4)) = Г_{11}(eg, 16),$$

и к системам $Г_3$ и $Г_4$:

$$Д\,(Г_9(f, 4), Г_{10}(h, 4)) = Г_{12}(fh, 16).$$

На основании теорем 2 и 3 системы $Г_{11}(eg, 16)$ и $Г_{12}(fh, 16)$ изоморфны и их блочные представления примут следующий вид:

Γ_{11}	$e_1(g_1,...,g_4)$	$e_2(g_1,...,g_4)$	$e_3(g_1,...,g_4)$	$e_4(g_1,...,g_4)$
$e_1(g_1,...,g_4)$	$e_1\ K(g,4)$	$e_2\ K(g,4)$	$e_3\ K(g,4)$	$e_4\ K(g,4)$
$e_2(g_1,...,g_4)$	$e_2\ K(g,4)$	$-e_1\ K(g,4)$	$e_4\ K(g,4)$	$-e_3\ K(g,4)$
$e_3(g_1,...,g_4)$	$e_3\ K(g,4)$	$e_4\ K(g,4)\,e_4$	$-e_1\ K(g,4)$	$-e_2\ K(g,4)$
$e_4(g_1,...,g_4)$	$e_4\ K(g,4)$	$-e_3\ K(g,4)$	$-e_2\ K(g,4)$	$e_1\ K(g,4)$

,

<table>
<tr><td>$C \oplus C$</td><td>$f_1(h_1,...,h_4)$</td><td>$f_2(h_1,...,h_4)$</td><td>$f_3(h_1,...,h_4)$</td><td>$f_4(h_1,...,h_4)$</td></tr>
<tr><td>$f_1(h_1,...,h_4)$</td><td>$f_1 \cdot C \oplus C$</td><td>$f_2 \cdot C \oplus C$</td><td colspan="2" rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>$f_2(h_1,...,h_4)$</td><td>$f_2 \cdot C \oplus C$</td><td>$-f_1 \cdot C \oplus C$</td></tr>
<tr><td>$f_3(h_1,...,h_4)$</td><td colspan="2" rowspan="2">0</td><td>$f_3 \cdot C \oplus C$</td><td>$f_4 \cdot C \oplus C$</td></tr>
<tr><td>$f_4(h_1,...,h_4)$</td><td>$f_4 \cdot C \oplus C$</td><td>$-f_3 \cdot C \oplus C$</td></tr>
</table>

.

Таблицы умножения в односимвольном виде можно построить, применяя преобразования $m_k = e_{\left[\frac{k-1}{n}\right]+1} g_{((k-1) \bmod n)+1}$, $M_k = f_{\left[\frac{k-1}{n}\right]+1} h_{((k-1) \bmod n)+1}$, $n = 4$, $k = 1, \ldots, n^2$:

Γ_{11}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	–1	4	–3	6	–5	8	–7	10	–9	12	–11	14	–13	16	–15
3	3	4	–1	–2	7	8	–5	–6	11	12	–9	–10	15	16	–13	–14
4	4	–3	–2	1	8	–7	–6	5	12	–11	–10	9	16	–15	–14	13
5	5	6	7	8	–1	–2	–3	–4	13	14	15	16	–9	–10	–11	–12
6	6	–5	8	–7	–2	1	–4	3	14	–13	16	–15	–10	9	–12	11
7	7	8	–5	–6	–3	–4	1	2	15	16	–13	–14	–11	–12	9	10
8	8	–7	–6	5	–4	3	2	–1	16	–15	–14	13	–12	11	10	–9
9	9	10	11	12	13	14	15	16	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8
10	10	–9	12	–11	14	–13	16	–15	–2	1	–4	3	–6	5	–8	7
11	11	12	–9	–10	15	16	–13	–14	–3	–4	1	2	–7	–8	5	6
12	12	–11	–10	9	16	–15	–14	13	–4	3	2	–1	–8	7	6	–5
13	13	14	15	16	–9	–10	–11	–12	–5	–6	–7	–8	1	2	3	4
14	14	–13	16	–15	–10	9	–12	11	–6	5	–8	7	2	–1	4	–3
15	15	16	–13	–14	–11	–12	9	10	–7	–8	5	6	3	4	–1	–2
16	16	–15	–14	13	–12	11	10	–9	–8	7	6	–5	4	–3	–2	1

,

<table>
<tr><td>Γ_{11}</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="8" colspan="8">0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>–1</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>–5</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>–3</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>–7</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>–1</td><td>–2</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>–5</td><td>0</td><td>0</td><td>–2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>7</td><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>–3</td><td>–4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>–7</td><td>0</td><td>0</td><td>–4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="8" colspan="8">0</td><td>9</td><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>13</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td>–9</td><td>0</td><td>0</td><td>14</td><td>–13</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>11</td><td>12</td><td>0</td><td>0</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0</td><td>0</td><td>12</td><td>–11</td><td>0</td><td>0</td><td>16</td><td>–15</td></tr>
<tr><td>13</td><td>13</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td><td>–9</td><td>–10</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>14</td><td>14</td><td>–13</td><td>0</td><td>0</td><td>–10</td><td>9</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>15</td><td>0</td><td>0</td><td>15</td><td>16</td><td>0</td><td>0</td><td>–11</td><td>–12</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0</td><td>0</td><td>16</td><td>15</td><td>0</td><td>0</td><td>–12</td><td>11</td></tr>
</table>

В этих таблицах для экономии места приведены только индексы элементов базиса и знаки перед ними. Как видим, система $\Gamma_{11}(m,16)$ — сильнозаполненная, а система $\Gamma_{12}(M,16)$ — слабозаполненная. В то же время, они изоморфны, как это следует из теорем 1 и 2.

Построим линейное преобразование, связывающее базисы $\{m\}$ и $\{M\}$ в соответствии с теоремой 2 и преобразованием (8):

$$
\begin{aligned}
m_1 &= M_1 + M_3 + M_9 + M_{11}, & m_9 &= -M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15},\\
m_2 &= -M_2 + M_4 - M_{10} + M_{12}, & m_{10} &= M_6 - M_8 + M_{14} - M_{16},\\
m_3 &= -M_2 - M_4 - M_{10} - M_{12}, & m_{11} &= M_6 + M_8 + M_{14} + M_{16},\\
m_4 &= -M_1 + M_3 - M_9 + M_{11}, & m_{12} &= M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15},\\
m_5 &= -M_5 - M_7 + M_{13} + M_{15}, & m_{13} &= -M_1 - M_3 + M_9 + M_{11},\\
m_6 &= M_6 - M_8 - M_{14} + M_{16}, & m_{14} &= M_2 - M_4 - M_{10} + M_{12},\\
m_7 &= M_6 + M_8 - M_{14} - M_{16}, & m_{15} &= M_2 + M_4 - M_{10} - M_{12},\\
m_8 &= M_5 - M_7 - M_{13} + M_{15}, & m_{16} &= M_1 - M_3 - M_9 + M_{11}.
\end{aligned}
$$

Существует и обратное преобразование, которое проще построить по обратным преобразованиям (9). Число умножений при переходе к слабозаполненным системам для этого класса сокращается в $n/2$ раз.

Выводы

Продолженный метод синтеза изоморфных пар ГЧС различной размерности и структуры может быть применен для получения пар более высоких размерностей. С помощью этого метода можно строить ГЧС, комбинируя различные по типу и размерности ГЧС. Например, на основе изоморфизма $T \simeq R \oplus C$ можно строить ряды изоморфных ГЧС размерности 3^n. На основе этого же изоморфизма и $W \simeq W_1$ можно получать изоморфные пары размерностью $3n$ и так далее. Использование таких пар ГЧС приводит к существенному повышению эффективности вычислительных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения.— Київ: Ін-т проблем реєстрації інформації НАН України, 2010. — 389 с.
2. *Синьков М.В., Боярінова Ю.Є., Каліновський Я.О. та ін.* Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія // Ін-т пробл. реєстрації інформації НАН України. — Препр. — Київ, 2009. — 44 с. — Режим доступу: [Електронний ресурс]. — http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/SinkovBoyarinova.pdf.
3. *Chaitin-Chatelen F., Meskauskas T., Zaoui A.* Computation with Hypercomplex Numbers // GERFACS Technical Report TR/PA/00/69. — Режим доступа: [Электронный ресурс]. — http://www.gerfacs.fr/ (2000).
4. *Сильвестров В.В.* Системы чисел // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — № 8. — С. 121—127.
5. *Baez J.C.* The Octonions. — Режим доступа: [Электронный ресурс]. — http://math/ucr.edu/home/baez/_HLT74711112_HLT74711105_HLT74711120_HLT74711105ctonions/octonions. html (2001).
6. *Chaitin-Chatelen F., Meskauskas T., Zaoui A.* Geometry and Algebra // CERFACS Technical Report TR/PA/00/74. — Режим доступа: [Электронный ресурс]. — http://cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-00-74.ps.gz (2000).
7. *Chaitin-Chatelen F.* The computing power of Geometry // CERFACS Technical Report TR/PA/99/74. — Режим доступа: [Электронный ресурс]. — http://cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-99-74.ps.gz (1999).
8. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М. : Наука, 1973. — 144 с.

Ya.A. Kalinovsky, Y.E. Boyarinova, T.V. Sinkova, A.S. Sukalo

CONSTRUCTION OF HIGH DIMENSIONAL
ISOMORPHIC HYPERCOMPLEX NUMERICAL SYSTEMS

A method for construction of isomorphous hypercomplex numbers systems has been proposed. Their use in mathematical modeling allows reducing considerably the volume of computations. The examples of construction of isomorphous pairs on the basis of the systems of doubling quadriplex numbers are presented.

K e y w o r d s: hypercomplex number system, Cayley's table, isomorphism, doubling system, linear operator.

REFERENCES

1. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.O. and Boyarinova, Yu.E. (2010), *Konechnomernyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
2. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.O. and Boyarinova, Yu.E. (2009), *Giperkompleksnyie chislovyie sistemy: Osnovy teorii, prakticheskoe primeneniye, bibliografiya* [Hypercomplex numerical systems: Fundamentals of the theory, practical application, bibliography], NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, available at: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/SinkovBoyarinova.pdf.
3. Chaitin-Chatelen, F., Meskauskas, T. and Zaoui, A. (2000), Computation with Hypercomplex Numbers, *GERFACS Technical Report TR/PA/00/69,* available at: http://www.gerfacs.fr.
4. Silvestrov, V.V. (1998), “Number systems”, *Soros Educational Journal*, no. 8, pp. 121-127.
5. Baez, J.C. (2001), The octonions, available at: http://math/ucr.edu/home/baez/Octonions/octonions.html.
6. Chaitin-Chatelen, F., Meskauskas, T. and Zaoui, A. (2000), Geometry and algebra, *CERFACS Technical Report TR/PA/00/74,* available at: http://www.cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-00-74.ps.gz.
7. Chaitin-Chatelen, F. (1999), The computing power of geometry, *CERFACS Technical Report TR/PA/99/74*, available at: http://www.cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-99-74.ps.gz.
8. Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S. (1973), *Giperkompleksnyie chisla* [Hypercomplex numbers], Nauka, Moscow, Russia.

Поступила 09.06.16;
после доработки 11.08.16

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

СИНЬКОВА Татьяна Владимировна, науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1992 г. окончила Национальный технический университет «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.

СУКАЛО Алина Сергеевна, аспирантка Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 2013 г. окончила Житомирский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.