МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Ин-т технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@voliacable.com)

Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса

На основе семейства двухкомпонентных смесей распределений определен новый класс симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса γ_4. Построены модели трех типов этого класса, приведены примеры распределений. Полученные результаты позволяют осуществлять математическое и компьютерное моделирование негауссовских случайных величин с симметричными распределениями и нулевыми коэффициентами эксцесса γ_4.

На основі сім’ї двокомпонентних сумішей розподілів визначено новий клас симетричних негауссівських розподілів з нульовим коефіцієнтом ексцесу γ_4. Побудовано моделі трьох типів цього класу, наведено приклади розподілів. Отримані результати дозволяють здійснювати математичне і комп’ютерне моделювання негауссівських випадкових величин з симетричними розподілами і нульовими коефіцієнтами ексцесу γ_4.

Ключевые слова: симметричные распределения, кумулянтные коэффициенты, кумулянтный анализ, коэффициент эксцесса, смеси распределений.

Одним из методов статистических исследований физических величин и процессов, имеющих негауссовские распределения, является кумулянтный анализ, позволяющий достаточно просто и эффективно решать различные прикладные задачи [1—9]. При анализе негауссовских распределений основную роль играют кумулянтные коэффициенты $\gamma_s, \gamma_s = \kappa_s / \kappa_2^{s/2}$, где κ_s — кумулянты распределений, $\kappa_s = \left.\dfrac{d^s \ln f(u)}{i^s du^s}\right|_{u=0}$; $f(u)$ — характеристическая функция, $i = \sqrt{-1}$.

При использовании кумулянтных методов исследований негауссовских распределений различают две задачи — прямую и обратную. В прямой задаче объектом анализа являются непосредственно кумулянтные коэффициенты исследуемых случайных величин и процессов и результаты их функциональных преобразований [1—7]. В этой задаче знание закона распределения, как правило, не предполагается. Обратная задача заключается в идентификации неизвестного закона распределения исследуемых случайных величин и процессов на основе известных или измеренных их кумулянтных коэффициентов [8—12].

В настоящее время при решении этих задач в приложениях, как правило, ограничиваются использованием только двух кумулянтных коэффициентов: асимметрии — γ_3 и эксцесса — γ_4 [1, 4—7]. В задачах анализа такое ограничение допустимо, хотя применение кумулянтных коэффициентов высших порядков, например в задачах диагностики, может повысить достоверность диагностирования.

Идентификация неизвестных негауссовских распределений только на основе коэффициентов γ_3 и γ_4 может привести к неверным результатам и выводам. Например, в технических приложениях ошибочно считается, что при выполнении условия $\gamma_3 = 0$ распределение является симметричным, а при $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$ — гауссовским (ГОСТ Р ИСО 5479-2002). Такие же выводы следуют при использовании для идентификации плотности вероятностей систем распределений Пирсона, Джонсона [10] и отрезков рядов Грама—Шарлье с четырьмя слагаемыми [8, 10], которые определяются только с помощью коэффициентов γ_3, γ_4 и широко применяются в различных технических приложениях.

Для корректного применения кумулянтных методов в приложениях необходимо учитывать результаты исследований кумулянтных коэффициентов высших порядков [1, 2, 10—18]. Проблемы, обусловленные применением конечного числа кумулянтных коэффициентов, рассмотрены в работах [1, 10, 13, 18]. В [1, 2] исследованы области допустимых значений кумулянтных коэффициентов. В работах [14—17] проанализированы свойства коэффициентов γ_3 и γ_4 негауссовских моделей. В работе [11] построены модели негауссовских плотностей вероятностей, у которых $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$, в [12] — модели несимметричных распределений с нулевым коэффициентом γ_3.

Актуальной остается задача получения негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса. Рассмотрим ее решение.

Определение класса распределений. Для получения функций распределения $F(x)$ негауссовских случайных величин ξ, имеющих симметричные распределения с нулевым коэффициентом эксцесса, используем семейство двухкомпонентных дискретных смесей распределений, которое определяется следующей формулой [18]:

$$F(x) = d_1 F_1(x) + d_2 F_2(x), \qquad (1)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — составляющие смеси, являющиеся некоторыми функциями распределения; d_1, d_2 — весовые коэффициенты смеси, $d_k \in (0,1)$, $k = 1,2$; $d_1 + d_2 = 1$.

Множество функций распределения (1) позволяет моделировать различные классы распределений, свойства которых определяются, прежде всего, свойствами функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$. В частности, если обе составляющие смеси — кусочно-постоянные функции распределения, то $F(x)$ — также кусочно-постоянная и ξ является случайной величиной дискретного типа; если хотя бы одна составляющая смеси — кусочно- постоянная функция, то $F(x)$ имеет разрывы первого рода и случайная величина ξ является величиной смешанного типа. Если обе функции, $F_1(x)$ и $F_2(x)$, абсолютно непрерывны, то $F(x)$ также абсолютно непрерывна, случайная величины ξ относится к непрерывному типу и у нее существует плотность вероятностей

$$p(x) = d_1 p_1(x) + d_2 p_2(x), \tag{2}$$

где $p_k(x)$ — плотности вероятностей составляющих смеси (2), $p_k(x) = F_k'(x)$, $k = 1,2$.

Определим условия для составляющих $F_1(x)$ и $F_2(x)$, при которых функция распределения $F(x)$ смеси (1) является симметричной.

Определение 1. Пусть ξ — произвольная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Тогда функция

$$F^*(x) = 1 - F(-x+0) \tag{3}$$

также является функцией распределения и называется сопряженной к $F(x)$ функцией распределения [18].

Определение 2. Функция распределения $F(x)$ называется симметричной [18], если она равна своей сопряженной функции распределения $F^*(x)$, т.е.

$$F(x) = F^*(x). \tag{4}$$

Заметим, что условием симметричности непрерывного распределения является четность ее плотности вероятностей $p(x)$.

Найдем сопряженную функцию распределения $F^*(x)$ смеси (1). Подставляя выражение (1) в формулу (3) и учитывая, что $d_1 + d_2 = 1$, получаем

$$F^*(x) = 1 - [d_1 F_1(-x+0) + d_2 F_2(-x+0)] =$$

$$= d_1[1 - F_1(-x+0)] + d_2[1 - F_2(-x+0)].$$

Следовательно,

$$F^*(x) = d_1 F_1^*(x) + d_2 F_2^*(x). \tag{5}$$

Подставив выражения (1) и (5) в формулу (4), запишем

$$d_1 F_1(x) + d_2 F_2(x) = d_1 F_1^*(x) + d_2 F_2^*(x),$$

откуда получаем уравнение

$$d_1[F_1(x)-F_1^*(x)]+d_2[F_2(x)-F_2^*(x)]=0,$$

из которого следует, что функция распределения $F(x)$ смеси (1) является симметричной при любых значениях весовых коэффициентов d_1, d_2, если составляющие $F_1(x)$, $F_2(x)$ смеси являются симметричными функциями распределения. В частности, условием симметрии смеси (2) является четность плотностей вероятностей составляющих. В этом случае плотность вероятностей $p(x)$ смеси — четная функция.

У симметричных распределений начальные и центральные моменты совпадают, при этом отличны от нуля только четные центральные моменты μ_s, которые для смеси (1) имеют вид

$$\mu_s = d_1\mu_{s,1} + d_2\mu_{s,2}, \tag{6}$$

где $\mu_{s,1}, \mu_{s,2}$ — центральные моменты составляющих смеси. Очевидно, что моменты μ_s существуют, если существуют моменты порядка $r \geq s$ составляющих смеси. Далее будем рассматривать составляющие $F_1(x)$ и $F_2(x)$ смеси, у которых существуют центральные моменты порядка $s \geq 6$.

Кумулянтные коэффициенты симметричных распределений связаны с центральными моментами известными соотношениями [10], например,

$$\gamma_4 = M_4 - 3, \tag{7}$$

$$\gamma_6 = M_6 - 15M_4 + 30, \tag{8}$$

где $M_s = \mu_s / \mu_2^{s/2}$ — нормированные центральные моменты порядка s, которые для смеси (1) с учетом (6) имеют вид

$$M_s = \frac{d_1\mu_{s,1} + d_2\mu_{s,2}}{(d_1\mu_{2,1} + d_2\mu_{2,2})^{s/2}}. \tag{9}$$

Определим класс симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса, который является подмножеством смесей распределений (1).

Определение 3. Пусть у смеси (1) составляющие $F_1(x)$, $F_2(x)$ являются симметричными функциями распределения и ее кумулянтные коэффициенты γ_4, γ_6 одновременно удовлетворяют условиям

$$\gamma_4 = 0,\ \gamma_6 \neq 0. \tag{10}$$

Тогда смесь (1) представляет собой класс симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса. При выполнении условия $\gamma_4 = 0$ формула (8) упрощается и принимает вид

$$\gamma_6 = M_6 - 15. \tag{11}$$

Покажем, что определенный таким образом класс распределений не является пустым. Подставляя в (7) выражение (9), после преобразований получаем выражение для нахождения коэффициента эксцесса смеси (1):

$$\gamma_4 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = \frac{d_1 \kappa_{4,1} + d_2 \kappa_{4,2} + 3 d_1 d_2 (\mu_{2,1} - \mu_{2,2})^2}{(d_1 \mu_{2,1} + d_2 \mu_{2,2})^2}, \tag{12}$$

где κ_s — кумулянты смеси; $\kappa_{4,1}$, $\kappa_{4,2}$ — кумулянты ее составляющих.

Проанализируем выражение (12), учитывая, что кумулянты $\kappa_{4,1}$, $\kappa_{4,2}$ могут быть отрицательными, положительными или равными нулю. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\kappa_{4,1} > 0$ и $\kappa_{4,2} > 0$. Тогда при любых значениях весовых коэффициентов d_1, d_2 смеси и дисперсиях $\mu_{2,1}$, $\mu_{2,2}$ ее составляющих $\gamma_4 > 0$ и смесь (1) не входит в класс симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса.

2. Пусть составляющие смеси $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — центрированные гауссовские функции распределения с одинаковыми дисперсиями $\mu_{2,1} = \mu_{2,2}$. Тогда смесь (1) имеет гауссовское распределение, у которого $\gamma_4 = 0$. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются функциями распределения вырожденных в нуле случайных величин, то $\mu_{2,1} = \mu_{2,2} = 0$, $\kappa_{4,1} = \kappa_{4,2} = 0$ и смесь (1) имеет вырожденное распределение, у которого кумулянт $\kappa_4 = 0$. Таким образом, гауссовское и вырожденное распределения являются частными случаями рассматриваемого класса.

3. Пусть кумулянты $\kappa_{4,1}$ и $\kappa_{4,2}$ имеют различные знаки, например $\kappa_{4,1} > 0$, а $\kappa_{4,2} < 0$. Тогда при $d_1 \to 1$ $\gamma_4 \to \gamma_{4,1} > 0$, а при $d_1 \to 0$ $\gamma_4 \to \gamma_{4,2} < 0$, где $\gamma_{4,1}$, $\gamma_{4,2}$ — коэффициенты эксцесса составляющих смеси. Поэтому, в зависимости от значений коэффициента d_1, значения коэффициента эксцесса γ_4 смеси могут быть отрицательными, положительными или равными нулю. В этом случае смесь (1) входит в класс симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса.

Таким образом, определен непустой класс симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса, который позволяет получать функции распределения $F(x)$ дискретных, непрерывных и смешанных случайных величин.

В общей постановке задача нахождения функций распределения симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса заключается в определении функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$ и весовых коэффициентов d_1, d_2 смеси (1), которые обеспечивают выполнение условий (10).

Рассмотрим примеры построения моделей симметричных негауссовских распределений с нулевым коэффициентом эксцесса. Для конкретизации задачи на основании формулы (12) запишем уравнение $\gamma_4 = 0$ в явном виде:

$$\kappa_4 = d_1 \kappa_{4,1} + d_2 \kappa_{4,2} + 3 d_1 d_2 (\mu_{2,1} - \mu_{2,2})^2 = 0 . \tag{13}$$

Будем считать заданными кумулянты $\kappa_{4,1}$, $\kappa_{4,2}$ и дисперсии $\mu_{2,1}$, $\mu_{2,2}$ составляющих смеси (1). Тогда задача заключается в определении таких значений весовых коэффициентов d_1, d_2, при которых решение уравнения (13) существует.

Модели типа 1. Пусть дисперсии составляющих смеси (1) совпадают:

$$\mu_{2,1} = \mu_{2,2}. \tag{14}$$

В этом случае дисперсия смеси $\mu_2 = \mu_{2,1} = \mu_{2,2}$, а уравнение (13) принимает вид $d_1 \gamma_{4,1} + d_2 \gamma_{4,2} = 0$, откуда получаем формулы для нахождения весовых коэффициентов d_1 и d_2:

$$d_1 = \frac{\gamma_{4,2}}{\gamma_{4,2} - \gamma_{4,1}}, \quad d_2 = \frac{\gamma_{4,1}}{\gamma_{4,1} - \gamma_{4,2}}. \tag{15}$$

Из формул (15) следует, что в данном случае решение есть всегда, если коэффициенты эксцесса $\gamma_{4,1}$, $\gamma_{4,2}$ составляющих смеси имеют различные знаки.

Пример 1. Пусть у смеси (2) $p_1(x)$ — плотность вероятностей параболического распределения, $p_2(x)$ — плотность вероятностей логистического распределения [19] (табл. 1). Используя условие (14) и данные табл. 1, получаем выражение, связывающее параметры a и β плотностей вероятностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$ составляющих смеси: $a = (5/3)^{0,5} \pi / \beta$.

Таблица 1

Плотность вероятностей	Центральный момент	Коэффициент эксцесса
$p_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-a, a], \\ 0{,}75 \dfrac{a^2 - x^2}{a^3}, & x \in (-a, a], \end{cases}$ $a > 0$	$\mu_{s,1} = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное}, \\ \dfrac{3a^s}{(s+1)(s+3)}, & s - \text{четное}, \end{cases}$	$\gamma_{4,1} = -6/7$
$p_2(x) = \dfrac{0{,}25\beta}{\mathrm{ch}^2(0{,}5\beta x)},$ $x \in (-\infty, \infty), \beta > 0$	$\mu_{s,2} = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное}, \\ \left(\dfrac{\pi}{\beta}\right)^s (2^s - 2) \lvert B_s \rvert, & s - \text{четное}, \end{cases}$ где B_s — числа Бернулли, $B_2 = 1/6$; $B_4 = -1/30$; $B_6 = 1/42$	$\gamma_{4,2} = 1{,}2$

Задаем значение $\beta = \pi$ и находим значения параметров смеси распределения (табл. 2). Подставляя в формулу (2) данные табл. 1 и 2, получаем плотность вероятностей симметричного негауссовского распределения с нулевым коэффициентом эксцесса:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{0{,}1042\pi}{\mathrm{ch}^2(0{,}5\pi x)}, \; x \notin (-1{,}291; 1{,}291], \\ 0{,}3388 - 0{,}2033x^2 + \dfrac{0{,}1042\pi}{\mathrm{ch}^2(0{,}5\pi x)}, \; x \in (-1{,}291; 1{,}291]. \end{cases} \quad (16)$$

На рис. 1, *а*, представлены графики плотности вероятностей (16) (сплошная линия) и гауссовского распределения с дисперсией $\sigma^2 = \mu_2 = 1/3$ (штриховая линия).

Модели типа 2. Пусть у составляющих смеси (1) дисперсии $\mu_{2,1}$, $\mu_{2,2}$ различны, а кумулянты $\kappa_{4,1}$ и $\kappa_{4,2}$ имеют различные знаки, в частности $\kappa_{4,1} < 0$, $\kappa_{4,2} > 0$. Предположим, что кумулянты $\kappa_{4,1}$ и $\kappa_{4,2}$ удовлетворяют условию

$$\kappa_{4,1} = -\kappa_{4,2}. \quad (17)$$

Для выполнения условия (17) параметры составляющих смеси не могут быть выбраны произвольно и должны быть связаны определенными соотношениями. Перепишем равенство (17) в виде $\gamma_{4,1}\mu_{2,1}^2 = -\gamma_{4,2}\mu_{2,2}^2$, откуда следует формула, связывающая дисперсии $\mu_{2,1}$, $\mu_{2,2}$ и коэффициенты эксцесса $\gamma_{4,1}, \gamma_{4,2}$ составляющих смеси:

$$\gamma_{4,1} = -\gamma_{4,2} / M^2, \quad (18)$$

где

$$M = \mu_{2,1} / \mu_{2,2}. \quad (19)$$

Найдем весовой коэффициент d_2 смеси, используя уравнение (13), которое при условии (17) принимает вид

$$\kappa_{4,2}(d_2 - d_1) + 3d_1 d_2 (\mu_{2,1} - \mu_{2,2})^2 = 0. \quad (20)$$

Разделив левую и правую части (20) на $\mu_{2,2}^2$, получаем уравнение

$$\gamma_{4,2}(d_2 - d_1) + 3d_1 d_2 (M - 1)^2 = 0. \quad (21)$$

Таблица 2

Значения параметров смеси					
a	d_1	d_2	μ_2	μ_6	γ_6
1,291	0,5833	0,4167	1/3	0,7437	5,0795

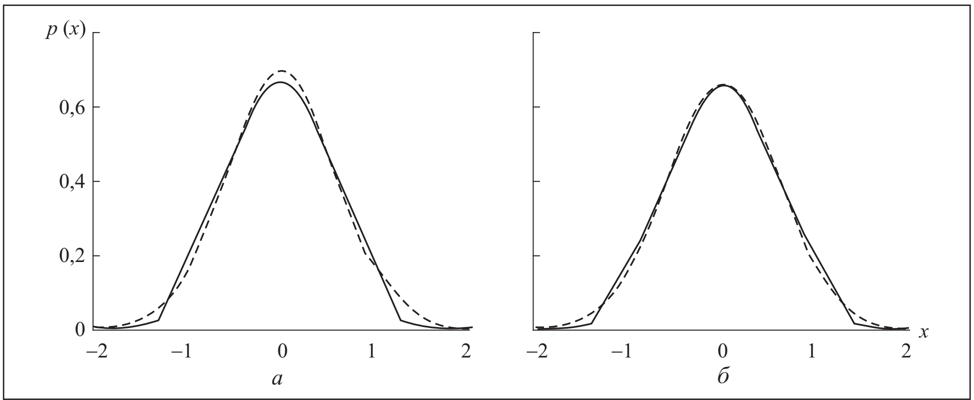

Рис. 1

Учитывая, что $d_1 = 1 - d_2$, после преобразований формулы (21) получаем уравнение для нахождения коэффициента d_2:

$$3d_2^2(M-1)^2 - d_2[3(M-1)^2 + 2\gamma_{4,2}] + \gamma_{4,2} = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) имеет вид

$$d_2^{(1,2)} = 0{,}5 + \frac{\gamma_{4,2}}{3(M-1)^2} \pm \sqrt{0{,}25 + \frac{\gamma_{4,2}^2}{9(M-1)^4}}. \quad (23)$$

Проанализируем формулу (23). Поскольку $\gamma_{4,2} > 0$ и при $A > 0,\ B > 0$ справедливо неравенство $A + B > \sqrt{A^2 + B^2}$, при любых значениях коэффициента $\gamma_{4,2} > 0$ и параметра M оба корня, $d_2^{(1)}$ и $d_2^{(2)}$, положительны. Однако корень $d_2^{(2)}$, соответствующий знаку плюс перед квадратным корнем, необходимо исключить, так как он всегда больше единицы и не может быть весовым коэффициентом смеси. Поэтому решением уравнения (22) является единственный корень, $d_2 = d_2^{(1)}$, который соответствует знаку минус перед квадратным корнем в выражении (23).

Таким образом, практическая реализация рассмотренной модели смеси (1) с нулевым коэффициентом эксцесса не имеет каких-либо ограничений.

Пример 2. Пусть у смеси (2) $p_1(x)$ — плотность вероятностей параболического распределения, $p_2(x)$ — плотность вероятностей логистического распределения (см. табл. 1). На основании формулы (18) и данных табл. 1 находим $M = (-\gamma_{4,2} / \gamma_{4,1})^{0,5} = 1{,}4^{0,5}$. Используя значение параметра

M и формулу (19), получаем выражение, связывающее параметры α и β плотностей вероятностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$ составляющих смеси:

$$a = (5/3)^{0,5} 1{,}4^{0,25} \pi / \beta \,. \qquad (24)$$

Задаем значение $\beta = \pi$ и, используя данные табл. 1 и формулы (6), (11), (23) и (24), находим значения параметров смеси распределения (табл. 3). Подставляя в формулу (2) данные табл. 1 и 3, получаем плотность вероятностей симметричного негауссовского распределения с нулевым коэффициентом эксцесса:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{0{,}1224\pi}{\mathrm{ch}^2(0{,}5\pi x)}, \ x \notin (-1{,}4043; 1{,}4043], \\ 0{,}2727 - 0{,}1383x^2 + \dfrac{0{,}1224\pi}{\mathrm{ch}^2(0{,}5\pi x)}, \ x \in (-1{,}4043; 1{,}4043]. \end{cases} \qquad (25)$$

На рис. 1, *б*, представлены графики плотности вероятностей (25) (сплошная линия) и гауссовского распределения с дисперсией $\sigma^2 = \mu_2 = 0{,}3645$ (штриховая линия).

Модели типа 3. Пусть у составляющих смеси (1) дисперсии $\mu_{2,1}, \mu_{2,2}$ различны, а кумулянты $\kappa_{4,1}, \kappa_{4,2}$ отрицательны и удовлетворяют условию

$$\kappa_{4,1} = \kappa_{4,2}. \qquad (26)$$

Определим связь между параметрами составляющих смеси, для чего перепишем формулу (26) в виде $\gamma_{4,1}\mu_{2,1}^2 = \gamma_{4,2}\mu_{2,2}^2$, откуда следует формула, связывающая дисперсии $\mu_{2,1}, \mu_{2,2}$ и коэффициенты $\gamma_{4,1}, \gamma_{4,2}$ составляющих смеси:

$$\gamma_{4,1} = \gamma_{4,2} / M^2, \qquad (27)$$

где параметр M определяется формулой (19).

Найдем весовые коэффициенты d_1, d_2 смеси, используя для этого уравнение (13), которое при условии (26) принимает вид

$$\kappa_{4,2} + 3d_1 d_2 (\mu_{2,1} - \mu_{2,2})^2 = 0. \qquad (28)$$

Разделим левую и правую части (28) на $\mu_{2,2}^2$. Учитывая, что $d_2 = 1 - d_1$,

Таблица 3

Значения параметров смеси								
M	a	d_1	d_2	$\mu_{2,1}$	$\mu_{2,2}$	μ_2	μ_6	γ_6
1,1832	1,4043	0,5105	0,4895	0,3944	1/3	0,3645	0,9090	3,7702

получаем уравнение для нахождения коэффициента d_1 смеси (1):

$$d_1^2 - d_1 - \frac{\gamma_{4,2}}{3(M-1)^2} = 0. \tag{29}$$

Решение уравнения (29) имеет вид

$$d_1^{(1,2)} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + \frac{\gamma_{4,2}}{3(M-1)^2}}. \tag{30}$$

Проанализируем формулу (30). Поскольку $\gamma_{4,2} \in [-2, 0)$, дискриминант в формуле (30) будет неотрицательным при выполнении условия

$$0{,}25 + \frac{\gamma_{4,2}}{3(M-1)^2} \geq 0. \tag{31}$$

Решая неравенство (31) относительно параметра *M*, находим области допустимых значений *M* при заданных значениях коэффициента $\gamma_{4,2}$:

$$M \geq 1 + 2\left(-\frac{\gamma_{4,2}}{3}\right)^{0,5} = M_{\min}, \quad M \leq 1 - 2\left(-\frac{\gamma_{4,2}}{3}\right)^{0,5} = M_{\max}, \tag{32}$$

где $M_{\min}$ и $M_{\max}$ — границы допустимых значений параметра *M*.

Из формул (32) следует, что границы $M_{\min}$ и $M_{\max}$ связаны соотношением $M_{\min} + M_{\max} = 2$. Величина $M_{\max}$ может принимать отрицательные значения при определенных значениях коэффициента эксцесса $\gamma_{4,2}$, например при $\gamma_{4,2} = -2$ $M_{\min} = 2{,}633$, $M_{\max} = -0{,}633$. Используя формулу (32), нетрудно показать, что $M_{\max} \geq 0$, если $\gamma_{4,2} \geq -0{,}75$. Поскольку применение границы $M_{\max}$ имеет ограничения, в практических задачах для определения параметра смеси *M* целесообразно использовать границу $M_{\min}$ и соответствующее неравенство (32).

Таким образом, решение уравнения (29) существует при любых заданных значениях коэффициента эксцесса $\gamma_{4,2} \in [-2, 0)$, если параметр *M* выбран из области допустимых значений, определенной неравенством (32). Уравнение (29) имеет два корня, $d_1^{(1)}$ и $d_1^{(2)}$, если $M > M_{\min}$, и один корень, $d_1 = 0{,}5$, если $M = M_{\min}$.

Практическое построение смеси (1) с нулевым коэффициентом эксцесса в рассматриваемом случае целесообразно выполнять в такой последовательности. Задаем значение коэффициента эксцесса $\gamma_{4,2} \in [-2, 0)$, соответствующее какому-либо известному распределению $F_2(x)$. Вычисляем

Таблица 4

$\gamma_{4,2}$	$M_{\min}$	$\min\gamma_{4,1}$	$\gamma_{4,2}$	$M_{\min}$	$\min\gamma_{4,1}$
–0,25	1,577	–0,10	–1,25	2,291	–0,238
–0,50	1,817	–0,152	–1,50	2,414	–0,257
–0,75	2,00	–0,188	–1,75	2,528	–0,274
–1,00	2,155	–0,215	–2,00	2,633	–0,288

Таблица 5

Функция распределения	Центральный момент	Коэффициент эксцесса
$F_1(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1,\\ 0{,}5p,\ x\in(-1,0],\\ q+0{,}5p,\ x\in(0,1],\\ 1, x>1.\end{cases}$ $p,q>0;\ p+q=1$	$\mu_{s,1}=\begin{cases}0,\ s-\text{нечетное},\\ p, s-\text{четное}.\end{cases}$	$\gamma_{4,1}=\frac{1}{p}-3$
$F_2(x)=\begin{cases}0,\ x\le -a,\\ \frac{x+a}{2a},\ x\in(-a,a],\\ 1, x>a, a>0.\end{cases}$	$\mu_{s,2}=\begin{cases}0,\ s-\text{нечетное},\\ \frac{a^s}{s+1}, s-\text{четное}.\end{cases}$	$\gamma_{4,2}=-1{,}2$

Таблица 6

Значения параметров смеси										
p	q	M	a	d_1	d_2	$\mu_{2,1}$	$\mu_{2,2}$	μ_2	μ_6	γ_6
0,3571	0,6429	2,4495	0,6614	0,7442	0,2558	0,3571	0,1456	0,3137	0,2795	–5,9461

величину $M_{\min}$ по формуле (32) и находим на основании (27) значение коэффициента эксцесса:

$$\min\gamma_{4,1}=\gamma_{4,2}/M_{\min}^2. \qquad (33)$$

В табл. 4 приведены значения параметра $M_{\min}$ и коэффициента эксцесса $\min\gamma_{4,1}$ для различных значений коэффициента эксцесса $\gamma_{4,2}\in[-2,0)$. Выбираем значение коэффициента эксцесса $\gamma_{4,1}\in[\min\gamma_{4,1},0)$ и соответственно — распределение $F_1(x)$. Находим значение параметра M по формуле

$$M=(\gamma_{4,2}/\gamma_{4,1})^{0,5}. \qquad (34)$$

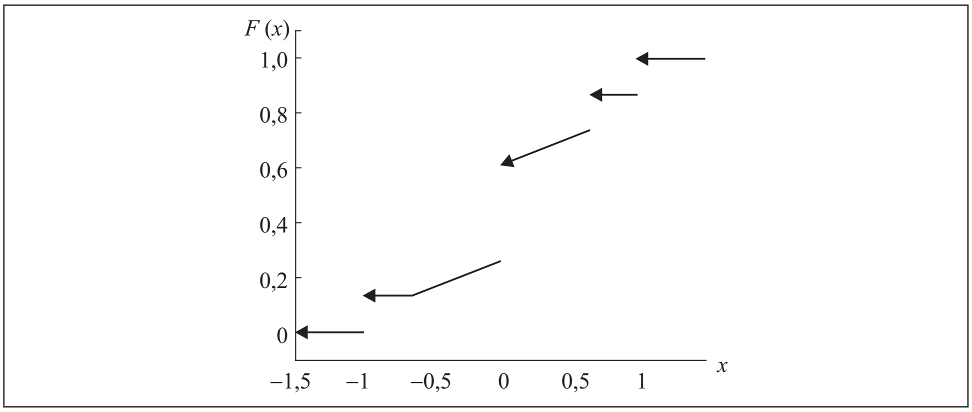

Рис. 2

Вычисляем коэффициент d_1 по формуле (30) и коэффициент $d_2 = 1 - d_1$. Задаем одну из дисперсий, $\mu_{2,1}$ или $\mu_{2,2}$, и находим вторую дисперсию, $\mu_{2,2}$ ($\mu_{2,1}$), используя формулу (19).

Пример 3. Зададим функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ составляющих смеси (табл. 5). По формуле (32) находим величину $M_{\min} = 2{,}2649$, а по формуле (33) — значение коэффициента эксцесса $\min\gamma_{4,1} = -0{,}2339$. Выбираем значение $\gamma_{4,1} = -0{,}2$ и, используя данные табл. 5 и формулы (6), (11), (19), (30) и (34), находим значения параметров смеси распределения (табл. 6). Подставляя в формулу (1) данные табл. 5 и 6, получаем функцию распределения симметричного негауссовского распределения с нулевым коэффициентом эксцесса (рис. 2):

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -1, \\ 0{,}1328, \ x \in (-1; -0{,}661], \\ 0{,}1935x + 0{,}2607, \ \ x \in (-0{,}661; 0], \\ 0{,}1935x + 0{,}7392, \ \ x \in (0; 0{,}661], \\ 0{,}8672, \ x \in (0{,}661; 1], \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$$

Выводы

На основе предложенной математической модели несложно осуществлять компьютерное моделирование негауссовских случайных величин с симметричными распределениями и нулевыми коэффициентами γ_4, используя известные алгоритмы моделирования дискретных смесей распределения, рассмотренные, например, в работе [20].

Предложенные модели дают возможность на этапе проектирования технических систем сравнивать эффективность разрабатываемых методов обработки различных сигналов, у которых $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$, в том числе и гауссовских. Практическая ценность предложенных моделей заключается в повышении достоверности результатов решения технических задач при использовании этих моделей, а их эффективность — в простоте реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М. : Сов. радио, 1978. — 376 с.
2. *Кунченко Ю.П.* Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. 1. Стохастические полиномы, их свойства и применения для нахождения оценок параметров. — Черкассы: ЧИТИ, 2001. — 133 с.
3. *Красильников А.И.* Модели шумовых сигналов в системах диагностики теплоэнергетического оборудования. — Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2014. — 112 с.
4. *Бабак С.В., Мыслович М.В., Сысак Р.М.* Статистическая диагностика электротехнического оборудования. — Киев: Ин-т электродинамики НАН Украины, 2015. — 456 с.
5. *Alexandrou D., De Moustier C., Haralabus G.* Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model // J. Acoust. Soc. Am. — 1992. — Vol. 91, No. 3. — P. 1403—1413.
6. *Кузнецов В.В.* Использование моментов третьего порядка в расчетах электрических нагрузок // Вест. Самарского ГТУ. Серия «Технические науки». — 2009. — № 2 (24). — С. 166—171.
7. *Кузнецов Б.Ф., Бородкин Д.К., Лебедева Л.В.* Кумулянтные модели дополнительных погрешностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2013. — № 1 (37). — С. 134—138.
8. *Jondeau E., Rockinger M.* Gram-Charlier densities // Journal of Economic Dynamics & Control. — 2001. — Vol. 25. — P. 1457—1483.
9. *Карпов И.Г.* Приближенная идентификация законов распределения помех в адаптивных приемниках с использованием метода моментов // Радиотехника. — 1999. — № 7. — С. 11—14.
10. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений / Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Ширяева, под ред. А.Н. Колмогорова. — М. : Наука, 1966. — 588 с.
11. *Красильников А.И.* Класс негауссовских распределений с нулевыми коэффициентами асимметрии и эксцесса // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2013. — **56**, № 6. — С. 56—63.
12. *Красильников А.И.* Модели несимметричных распределений случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии // Электрон. моделирование. — 2016. — **38**, № 1. — С. 19—33.
13. *Марченко Б.Г., Щербак Л.Н.* Проблема моментов и кумулянтный анализ // Отбор и обработка информации. — 1993. — Вып. 9 (85). — С. 12—20.
14. *Jondeau E., Rockinger M.* Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements // Journal of Economic Dynamics & Control. — 2003. — Vol. 27. — P. 1699—1737.
15. *De Carlo L.T.* On the meaning and use of kurtosis // Psychological Methods. — 1997. — Vol. 2, No. 3. — P. 292—307.
16. *Красильников А.И., Пилипенко К.П.* Одновершинная двухкомпонентная гауссовская смесь. Коэффициент эксцесса // Электроника и связь. — 2007. — № 2 (37). — С. 32— 38.

17. *Doane D.P., Seward L.E.* Measuring Skewness: A Forgotten Statistic? // Journal of Statistics Education. — 2011. — Vol. 19, No. 2. — P. 1—18. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: www.amstat.org/publications/jse/v19n2/doane.pdf.
18. *Лукач Е.* Характеристические функции / Пер. с англ. В.М. Золотарева — М. : Наука, 1979. — 424 с.
19. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. — СПб. : Наука, 2001. — 295 с.
20. *Красильников А.И., Пилипенко К.П.* Моделирование дискретных смесей распределений // Электроника и связь. — 2010. — № 2 (55). — С. 57—61.

REFERENCES

1. Malakhov, A.N. (1978), *Kumuliantnyi analiz sluchainykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovanii* [Cumulant analysis of random non-Gaussian processes and their transformations], Sovetskoe radio, Moscow, Russia.
2. Kunchenko, Yu.P. (2001), *Polinomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainyh velichin. Ch. I. Stokhasticheskie polinomy, ikh svoistva i primenenie dlia nakhozhdeniia otsenok parametrov* [Parameter polynomial estimators of random variables close to Gaussian. Part I. Stochastic polynomials, their properties and application for finding parameter estimators], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
3. Krasilnikov, A.I. (2014), *Modeli shumovykh signalov v sistemakh diagnostiki teploenergeticheskogo oborudovaniia* [Models of noise signals in the systems of diagnostics of the heat power equipment], Institut tekhnicheskoi teplofiziki NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
4. Babak, S.V., Myslovich, M.V. and Sysak, R.M. (2015), *Statisticheskaia diagnostika elektrotekhnicheskogo oborudovaniia* [Statistical diagnostics of the electrotechnical equipment], Institut electrodinamiki NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
5. Alexandrou, D., De Moustier, C. and Haralabus, G. (1992), "Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91, no. 3, pp. 1403-1413.
6. Kuznetsov, V.V. (2009), "Use of the moments of the third order in calculations of electric loadings", *Vestnik Samarskogo GTU. Seriia "Tekhnicheskie nauki"*, no 2 (24), pp. 166-171.
7. Kuznetsov, B.F., Borodkin, D.K. and Lebedeva, L.V. (2013), "Cumulant models of additional errors", *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, no. 1 (37), pp. 134-138.
8. Jondeau, E. and Rockinger, M. (2001), "Gram-Charlier densities", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 25, pp. 1457-1483.
9. Karpov, I.G. (1999), "Approximate identification of distribution laws of hindrances in adaptive receivers with the use of the method of moments", *Radiotekhnika*, no. 7, pp. 11-14.
10. Kendall, M. and Stiuart, A. (1966), *Teoriia raspredelenii* [Distribution theory], Translated by Sazonov, V.V. and Shiriaev, A.N., Nauka, Moscow, Russia.
11. Krasilnikov, A.I. (2013), "Class of non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis", *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Radioelektronika*, Vol. 56, no. 6, pp. 56-63.
12. Krasilnikov, A.I. (2016), "Models of asymmetrical distributions of random variables with zero asymmetry coefficient", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 19-33.
13. Marchenko, B.G. and Shcherbak, L.N. (1993), "Moment problem and cumulant analysis", *Otbor i obrabotka informatsii*, Vol. 9 (85), pp. 12-20.
14. Jondeau, E. and Rockinger, M. (2003), "Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 27, pp. 1699-1737.

15. De Carlo, L.T. (1997), "On the meaning and use of kurtosis", *Psychological Methods*, Vol. 2, no. 3, pp. 292-307.
16. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P (2007), "Unimodal two-component Gaussian mixture. Excess kurtosis", *Elektronika i sviaz*, no. 2 (37), pp. 32-38.
17. Doane, D.P. and Seward, L.E. (2011), "Measuring skewness: A forgotten statistics?", *Journal of Statistics Education*, Vol. 19, no. 2, pp. 1-18, available at: www.amstat.org/publications/jse/v19n2/doane.pdf.
18. Lukach, E. (1979), *Kharakteristicheskie funktsii* [Characteristic functions], Translated by Zolotarev, V.M., Nauka, Moscow, Russia.
19. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Reference book on probabilistic distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.
20. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P. (2010), "Modeling of discrete mixtures of distributions", *Elektronika i sviaz*, no. 2 (55), pp. 57-61.

A.I. Krasilnikov

CLASS OF NON-GAUSSIAN SYMMETRIC DISTRIBUTIONS
WITH ZERO COEFFICIENT OF KURTOSIS

A new class of symmetric non-Gaussian distributions with zero coefficient of kurtosis γ_4 has been determined on the basis of a family of two-component mixtures of distribution. Models of three types of this class are constructed, examples of distributions are given. The obtained results allow performing mathematical and computer modeling of non-Gaussian random variables with symmetric distributions and zero coefficients of kurtosis γ_4.

K e y w o r d s: symmetric distributions, cumulant coefficients, cumulant analysis, coefficient of kurtosis, mixtures of distributions.

Поступила 19.09.16;
после доработки 28.10.16

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.