
УДК 621.384.6:620.198

О.Л. Андреева^{1,2}, аспирантка, **Б.В. Борц**², д-р техн. наук,
А.О. Костиков^{1,3}, д-р техн. наук, **В.И. Ткаченко**^{2,3}, д-р физ.-мат. наук

¹ Ин-т проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10,
e-mail: andreevaoksana@kipt.kharkov.ua; kostikov@ipmach.kharkov.ua),

² Национальный научный центр
«Харьковский физико-технический ин-т» НАН Украины
(Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1,
e-mail: borts@kipt.kharkov.ua),

³ Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
(Украина, 61022, Харьков, пл. Свободы, 6,
e-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua)

Теоретическое исследование элементарной конвективной ячейки с твердыми и смешанными граничными условиями в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости

Приведены результаты теоретических исследований формирования конвективных ячеек со смешанными граничными условиями в вакуумном масле. Для частного случая получены аналитические решения уравнения Навье—Стокса с твердыми граничными условиями. Найдены выражения для возмущенных скорости и температуры в цилиндрической конвективной ячейке. Проведено их сравнение с аналогичными параметрами свободной конвективной ячейки для основной моды. Показано, что диаметр конвективной ячейки обратно пропорционален значению минимального волнового числа соответствующей краевой задачи, т.е. диаметр ячейки со смешанными граничными условиями меньше диаметра ячейки, имеющей свободные граничные условия, но больше диаметра ячейки с твердыми граничными условиями.

Ключевые слова: элементарная конвективная ячейка, смешанные и твердые граничные условия, вязкая жидкость.

Наведено результати теоретичних досліджень формування конвективних комірок із змішаними граничними умовами у вакуумному маслі. Для окремого випадку отримано аналітичні розв'язки рівняння Нав'є—Стокса з твердими граничними умовами. Знайдено вирази для збурених швидкості і температури в циліндричній конвективній комірці. Проведено їх порівняння з аналогічними параметрами вільної конвективної комірки для основної моди. Показано, що діаметр конвективної комірки обернено пропорційний значенню мінімального хвильового числа відповідної крайової задачі, тобто діаметр комірки зі змішаними граничними умовами менше діаметра комірки з вільними граничними умовами, але більший за діаметр комірки з твердими граничними умовами.

Ключові слова: елементарна конвективна комірка, змішані та тверді граничні умови, в'язка рідина.

© О.Л. Андреева, Б.В. Борц, А.О. Костиков, В.И. Ткаченко, 2017

Процесс образования пространственно-временных структур обусловлен неспособностью среды обеспечить необходимый перенос тепла с нижней границы на верхнюю с помощью тепловой диффузии, которая корректируется при возникновении упорядоченного конвективного движения жидкости вследствие появления силы плавучести (разность архимедовой силы и силы тяжести) [1].

Тепловая конвекция — явление массопереноса вещества в поле силы тяжести и градиента температуры — встречается как в природе [2], так и во многих технологических процессах [3]. Например, конвективный массоперенос воздушных масс эффективно используется в сельском хозяйстве [4]. Явление конвекции также применяется в сложных процессах выращивания кристаллов для микроэлектроники [5]. Описание процессов формирования ячеистых структур имеет важное значение для прикладных задач в области технологии лазерной обработки материалов [6].

Для описания конвективных процессов традиционно используются уравнения Навье—Стокса в приближении Буссинеска (НСПБ). При этом существует три типа задач с различными граничными условиями: обе границы свободные; обе границы твердые; одна граница свободная, другая — твердая (смешанные граничные условия) [1, 7, 8].

В задачах со свободными граничными условиями касательные напряжения на границах слоя отсутствуют, что приводит к граничным условиям, при которых решения задачи НСПБ относительно нормальных возмущенной скорости и температуры [7] внутри ячейки имеют аналитический вид. Впервые эти решения были получены Дж. У. Рэлеем в 1916 г. [8]. Анализ полученных решений указывает на возможность с помощью геометрических преобразований нормальных возмущений сформировать квадратные конвективные ячейки, или ячейки, имеющие вид правильных многоугольников (треугольник или гексагон) [7, 9].

Как следует из [7, 9], геометрические преобразования привлечены с целью объяснить формирование многоугольных пространственно-периодических структур, которые полностью заполняют объем конвективного слоя и таким образом обеспечивают максимальный перенос тепла между его границами. Однако, как отмечено в [10, 11], формирование многоугольных конвективных структур в подогреваемом снизу слое жидкости следует объяснять, основываясь не на геометрических построениях, а на соображениях энергетической целесообразности, иными словами, — исходить из энергетического принципа. Этот принцип устанавливает соответствие между числом конвективных ячеек и температурой нижней границы слоя при ее повышении.

Для реализации такого энергетического принципа формирования многоугольных конвективных структур необходимо введение понятия эле-

ментарной конвективной ячейки. Из большого числа таких ячеек, при их плотной упаковке, могут формироваться многоугольные конвективные ячейки. В качестве элементарной конвективной ячейки предложено использовать цилиндрическую конвективную ячейку, для которой получены аналитические выражения при нормальных возмущенной скорости и температуры [10, 11].

В работах [10, 11] показано, что величина аналитически рассчитанного диаметра цилиндрической конвективной ячейки количественно соответствует экспериментальным данным. На основании предложенной концепции элементарной конвективной ячейки проведено энергетическое обоснование принципа покрытия поверхности жидкости цилиндрическими конвективными ячейками в случае свободных граничных условий.

Энергетический подход можно также использовать при исследовании формирования пространственно-периодических конвективных структур на основе уравнений НСПБ с твердыми и смешанными граничными условиями. Решения уравнений НСПБ с твердыми или смешанными граничными условиями для нормальных возмущенной скорости и температуры внутри ячейки в аналитическом виде неизвестны, и такие задачи решают численными методами [6, 8]. Поэтому поиск аналитических решений уравнений НСПБ с твердыми или смешанными граничными условиями является актуальной задачей.

В научной литературе, посвященной исследованию пространственно-периодических конвективных структур, принято анализировать слои жидкости полностью заполненные конвективными ячейками различной геометрии. Однако в литературе нет данных, касающихся стадии зарождения конвективных ячеек, не исследовано изменение их количества при увеличении температуры дна емкости до полного заполнения объема жидкости. Исследование таких процессов на основе уравнений НСПБ с твердыми или смешанными граничными условиями может дать новые теоретические и экспериментальные результаты в области формирования пространственно-периодических структур.

Будем рассматривать свойства элементарной конвективной ячейки, возникающей в подогреваемом снизу горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости с твердыми или смешанными граничными условиями.

Теория цилиндрической ячейки с твердыми граничными условиями. Для получения аналитического решения задачи с твердыми граничными условиями [7—9] рассмотрим бесконечный в направлениях осей x и y слой вязкой жидкости толщиной h . Ось z направлена вверх, перпендикулярно границам слоя $z = 0$ и $z = h$. Распределение температуры внутри слоя $T_0(z)$ задано так, что температура нижней границы больше темпе-

ратуры верхней: $T_0(0) = T_2$, $T_0(h) = T_1$ ($T_2 > T_1$). Будем считать, что в состоянии равновесия зависимость температуры в слое от координаты z описывается линейной функцией $\nabla T_0(z) = -\Theta/h \mathbf{e}_z$, где $\Theta = T_2 - T_1$ — разность температур между нижней и верхней плоскостями; \mathbf{e}_z — единичный вектор, направленный вдоль оси z .

Исходя из результатов экспериментов, проведенных специально для определения этапов формирования конвективных ячеек, можно сделать два вывода:

1) форма возникающей уединенной конвективной ячейки — цилиндрическая;

2) внутренняя структура цилиндрической конвективной ячейки не зависит от азимутального угла φ в локальной цилиндрической системе координат, привязанной к центру ячейки.

На основании этих выводов решения линеаризованных уравнений Навье—Стокса [7] будем искать в цилиндрической геометрии. В этом случае в слое с плоскими границами для каждой ячейки исходные уравнения при возмущенных вертикальной скорости v_z и температуры T имеют следующий вид [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \Delta \Delta v_z + R \Delta_{\perp} T, \quad (1)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + v_z, \quad (2)$$

где $\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ — поперечный Лапласиан, в котором на основании осевой симметрии ячейки отсутствует слагаемое, характеризующее зависимость возмущений от азимутального угла, т.е. везде $\partial \dots / \partial \varphi = 0$; $R = g\beta h^3 \Theta / (\nu \chi)$ — число Рэлея; g — ускорение свободного падения, направленное против оси z ; $P = \nu / \chi$ — число Прандтля; ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности жидкости; β — коэффициент объемного температурного расширения жидкости; v_z и T — возмущения вертикальной скорости и температуры. Для приведения системы уравнений (1), (2) к безразмерному виду использованы следующие характерные единицы измерения: единица длины — толщина слоя h ; единица времени — $\tau = h^2 \nu^{-1}$; единица температуры — Θ . Следует заметить, что для выбранной единицы длины координата z изменяется в интервале $0 \leq z \leq 1$.

При использовании системы уравнений (1), (2) для определения «нормальных» возмущений [7] в вязком подогреваемом снизу слое жидкости

она должна быть дополнена граничными условиями. Рассмотрим твердые граничные условия, когда на верхней и нижней границах слоя жидкости значения возмущенных проекций скорости, температуры и производных вертикальной скорости по координате равны нулю [6]:

$$v_r = v_z = 0, \quad T = 0, \quad \frac{dv_z}{dz} = 0, \quad T_{z=0} = 0, \quad T_{z=1} = 0,$$

$$v_r|_{z=0} = 0, \quad v_r|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_{z=1} = 0,$$

$$v_z|_{z=0} = 0, \quad v_z|_{z=1} = 0,$$

Решение исходной системы уравнений. Исходные уравнения системы (1), (2) имеют частные решения, которые описывают временную динамику возмущений вертикальной скорости и температуры цилиндрической ячейки [10, 11]:

$$v_z(r, z, t) = v(z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad (3)$$

$$T(r, z, t) = \vartheta(z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad (4)$$

где λ — собственные числа, характеризующие затухание ($\lambda > 0$), нарастание ($\lambda < 0$) или стационарное состояние ($\lambda = 0$) возмущений; $v(z)$ и $\vartheta(z)$ — амплитуды возмущений вертикальной скорости и температуры; $J_0(x)$ — функции Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента x ; k_r — радиальное волновое число, характеризующее зависимость возмущений от поперечной координаты r .

Поскольку конвективная ячейка остается неизменной на протяжении конечного отрезка времени, рассмотрим только устойчивые решения уравнений (1), (2), что соответствует условию $\lambda = 0$. Подставив (3), (4) в уравнения (1), (2), получим характеристическое уравнение

$$(q^2 - k_r^2)^3 = -k_r^2 R. \quad (5)$$

Здесь параметр q определяет зависимость амплитуды вертикальной скорости $v(z)$ от координаты z , $v(z) = A_0 \exp(qz)$, где A_0 — произвольная постоянная величина.

Корни характеристического уравнения (5) имеют вид

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{b - a},$$

$$q_{3,4} = \pm \sqrt{b + \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3})} = \pm (X_+ + iX_-),$$

$$q_{5,6} = \pm \sqrt{b + \frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3})} = \pm (X_+ - iX_-),$$

где $a = (k_r^2 R)^{1/3}$; $b = k_r^2$; $i = \sqrt{-1}$ — комплексная единица;

$$X_{\pm} = \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} \pm \left(\frac{1}{2}a + b\right) \right) \right)^{1/2}.$$

Решение уравнений (1), (2), описывающее нейтральные возмущения для амплитуды вертикальной скорости в интервале $0 \leq z \leq 1$, имеет вид

$$v(z) = \sum_{m=1}^6 C_m \exp(q_m z), \quad (6)$$

где C_m — произвольные константы, определяемые граничными условиями

$$v(0) = v(1) = 0, \quad \partial v(0)/\partial z = \partial v(1)/\partial z = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0. \quad (7)$$

Как следует из [7], решения уравнения (5), а также полученное на их основе выражение (6) определяют значения критических чисел Рэлея и амплитуду нейтральных возмущений. Критические числа Рэлея и амплитуды нейтральных возмущений не удастся записать в аналитическом виде, их можно найти только в результате приближенного численного решения трансцендентных уравнений, вытекающих из (6), (7). Однако при определенных допущениях решение (6) может быть представлено в аналитическом виде. Рассмотрим метод получения такого аналитического решения.

Будем искать решения системы уравнений (1), (2) для $v_z(z)$ в таком же виде, как решение для вертикальной скорости свободной конвективной ячейки, когда $v_z(z) \propto \sin(n\pi z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, т.е. полагаем $\sqrt{a-b} = in\pi$, где всегда считаем выполненным неравенство $a < b$. Полагаем $X_- = n\pi$, что оказывается возможным только в случае, когда $a = 8(n\pi)^2$, $b = 7(n\pi)^2$. Тогда волновое число принимает значение $k_r \approx \pi\sqrt{7}$. Задав в (6) значения констант $C_1 = C_2 = A_1/2$, $C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = A_1/4 \operatorname{ch}(X_+/2)$, получим выражение для вертикальной скорости в симметричных относительно $z_0 = 1/2$ пределах по z , удовлетворяющее граничным условиям (7):

$$v(z) = A_1 \left(1 - \operatorname{ch} \left[\left(z - \frac{1}{2} \right) X_+ \right] \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{X_+}{2} \right) \right) \sin(z\sqrt{a-b}).$$

Для сравнительной оценки параметров теплопереноса в ячейке с твердыми граничными условиями и в свободной конвективной ячейке

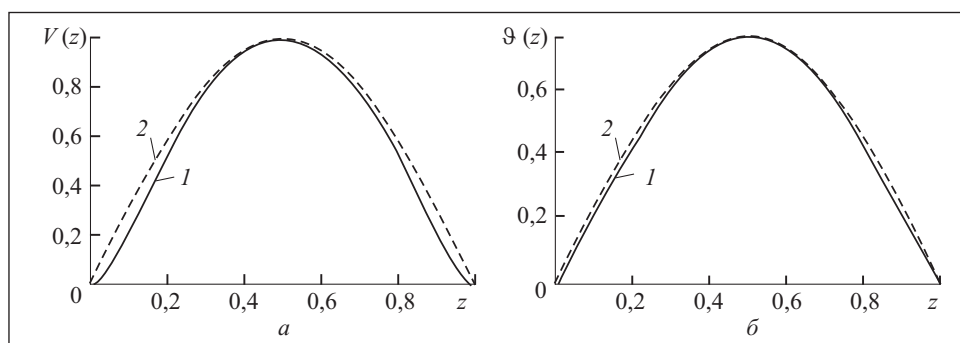


Рис. 1. Амплитуды возмущенной вертикальной скорости (а) и возмущенной температуры (б) для основной моды $n = 1$: 1 — ячейка с твердыми границами; 2 — свободная конвективная ячейка

проведем сравнительный анализ пространственного распределения их возмущенных скорости и температуры, сравнивая амплитуды возмущений. При этом в выражениях для вертикальной скорости будем полагать произвольные постоянные коэффициенты A_1 и a (в обозначениях [6]) равными единице.

На рис. 1 представлены зависимости амплитуд возмущенной вертикальной скорости и возмущенной температуры ячейки с твердыми границами и свободной конвективной ячейки для модового числа $n = 1$ от координаты z . Как видно из рис. 1, а, при твердых граничных условиях незначительно (в 1,009 раз) уменьшается максимальное значение амплитуды вертикальной скорости (при $z = 0,5$) массопереноса жидкости по сравнению со свободными граничными условиями. При этом вблизи границы ($z = 0,09$) уменьшение составляет 10,48 % относительно скорости массопереноса в свободной ячейке.

Частное решение для амплитуды возмущенной температуры $\vartheta(z)$ найдем методом вариации произвольных постоянных из (2):

$$\frac{d^2\vartheta(z)}{dz^2} - b\vartheta(z) = -v(z).$$

Общее решение при возмущенной температуре, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\vartheta(z) = -\frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^z v(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{b}(\xi - z)) d\xi + \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{\operatorname{sh}(z\sqrt{b})}{\operatorname{sh}(\sqrt{b})} \int_0^1 v(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{b}(\xi - 1)) d\xi.$$

Сравнивая амплитуды возмущенной температуры свободной ячейки и ячейки с твердыми граничными условиями, необходимо учитывать, что амплитуда возмущенной температуры свободной ячейки при $a = 1$ опреде-

ляется величиной $\bar{b} = \frac{1}{n^2\pi^2 + k^2}$. Тогда при $n=1$ ($R_{\min} = \frac{27}{4}\pi^4$, $k_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$) получим $\bar{b} = \frac{2}{3\pi^2} \approx 0,0675$.

Из рис. 1, а, видно, что в ячейке с твердыми граничными условиями амплитуда в 5,5 раз меньше, чем амплитуда возмущенной температуры в свободной конвективной ячейке. Таким образом, можно сделать вывод о том, что твердые граничные условия понижают амплитуду возмущенной температуры по сравнению со свободными граничными условиями. При этом реальное (с учетом множителя 5,5) максимальное отклонение кривой 1 от кривой 2 в точке $z=0,14$ составляет величину 24,72 % (рис. 1, б).

Выражение для радиальной скорости движения жидкости в конвективной ячейке $v_r(r, z)$ следует из условия ее несжимаемости:

$$v_r(r, z) = -\frac{dv(z)}{dz} \frac{1}{k_r} J_1(k_r r). \quad (8)$$

Таким образом, в частном случае для числа Рэлея $R \approx 7124,78$ [7] и волнового числа $k_r \approx \pi\sqrt{7}$ определены значения возмущенных скорости (v_r, v_z) и температуры T в цилиндрической конвективной ячейке с твердыми границами. При их сравнении с аналогичными параметрами свободной конвективной ячейки для основной моды $n=1$ установлено, что твердые граничные условия незначительно (в 1,009 раз) уменьшают амплитуду вертикальной скорости массопереноса жидкости по сравнению с вертикальной скоростью ячейки со свободными граничными условиями и понижают амплитуду возмущенной температуры (в 5,5 раз) по сравнению с возмущенной температурой ячейки со свободными граничными условиями.

Определение диаметра конвективной ячейки со смешанными и твердыми границами. Выражение (8) удовлетворяет физически обоснованным граничным условиям на оси и периферии ячейки, так как при $r=0$ и на ее внешней границе $r=R_c$ радиальная скорость жидкости равняется нулю. Следовательно, значение радиального волнового числа можно определить так:

$$k_{r,i} = \sigma_{1,i} R_c^{-1}, \quad (9)$$

где R_c — радиус конвективной ячейки; $\sigma_{1,i}$ — i -й ноль функции Бесселя первого рода первого порядка ($J_1(\sigma_{1,i})=0$), $i=1,2,3,\dots$. Значения первых пяти нулей функции Бесселя следующие: $\sigma_{1,1}=3,832$; $\sigma_{1,2}=7,016$; $\sigma_{1,3}=10,173$; $\sigma_{1,4}=13,324$; $\sigma_{1,5}=16,471$. В работе [11] экспериментально и теоретически доказано, что радиус свободной конвективной ячейки определяется соотношением (9), где в качестве волнового числа используется его

минимальное значение $(k_r)_{\min} \approx \pi / \sqrt{2} \approx 2,221$. При этом радиус свободной ячейки определяется величиной $(R_c)_{\text{fr}} = \sigma_{1,i} 2^{1/2} \pi^{-1} \approx 0,45 \sigma_{1,i} \approx 1,72$.

Согласно полученным экспериментальным результатам диаметр ячейки со смешанными граничными условиями составляет от 2,65 до 2,83 мм, т.е. имеет меньшее значение, чем для свободной ячейки. Теоретическое значение диаметра конвективной ячейки со смешанными граничными условиями, рассчитанное аналогично диаметру свободной конвективной ячейки, определим из соотношения (9), подставив значение минимального волнового числа рассматриваемой граничной задачи $(k_r)_{\text{mix}} \approx 2,682$ [6]: $(D_c)_{\text{mix}} = 2(R_c)_{\text{mix}} = 2\sigma_{1,i} / (k_r)_{\text{mix}} \approx 2 \cdot 2,832 / 2,682 \approx 2,86$. Полученное теоретическое значение диаметра конвективной ячейки со смешанными граничными условиями количественно соответствует измеренным экспериментальным значениям, лежащим в диапазоне от 2,65 до 2,83 мм.

На основании полученных результатов для конвективной ячейки со свободными и смешанными граничными условиями можно определить диаметр конвективной ячейки для задачи с твердыми граничными условиями:

$$(D_c)_{\text{rig}} = 2(R_c)_{\text{rig}} = 2\sigma_{1,i} / (k_r)_{\text{rig}} \approx 2 \cdot 3,832 / 3,116 \approx 2,46. \quad (10)$$

Для экспериментального подтверждения этого результата воспользуемся данными работы [12], в которой приведены результаты исследования зависимости числа Нуссельта (отношение интенсивности теплообмена за счет конвекции и теплопроводности к интенсивности теплообмена за счет теплопроводности) от числа Рэлея в слое подогреваемой снизу вязкой несжимаемой жидкости с твердыми граничными условиями. В работе [12] показано, что при превышении критического значения числа Рэлея ($R \geq R_{\text{кр}} = 1700 \pm 51$) наблюдается формирование гексагонов. Очевидно, что диаметр цилиндрической конвективной ячейки, из которой образовался гексагон, равен диаметру описанной вокруг него окружности.

На рис. 2 представлены результаты исследования появления конвективных структур (гексагонов и валов) в слое силикона АК-350 различной толщины при контролируемой температуре верхней и нижней границ слоя [12]. Как видно из рис. 2, б, при превышении критического числа Рэлея образуются гексагоны, а на рис. 2, в, видно формирование конвективных валов, характерное для слоев масла большей толщины и для больших чисел Рэлея.

Как следует из рис. 2, а, сформировавшиеся гексагоны с увеличением числа Рэлея образуют полосы шириной H . Экспериментально измеренное отношение ширины полосы к глубине слоя жидкости для чисел Рэлея вблизи критического значения ($R - R_{\text{кр}} \ll 1$) составляет $H / h = 2$ [12]. Границы полос шириной H формируются параллельными сторонами гексагонов. Зная расстояние между ними, можно простыми геометрическими

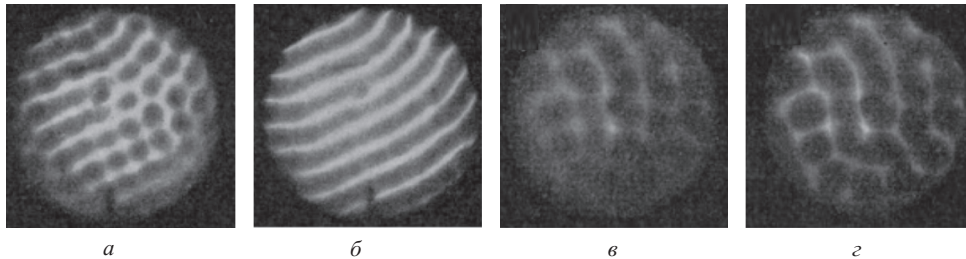


Рис. 2. Образование гексагонов в слое силиконового масла АК-350 толщиной $h = 7$ (а, б) и $h = 10$ мм (б, в): а — $R = 1800$; б — $R = 2400$ (формирование конвективных валов); в — $R = 2280$; г — $R = 2470$ (начало формирования гексагонов)

Безразмерный диаметр ячеек при различных граничных условиях

Граничное условие	Теоретические расчеты	Экспериментальные результаты
Твердые границы	2,45	2,4—2,5
Смешанные границы	2,8	2,6—2,7
Свободные границы [11]	3,4	3,2—3,8

построениями определить безразмерный диаметр конвективной ячейки: $(D_c)_{\text{rig}} = 2H(h\sqrt{3})^{-1}$ (см. таблицу). На основании приведенных результатов расчетов и экспериментальных данных можно утверждать, что диаметр конвективной ячейки с твердыми граничными условиями равен 2,31, и этот результат наиболее близок к найденному теоретически значению (10).

Выводы

Полученные аналитические выражения для определения диаметра конвективной ячейки со смешанными и твердыми граничными условиями позволяют определить, что диаметр конвективной ячейки обратно пропорционален минимальному значению волнового числа соответствующей краевой задачи. На основе экспериментальных результатов и теоретического анализа установлено, что диаметр элементарной конвективной ячейки со смешанными граничными условиями меньше диаметра ячейки со свободными границами, но больше диаметра ячейки с твердыми границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability / S. Chandrasekhar. — Oxford University Press, 1970. — 657 p.
2. Неклюдов И.М. Прикладная гидромеханика / И.М. Неклюдов, Б.В. Борц, В.И. Ткаченко — ХНУ им. В.Н. Каразина.— 2012.— 14 (86), № 2. — С. 29—40.
3. Шука А.А. Нанозлектроника / А. А. Шука. — М.: Физматкнига, 2007. — 464 с.

4. Сажин Б.С. Сушка и промывка текстильных материалов: теория, расчет процессов / Б. С. Сажин, В. А. Реутский — М. : Легпромбытиздат, 1990. — С. 17—66.
5. Мюллер Г. Выращивание кристаллов из расплава. Конвекция и неоднородности / Г. Мюллер. Пер. с англ. В. Бунэ. — М. : Мир, 1991. — 143 с.
6. Рыкалин Н.Н. Лазерная обработка материалов / Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, А.Н. Кокора. — М. : Машиностроение, 1975. — 296 с.
7. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий — М : Наука, 1972. — 393 с.
8. Strutt J.W. (Lord Rayleigh) // J. W Strutt. — Phil. Mag. — 1916. — Vol. 32. — P. 529—546.
9. Гетлинг А.В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея—Бенара / А.В. Гетлинг // Успехи физических наук. — 1991. — 161, Вып. 9. — С. 1—80.
10. Bozbey L.S. Elementary convective cell in the layer of incompressible, viscous liquid and its physical properties / L.S. Bozbey, A.O. Kostikov, V.I. Tkachenko // Intern. conf. MSS-14 «Mode conversion, coherent structures and turbulence». — Space Research Institute, Moscow, 2014. — P. 322—328.
11. Bozbiei L. Experimental study of liquid movement in free elementary convective cells / L. Bozbiei, B. Borts, Yu. Kazarinov, A. Kostikov, V. Tkachenko // Energetika. — 2015. — Vol. 61, № 2. — P. 45—56.
12. Silveston P.L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten. — Forsch. Ing. Wes. — 1958. — Bd. 24. 29. — P. 59—69.

Поступила 09.11.16

REFERENCES

1. Chandrasekhar, S. (1970), Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press, Oxford, UK.
2. Neklyudov, I.M., Borts, B.V. and Tkachenko, V.I. (2012), “Applied mechanics”, *Proc. KhNU im. V.N. Karazina*, Vol. 14(86), no. 2, pp. 29-40.
3. Shchuka, A.A. (2007), *Nanoelektronika* [Nanoelectronics], Fizmatkniga, Moscow, Russia.
4. Sazhin, B.S. and Reutskiy, V.A. (1990), *Sushka i promyvka tekstilnykh materialov: teoriya, raschet protsessov* [Drying and washing of textile materials: theory, process analysis], Legprombytizdat, Moscow, Russia.
5. Myuller, G. (1991), *Vyraschivanie kristallov iz rasplava. Konveksiya i neodnorodnosti* [Flux growth. Convection and heterogeneities], translated from English by V. Bune, Mir, Moscow, Russia.
6. Rykalin, N.N., Uglov, A.A. and Kokora, A.N. (1975), *Lazernaya obrabotka materialov* [Laser treatment of materials], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
7. Gershuni, G.Z. and Zhukhovitskiy, E.M. (1972), *Konvektivnaya ustoychivost neszhimayemoy zhidkosti* [Convective stability of incompressible fluid], Nauka, Moscow, Russia.
8. Strutt, J.W. (1916), Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, Vol. 32, pp. 529-546.
9. Getling, A.V. (1991), “Formation of spatial structures of convection of Rayleigh-Benar”, *UFN*, Vol. 161, Iss. 9, pp. 1-80.
10. Bozbey, L.S., Kostikov, A.O. and Tkachenko, V.I. (2014), “Elementary convective cell in the layer of incompressible, viscous liquid and its physical properties”, *International conference MSS-14, Mode conversion, coherent structures and turbulence*, Space Research Institute, Moscow, pp. 322-328.
11. Bozbiei, L., Borts, B., Kazarinov, Yu., Kostikov, A. and Tkachenko, V. (2015), “Experimental study of liquid movement in free elementary convective cells”, *Energetika*, – Vol. 61, no. 2, pp. 45-56.
12. Silveston, P.L. (1958), Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten, *Forsch. Ing. Wes.*, Bd. 24, no. 29, pp. 59-69.

Received 09.11.16

O.L. Andreeva, B.V. Borts, A.O. Kostikov, V.I. Tkachenko

THEORETICAL STUDIES OF ELEMENTARY CONVECTION CELL
IN THE HORIZONTAL LAYER OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID
WITH RIGID AND MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Results of theoretical investigations of formation of convective cells with mixed boundary conditions in vacuum oil are presented. For a special case the analytical solutions were obtained for Navier–Stokes equation with rigid boundary conditions. The expressions of distribution for perturbed velocity and temperature in a cylindrical convective cell were obtained. These distributions were compared to similar parameters of free convective cell for the principal mode. It was demonstrated that the diameter of a convective cell is inversely related to the value of minimal wave number of the corresponding boundary value problem, i.e. the diameter of a cell with the mixed boundary conditions is less than the diameter of a cell with free boundary conditions, but it is larger than the diameter of a cell with rigid boundary conditions.

Key words: elementary convective cell, mixed and rigid boundary conditions, viscous fluid.

АНДРЕЕВА Оксана Леонидовна, аспирантка Ин-та проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, мл. науч. сотр. Национального научного центра «Харьковский физико-технический ин-т» НАН Украины. В 2014 г. окончила Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина. Область научных исследований — альтернативная энергетика, теплофизика и идентификация тепловых процессов, математическое моделирование.

БОРЦ Борис Викторович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., зам. директора по научной работе Научно-исследовательского комплекса «Ускорительные ядерные системы» Национального научного центра «Харьковский физико-технический ин-т» НАН Украины. В 1971 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — физика твердого тела, композиционные материалы, радиационное материаловедение.

КОСТИКОВ Андрей Олегович, д-р техн. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, профессор кафедры теплофизики и молекулярной физики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. В 1992 г. окончил Московский авиационный ин-т им. Серго Орджоникидзе. Область научных исследований — математическое моделирование, идентификация тепловых процессов.

ТКАЧЕНКО Виктор Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-производственного комплекса «Возобновляемые источники энергии и ресурсосберегающие технологии» Национального научного центра «Харьковский физико-технический ин-т» НАН Украины; зав. кафедрой физики нетрадиционных энерготехнологий и экологии Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, который окончил в 1975. Область научных исследований — физика плазмы, плазменная электроника, гидромеханика, физика твердого тела, нелинейная физика, сверхкритическая флюидная экстракция, альтернативная энергетика.