doi:https://doi.org/10.15407/emodel.40.03.077

УДК 519.21

А.В. Макаричев, д-р физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Ярослава Мудрого, 25,
тел. (057) 7073783; e-mail: amsol2904@gmail.com),
А.А. Кудь, А.Б. Щукин
ООО «Симкорд»,
(Украина, Харьков, ул. Отокара Яроша, 18)

Распределение сумм максимумов за время обслуживания заявок на периоде занятости в процессах аукционной торговли

Для входящего простейшего пуассоновского потока в систему массового обслуживания без ожидания и с постоянным временем обслуживания найдены в терминах характеристических функций вероятностные распределения и числовые характеристики сумм максимумов экспоненциальных приращений цен, поступивших и обслуженных на периоде занятости заявок клиентов о продажах.

Ключевые слова: распределения сумм максимумов на периоде занятости.

В многоканальную систему [1] массового интернет обслуживания поступает простейший пуассоновский входящий с параметром λ поток заявок клиентов о продажах. Заявки обслуживаются без ожидания. Время обслуживания заявок в системе обслуживания постоянно и равно a. За постоянное время обслуживания a заявки возникает простейший пуассоновский поток предложений с параметром ν показательно распределенных с параметром γ независимых случайных величин, приращений цены. Подобные модели возникают в процессах аукционной торговли (на понижение, повышение).

Принципиальное отличие настоящего исследования от описанного в работе [2] состоит в том, что в работе [2] суммы максимумов определялись в произвольный, но фиксированный, момент времени, и к этому моменту времени были и полностью обслуженные заявки, и могли быть заявки, находящиеся на обслуживании. Время для системы массового обслуживания состоит из периодов занятости и свободных периодов, которые постоянно чередуются. Свободный период сменяется периодом занятости и, наоборот, период занятости сменяется свободным периодом, и их длительности представляют собой случайные величины.

В данном исследовании в качестве отчетного периода для распределения сумм максимумов выбран период занятости системы между предыдущим и следующим свободными периодами. На свободных периодах приращения суммы отсутствуют, так как там отсутствует обслуживание заявок. Именно поэтому представляется целесообразным исследование сумм максимумов приращений цен за время обслуживания заявок на периоде занятости системы массового обслуживания с неограниченным числом каналов. На этом периоде занятости находится распределение сумм максимумов, и вероятностное распределение числа слагаемых в них существенно отличается от распределения Пуассона, использованного в [2].

Функция распределения и числовые характеристики максимума из случайного числа предложений показательных случайных величин. Предположим, что за время a пришло ровно n предложений приращений цен $X_1, X_2, ..., X_n$, распределенных показательно с параметром γ. Функция распределения (ФР) их максимума $X_{\max}^{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ имеет вид

$$F_{\max}^{(n)}(x) = P\{X_{\max}^{(n)} \le x\} = P\{X_1 \le x_1,\, X_2 \le x,\, ..., X_n \le x\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x\} = [1 - \exp(-\gamma x)]^n,\; x > 0.$$

Пусть

$$P_n(a, v) = \frac{(av)^n}{n!} \exp(-av)$$

есть вероятность того, что за постоянное время a придет ровно n предложений приращений цен, $n = 0, 1, 2, ...$. Обозначим $F_{\max}(x)$ ФР максимума предложений приращений за время a обслуживания заявки.

Теорема 1. Функция распределения максимума из предложенных показательных приращений цен за время a обслуживания заявки имеет вид $F_{\max}(x) = \exp[-av\exp(-\gamma x)],\; x > 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии поступления ровно n предложений о приращениях цен условная ФР максимума имеет вид

$$F_{\max}^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x\} = [1 - \exp(-\gamma x)]^n,\; x > 0.$$

Вероятность того, что за постоянное время a придет ровно n предложений о приращениях цен, составляет

$$P_n(a,v)=\frac{(av)^n}{n!}\exp(-av).$$

По формуле полной вероятности получаем

$$F_{\max}(x)=\sum_{n\geq 0}P_n(a,v)\,F_{\max}^{(n)}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(av)^n}{n!}\exp(-av)\prod_{i=1}^{n}P\{X_i\leq x\}=$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{(av)^n}{n!}\exp(-av)[1-\exp(-\gamma x)]^n=\exp[-av\exp(-\gamma x)],\ x>0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Первый момент для максимума из предложений показательных приращений цен за время a обслуживания заявки имеет вид

$$M_1^{(\max)}=\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n}.$$

В самом деле,

$$M_1^{(\max)}=\int_{x>0}[1-F_{\max}(x)]\,dx=\int_{x>0}\{1-\exp[-av\exp(-\gamma x)]\}\,dx=$$

$$=\int_{x>0}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!}\exp(-\gamma nx)\,dx=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!}\int_{x>0}\exp(-\gamma nx)\,dx=$$

$$=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!}\frac{1}{n\gamma}=\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. Второй момент для максимума из предложений показательных приращений цен за время a обслуживания заявки имеет вид

$$M_2^{(\max)}=\frac{1}{\gamma^2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n^2}.$$

В самом деле,

$$M_2^{(\max)}=2\int_{x>0}x\,[1-F_{\max}(x)]\,dx=2\int_{x>0}x\,\{1-\exp[-av\exp(-\gamma x)]\}\,dx=$$

$$=2\int\limits_{x>0} x \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!}\exp(-\gamma nx)\,dx=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!}\int\limits_{x>0} x\exp(-\gamma nx)\,dx=$$

$$=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!}\frac{1}{(n\gamma)^2}=\frac{1}{\gamma^2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n^2},$$

что и требовалось доказать.

Производящая функция и числовые характеристики для случайного числа заявок, пришедших и обслуженных на периоде занятости. Обозначим κ случайное число пришедших и обслуженных на периоде занятости заявок в многоканальной системе массового обслуживания без ожидания с постоянным временем обслуживания a. Пусть $\varphi(z)=Mz^{\kappa}$ — производящая функция для этого случайного числа заявок.

Теорема 2. Производящая функция для случайного числа заявок, пришедших и обслуженных на периоде занятости в многоканальной системе массового обслуживания без ожидания с постоянным временем обслуживания a, определяется по формуле

$$\varphi(z)=\frac{z\exp(-\lambda a)}{1-z\,[1-\exp(-\lambda a)]}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производящая функция

$$\varphi(z)=Mz^{\kappa}=\sum_{l\geq 1} z^l P\{\kappa=l\}$$

может быть найдена методом дополнительного события, если предположить, что вероятность появления заявки зеленого цвета равна z. Тогда по формуле полной вероятности величина $\varphi(z)=\sum\limits_{l\geq 1} z^l P\{\kappa=l\}$ есть фактически вероятность того, что на периоде занятости системы обслуживания без ожидания поступят и будут обслужены только заявки зеленого цвета. При условии, что на периоде занятости пришло ровно l заявок, условная вероятность того, что они все зеленого цвета, равна z^l. Затем эту вероятность умножаем на вероятность условия $P\{\kappa=l\}$, и все такие произведения складываем по числу заявок $l=1,2,\ldots$.

В то же время, для этой вероятности по формуле полной вероятности можно записать $\varphi(z) = z\exp(-\lambda a) + [1-\exp(-\lambda a)]\,z\varphi(z)$. Действительно, вероятность того, что на периоде занятости поступит ровно одна заявка, и она будет зеленая, равна $z\exp(-\lambda a)$. Вероятность того, что на периоде занятости поступит больше одной заявки, равна $[1-\exp(-\lambda a)]$.

За время обслуживания первой заявки на периоде занятости придет еще одна заявка, и с этого момента период занятости начинается заново, так как вторая пришедшая заявка, имея постоянное время обслуживания, будет обслужена вслед за первой, а константа ни от чего не зависит. При этом условии вероятность того, что все пришедшие заявки зеленые, равна $z\varphi(z)$. По формуле полной вероятности вероятность того, что все пришедшие и обслуженные на периоде занятости заявки зеленого цвета, равна $\varphi(z) = z\exp(-\lambda a) + [1-\exp(-\lambda a)]\, z\varphi(z)$. Из этого уравнения получаем

$$\varphi(z) = \frac{z\exp(-\lambda a)}{1 - z\,[1-\exp(-\lambda a)]},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3. Первый момент для числа обслуженных на периоде занятости заявок определяется по формуле $\kappa_1 = M\kappa = \exp(\lambda a)$.

Действительно,

$$\kappa_1 = M\kappa = \sum_{r\ge 1} rP\{\kappa = r\} = \left(\sum_{r\ge 1} rz^{r-1} P\{\kappa = r\}\right)\Bigg|_{z=1} = \frac{d\varphi(z)}{dz}\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{\exp(-\lambda a)\{1-[1-z\exp(-\lambda a)]\} + z\exp(-\lambda a)[1-\exp(-\lambda a)]}{\{1-[1-z\exp(-\lambda a)]\}^2}\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{\exp(-\lambda a)}{\{1-[1-z\exp(-\lambda a)]\}^2}\Bigg|_{z=1} = \exp(\lambda a),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4. Второй момент для числа обслуженных на периоде занятости заявок определяется так: $\kappa_2 = M\kappa^2 = [2\exp(\lambda a) - 1]\exp(\lambda a)$.

Действительно, двукратным дифференцированием функции $\varphi(z)$ в точке $z = 1$ получаем

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \sum_{r\ge 1} r(r-1)\, z^{r-2} P\{\kappa = r\},$$

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\Bigg|_{z=1} = \sum_{r\ge 1} r(r-1)\, z^{r-2} P\{\kappa = r\}\Bigg|_{z=1} = \sum_{r\ge 1} r(r-1) P\{\kappa = r\} =$$

$$= \sum_{r\ge 1} r^2 P\{\kappa = r\} - \sum_{r\ge 1} rP\{\kappa = r\} = \kappa_2 - \kappa_1.$$

Отсюда вытекает

$$\kappa_2 = \left.\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\right|_{z=1} + \kappa_1 .$$

Найдем

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\exp(-\lambda a)}{\{1-[1-z\exp(-\lambda a)]\}^2}\right\} = \frac{2\exp(-\lambda a)[1-\exp(-\lambda a)]}{\{1-[1-z\exp(-\lambda a)]\}^3},$$

и при $z=1$ получим

$$\left.\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\right|_{z=1} = \frac{2\exp(-\lambda a)[1-\exp(-\lambda a)]}{[\exp(-\lambda a)]^3} = 2[\exp(\lambda a)-1]\exp(\lambda a).$$

Таким образом,

$$\kappa_2 = \left.\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\right|_{z=1} + \kappa_1 = 2[\exp(\lambda a)-1]\exp(\lambda a) + \exp(\lambda a) =$$

$$= 2[\exp(\lambda a)-1]\exp(\lambda a),$$

что и требовалось доказать.

Преобразование Лапласа и числовые характеристики для суммы максимумов из приращений цен за время обслуживания заявок на периоде занятости. Пусть $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_\kappa$ — случайная сумма случайного числа к независимых и одинаково распределенных случайных слагаемых величин с ФР $F_{\max}(x)$. Обозначим $f^*(s)$ преобразование Лапласа для функции $F_{\max}(x)$:

$$f^*(s) = \int\limits_{x \geq 0} \exp(-sx)\, dF_{\max}(x).$$

Обозначим $\Phi(s) = M\exp(-sS)$ преобразование Лапласа для суммы максимумов из приращений цен за время обслуживания заявок на периоде занятости.

Теорема 3. Преобразование Лапласа для суммы максимумов из приращений цен за время обслуживания заявок на периоде занятости имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{f^*(s)\exp(-\lambda a)}{1-f^*(s)[1-\exp(-\lambda a)]}.$$

Доказательство. Методом дополнительного события по формуле полной вероятности находим вероятность того, что за время, численно равное величине S, не наступит случайное событие, интенсивность наступления которого равна s:

$$\Phi(s) = M\exp(-sS) = M\exp[-s(S_1 + S_2 + \ldots + S_\kappa)] = M\left[\prod_{r=1}^{\kappa} M(-sS_r)\right] =$$

$$= M[f^*(s)]^\kappa = \varphi[f^*(s)] = \frac{f^*(s)\exp(-\lambda a)}{1 - f^*(s)[1-\exp(-\lambda a)]}.$$

Здесь вместо аргумента z в производящую функцию

$$\varphi(z) = \frac{z\exp(-\lambda a)}{1 - z[1-\exp(-\lambda a)]}$$

из теоремы 2 подставляем $z = f^*(s)$ — преобразование Лапласа для максимумов из приращений цен за время обслуживания заявок на периоде занятости, что дает возможность получить искомый результат:

$$\Phi(s) = \frac{f^*(s)\exp(-\lambda a)}{1 - f^*(s)[1-\exp(-\lambda a)]}.$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 5. Первый момент для суммы S максимумов имеет вид

$$MS = \frac{\exp(\lambda a)}{\gamma}\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n}.$$

Действительно, известные свойства преобразования Лапласа и следствий 1 и 3 позволяют найти искомую величину MS в виде

$$MS = -\left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\left.\frac{d\{\varphi[f^*(s)]\}}{ds}\right|_{s=0} = -\varphi'[f^*(s)]\,f^{*\prime}(s)|_{s=0} =$$

$$= \varphi(1)[f^{*\prime}(0)] = \kappa_1 M_1^{(\max)} = \frac{\exp(\lambda a)}{\gamma}\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 6. Второй момент для суммы S максимумов имеет вид

$$MS^2 = [2\exp(\lambda a) - 1]\exp(\lambda a)\left[\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n}\right]^2 +$$

$$= \exp(\lambda a)\left\{\frac{1}{\gamma^2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n^2} - \left[\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n}\right]^2\right\}.$$

Действительно, с использованием известных свойств преобразования Лапласа, а также следствий 1, 2, 3 и 4, получаем

$$MS^2 = \left.\frac{d^2\Phi(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \{\varphi'[f^*(s)]f^{*\prime}(s)\}|_{s=0} =$$

$$= \{\varphi''[f^*(s)][f^{*\prime}(s)]^2 + \varphi'[f^*(s)]f^{*\prime\prime}(s)\}|_{s=0} =$$

$$= \varphi''(1)[f^{*\prime}(0)]^2 + \varphi'(1)f^{*\prime\prime}(0) =$$

$$= (\kappa_2 - \kappa_1)(M_1^{(\max)})^2 + \kappa_1 M_2^{(\max)} = \kappa_2(M_1^{(\max)})^2 + \kappa_1[M_2^{(\max)} - (M_1^{(\max)})^2] =$$

$$= [2\exp(\lambda a) - 1]\exp(\lambda a)\left[\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n}\right]^2 +$$

$$+ \exp(\lambda a)\left\{\frac{1}{\gamma^2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n^2} - \left[\frac{1}{\gamma}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(av)^n}{n!n}\right]^2\right\},$$

что и требовалось доказать.

Выводы

Найденные первые два момента для сумм максимумов приращений на периодах занятости обслуживанием заявок клиентов позволят строить вероятностные прогнозы для этих сумм на длительных промежутках времени с большим числом периодов занятости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. I*ntroduction to Queueing Theory. Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1968.
2. *Макаричев А.В., Кудь А.А., Щукин А.Б.* Суммы максимумов приращений в многоканальной системе обслуживания при моделировании аукционных торгов// Электрон. моделирование, 2017, **37**, № 5, с. 97—104.
3. *Климов Г.П.* Стохастические системы обслуживания. М., 1966, 244 с.
4. *Соловьев А.Д.* Асимптотическое поведение момента наступления редкого события в регенерирующем процессе. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 6, с. 79—89.
5. *Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др.* Вопросы математической теории надежности. Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983, 376 с.
6. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963, 236 с.
7. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.

Получена 15.05.17;
после доработки 18.02.18

REFERENCES

1. Gnedenko, B.V. and Kovalenko, I.N. (1968), Introduction to queuing theory. Program for scientific translations, Jerusalem, Israel.
2. Makarichev, A.V., Kud, A.A. and Shchukin, A.B. (2017), “The sum of the increments of the maxima in the multichannel queuing system for modeling auction” *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no. 5, pp. 97-104.
3. Klimov, G.P. (1966), *Stokhasticheskie sistemy obsluzhivaniya* [Stochastic service systems], Moscow, USSR.
4. Solovyov, A.D. (1971), “The asymptotic behavior of the occurrence of the rare event in the regenerating process”, *Izvestiya AN SSSR*. *Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 6, pp. 79-89.
5. Barzilovich, E.Yu., Belyaev, J.K., Kashtanov, V.A., Kovalenko, I.N. and Ushakov, I.A. (1983), *Voprosy matematicheskoi teorii* nadyozhnosti [Questions of mathematical theory of reliability], Ed by B.V. Gnedenko, Radio i svyaz, Moscow, USSR.
6. Khinchin A.Y. (1963), *Raboty po matematicheskoi teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works in mathematical queuing theory], Fizmatgiz, Moscow, USSR.
7. Shiryaev, A.N. (1980), *Veroyatnost* [Probability], Nauka, Moscow, USSR.

Received 15.05.17;
after revision 18.02.18

О.В. Макарічев, О.О. Кудь, О.Б. Щукін

РОЗПОДІЛЕННЯ СУМ МАКСИМУМІВ ЗА ЧАС ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАЯВОК НА ПЕРІОДІ ЗАЙНЯТОСТІ В ПРОЦЕСАХ АУКЦІЙНОЇ ТОРГІВЛІ

Для вхідного найпростійшого пуассонівського потоку в систему масового обслуговування без чекання і з постійним часом обслуговування знайдено в термінах характеристичних функцій імовірнісні розподілення та числові характеристики сум максимумів експоненціальних прирощень цін, що надійшли і обслуговані на періоді зайнятості заявок клієнтів про продаж.

Ключові слова: розподілення сум максимумів на періоді зайнятості.

A.V. Makarichev, A.A. Kud, A.B. Shchukin

DISTRIBUTION OF THE SUMS OF MAXIMUMS
FOR THE SERVICE TIME OF APPLICATIONS FOR THE PERIOD
OF EMPLOYMENT IN THE PROCESSES OF AUCTION TRADING

Probability distributions and numerical specifications for the sums of maxima of exponential price increments of received and served customers' applications about sales in the period of employment have been found for the simplest Poisson input into the queuing system without delay and with constant holding time.

K e y w o r d s: distribution of sums of maximums in the employment period.

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры транспортных систем и логистики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — потоки случайных событий с переменной интенсивностью, оценки характеристик надежности комплексов сложных восстана вливаемых систем, распределения для сумм экстремумов в случайных процессах обслуживания.

КУДЬ Александр Александрович, генеральный директор ООО «Симкорд». В 2002 г. окончил Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет. Область научных исследований — построение алгоритмов суммирования для определения случайных элементов двоичных матриц.

ЩУКИН Александр Борисович, глава Департамента математического анализа и моделирования торгово-экономических систем ООО «Симкорд». В 1988 г. окончил Харьковский авиационный ин-т. Область научных исследований — преобразование аддитивных функционалов от случайных процессов, случайные потоки с изменяющейся интенсивностью.