
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

doi:<https://doi.org/10.15407/emodel.40.04.003>

УДК 519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Ин-т технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net)

Применение смесей сдвинутых распределений с равномерным распределением величины сдвига для моделирования перфорированных случайных величин

Проанализированы свойства смесей сдвинутых распределений с равномерным распределением величины сдвига. Показано, что плотность вероятностей смеси является непрерывной и одновершинной. Исследованы свойства кумулянтных коэффициентов смесей сдвинутых распределений. Построены модели перфорированных случайных величин на основе смеси сдвинутых гауссовских и логистических распределений.

К л ю ч е в ы е с л о в а: кумулянтные коэффициенты, моментно-кумулянтные модели, кумулянтный анализ, перфорированные распределения, смеси распределений.

Применение кумулянтных моделей физических величин и процессов, имеющих негауссовские распределения, позволяет достаточно просто и эффективно решать различные прикладные задачи [1—8]. Для построения нелинейных оценок параметров негауссовских случайных величин и случайных процессов в работе [2] предложены кумулянтные модели перфорированных случайных величин, у которых по определению часть кумулянтов κ_s порядков $s > 2$ удовлетворяет условию

$$\kappa_s = 0. \quad (1)$$

При практическом применении перфорированных случайных величин актуальной является задача получения моделей их распределений и разработка методов компьютерного моделирования. В большинстве известных работ эта задача решена для частных случаев, когда $s = 3, 4$. В работах [9—11] при моделировании распределений, у которых $\kappa_3 = 0$ или $\kappa_4 = 0$,

© А.И. Красильников, 2018

предложено использовать дискретные конечные смеси гауссовских распределений. В работах [12, 13] для получения моделей негауссовских распределений, у которых $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, использованы двухкомпонентные смеси негауссовских распределений, а в работе [14] обосновано применение смесей сдвинутых и масштабированных распределений для построения моделей несимметричных распределений с кумулянт $\kappa_3 = 0$.

В работе [15] предложено применение семейства смесей сдвинутых распределений для моделирования перфорированных случайных величин и их распределений с любым порядком s . Смесь сдвинутых распределений в [15] определяется так:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x-y) dF_1(y), \quad (2)$$

где $F(x)$ — функция распределения смеси; $F_0(x)$ — базовая (сдвинутая) функция распределения; $F_1(y)$ — смешивающая функция распределения.

Функция $F(x)$ является функцией распределения случайной величины

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad (3)$$

где ξ_0 и ξ_1 — независимые случайные величины с функциями распределения $F_0(x)$ и $F_1(y)$. Случайная величина ξ_0 называется базовой, а случайная величина ξ_1 является величиной случайного сдвига функции распределения $F_0(x)$. Кумулянты смесей сдвинутых распределений (2) имеют вид

$$\kappa_s = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}, \quad (4)$$

где $\kappa_{s,0}, \kappa_{s,1}$ — кумулянты случайных величин ξ_0 и ξ_1 . Из формулы (4) следует, что семейство смесей (2) включает множество перфорированных распределений, для которых условие (1) принимает вид

$$\kappa_{s,0} = -\kappa_{s,1}. \quad (5)$$

Формула (2) позволяет моделировать множество функций распределения перфорированных случайных величин (3) любого типа — дискретных, непрерывных и смешанных. Важным для приложений является случай, когда ξ — непрерывная случайная величина. В частности, если обе функции, $F_0(x)$ и $F_1(y)$, абсолютно непрерывны, то случайная величина (3) непрерывна, и из формулы (2) находим ее плотность вероятностей:

$$p(x) = F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x-y) p_1(y) dy, \quad (6)$$

где $p_0(x) = F'_0(x)$ и $p_1(y) = F'_1(y)$ — плотности вероятностей случайных величин ξ_0 и ξ_1 . Формула (6) определяет семейство моделей смесей непре-

рывных сдвинутых распределений и является сверткой плотностей вероятностей $p_0(x)$ и $p_1(x)$.

Использование семейства смесей распределений (6) позволяет осуществлять математическое и компьютерное моделирование широкого класса перфорированных непрерывных случайных величин. Компьютерное моделирование перфорированных случайных величин сводится к моделированию суммы двух независимых случайных величин, ξ_0 и ξ_1 , кумулянты которых $\kappa_{s,0}$ и $\kappa_{s,1}$ удовлетворяют условию (5). Основная проблема моделирования перфорированных распределений в общем случае связана с вычислением интеграла (6).

Рассмотрим построение на основе смесей (6) простых моделей распределений непрерывных перфорированных случайных величин, пригодных для практического применения.

Модели перфорированных распределений. Пусть случайная величина ξ_1 имеет равномерное распределение на интервале $(-a, a]$, $a > 0$, с плотностью вероятностей

$$p_1(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (-a, a], \\ \frac{1}{2a}, & y \in (-a, a]. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда, подставляя (7) в формулу (6), получаем плотность вероятностей смеси в виде

$$p(x) = \frac{F_0(x+a) - F_0(x-a)}{2a}. \quad (8)$$

Если кумулянты $\kappa_{s,0}$ базовой случайной величины ξ_0 удовлетворяют условию (5), то формула (8) определяет семейство моделей плотности вероятностей непрерывных перфорированных случайных величин (3) с параметром сдвига a . Проанализируем свойства плотности вероятностей (8).

Свойство 1. Плотность вероятностей $p(x)$ является непрерывной функцией, так как функция распределения $F_0(x)$ непрерывна.

Свойство 2. При $a \rightarrow 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} p(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{F_0(x+a) - F_0(x-a)}{2a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_0(x+a) + p_0(x-a)}{2} = p_0(x).$$

Свойство 3. Пусть плотность вероятностей $p_0(x)$ — симметричная функция, т.е. $p_0(-x) = p_0(x)$. Тогда плотность вероятностей (8) также симметричная функция.

Для доказательства рассмотрим цепочку равенств, учитывая, что функция распределения $F_0(x)$ — симметричная, т.е. удовлетворяет условию $F_0(x) = 1 - F_0(-x)$:

$$\begin{aligned} p(-x) &= \frac{F_0(-x+a) - F_0(-x-a)}{2a} = \frac{F_0[-(x-a)] - F_0[-(x+a)]}{2a} = \\ &= \frac{(1 - F_0[(x-a)]) - (1 - F_0[(x+a)])}{2a} = \frac{F_0(x+a) - F_0(x-a)}{2a} = p(x). \end{aligned}$$

Свойство 4. Пусть плотность вероятностей $p_0(x)$ — одновершинная и отлична от нуля на всей числовой оси $x \in (-\infty, \infty)$ или на полуоси $x \in [0, \infty)$. Тогда плотность вероятностей $p(x)$ — одновершинная и имеет максимум в точке $x = x_0$:

$$\max p(x) = p(x_0) = \frac{F_0(x_0+a) - F_0(x_0-a)}{2a}.$$

Для доказательства найдем производную

$$p'(x) = \frac{p_0(x+a) - p_0(x-a)}{2a}. \quad (9)$$

Из выражения (9) видно, что существует единственное значение $x = x_0$, при котором производная $p'(x)$ меняет знак на противоположный: при $x < x_0$ $p'(x) > 0$, при $x > x_0$ $p'(x) < 0$. Если плотность вероятностей $p_0(x)$ — непрерывная функция, то $p'(x_0) = 0$ и значение x_0 является решением уравнения

$$p_0(x_0+a) - p_0(x_0-a) = 0. \quad (10)$$

Дополним условия, сформулированные в свойстве 4.

1. Пусть плотность вероятностей $p_0(x)$ — отличная от нуля при всех $x \in (-\infty, \infty)$, непрерывная, симметричная и одновершинная функция. Поскольку симметричная плотность вероятностей $p_0(x)$ удовлетворяет условию $p_0(-x) = p_0(x)$, решением уравнения (10) является значение $x_0 = 0$. Следовательно, в этом случае плотность вероятностей $p(x)$ — отличная от нуля при всех $x \in (-\infty, \infty)$ непрерывная, симметричная и одновершинная функция с максимумом в точке $x_0 = 0$:

$$\max p(x) = p(0) = \frac{F_0(a) - F_0(-a)}{2a} = \frac{[1 - F_0(-a)] - F_0(-a)}{2a} = \frac{1 - 2F_0(-a)}{2a}.$$

2. Пусть плотность вероятностей $p_0(x)$ — одновершинная и отлична от нуля на полуоси $x \in [0, \infty)$. Тогда плотность вероятностей $p(x)$ отлична

от нуля при $x \in [-a, \infty)$, одновершинная и имеет максимум в точке $x = x_0$. Если $p_0(0)$, то $a < x_0$, если $p(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$, то $x_0 = a$.

Свойство 5. Пусть плотность вероятностей $p_0(x)$ отлична от нуля на конечном интервале $(x_{\min}, x_{\max}]$, непрерывная и одновершинная на этом интервале. В этом случае плотность вероятностей $p(x)$ отлична от нуля на интервале $(x_{\min} - a, x_{\max} + a]$, на котором она может быть либо одновершинной, либо иметь участок постоянства.

Если $x_{\max} - x_{\min} \geq 2a$, то плотность вероятностей $p(x)$ является одновершинной, если $x_{\max} - x_{\min} < 2a$, то плотность вероятностей $p(x)$ возрастает на интервале $(x_{\min} - a, x_{\max} - a]$, постоянна на интервале $(x_{\max} - a, x_{\min} + a]$ и убывает на интервале $(x_{\min} + a, x_{\max} + a]$.

Кумулянтные коэффициенты смеси. Для выбора базовой функции распределения $F_0(x)$, у которой кумулянты $\kappa_{s,0}$ удовлетворяют условию (5), удобно использовать кумулянтные коэффициенты γ_s , которые для смеси (2) с использованием (4) имеют вид

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{\kappa_2^{s/2}} = \frac{\kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}}{(\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1})^{s/2}} = \frac{\kappa_{2,0}^{s/2} \gamma_{s,0} + \kappa_{2,1}^{s/2} \gamma_{s,1}}{(\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1})^{s/2}}, \quad (11)$$

где $\kappa_{2,0}$ и $\kappa_{2,1}$ — дисперсии слагаемых ξ_0 и ξ_1 ; $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$ — их кумулянтные коэффициенты.

Конкретизируем формулу (11) для модели (8). Распределение (7) является симметричным и его центральные моменты имеют вид

$$\mu_{s,1} = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{a^s}{s+1}, & s - \text{четное.} \end{cases} \quad (12)$$

У распределения (7) $\kappa_{2,1} = \mu_{2,1} = a^2/3$, все кумулянты $\kappa_{s,1}$ и кумулянтные коэффициенты $\gamma_{s,1}$ нечетных порядков s равны нулю. Подставляя в формулу (11) значение дисперсии $\kappa_{2,1}$, находим зависимость коэффициентов $\gamma_s(a)$ от параметра сдвига a :

$$\gamma_s(a) = \begin{cases} \frac{(3\kappa_{2,0})^{s/2} \gamma_{s,0}}{(3\kappa_{2,0} + a^2)^{s/2}}, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{(3\kappa_{2,0})^{s/2} \gamma_{s,0} + a^s \gamma_{s,1}}{(3\kappa_{2,0} + a^2)^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases} \quad (13)$$

Анализируя кумулянтные коэффициенты (13) при $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow \infty$, видим, что $\gamma_s(a) \in (\gamma_{s,0}, 0)$, если s — нечетное, и $\gamma_s(a) \in (\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1})$, если s —

четное. Таким образом, значения коэффициентов $\gamma_s(a)$ смеси (8) в зависимости от параметра сдвига a могут изменяться в широких пределах, которые зависят от выбора плотности вероятностей $p_0(x)$ и, как следствие, от коэффициентов $\gamma_{s,0}$ базовой случайной величины ξ_0 .

Проанализируем зависимость коэффициентов $\gamma_s(a)$ четных порядков s от параметра сдвига a , считая, что $\gamma_{s,0} \neq 0$ и $\gamma_{s,1} \neq 0$. Рассмотрим два случая: когда коэффициенты $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$ имеют одинаковые знаки и когда они имеют различные знаки.

1. Пусть коэффициенты $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$ имеют одинаковые знаки. Тогда $\gamma_s(a) > 0$, если $\gamma_{s,0} > 0, \gamma_{s,1} > 0$, и $\gamma_s(a) < 0$, если $\gamma_{s,0} < 0, \gamma_{s,1} < 0$. Исследуем функцию $\gamma_s(a)$ на экстремум. Для этого найдем производную $\gamma'_s(a)$:

$$\gamma'_s(a) = \frac{d\gamma_s(a)}{da} = \frac{sa(3\kappa_{2,0}\gamma_{s,1}a^{s-2} - (3\kappa_{2,0})^{s/2}\gamma_{s,0})}{(3\kappa_{2,0} + a^2)^{s/2+1}}.$$

Приравнявая $\gamma'_s(a)$ нулю, получаем уравнение для нахождения точки экстремума $a_{m,s}$, а именно

$$3\kappa_{2,0}\gamma_{s,1}a_{m,s}^{s-2} - (3\kappa_{2,0})^{s/2}\gamma_{s,0} = 0,$$

решение которого имеет следующий вид:

$$a_{m,s} = (3\kappa_{2,0})^{1/2} \left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{1/(s-2)} = 3^{1/2} \sigma_0 \left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{1/(s-2)}, \quad (14)$$

где $\sigma_0 = \kappa_{2,0}^{1/2}$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ_0 .

Найдем значение коэффициентов $\gamma_s(a_{m,s})$, подставив (14) в выражение (13):

$$\gamma_s(a_{m,s}) = \frac{\gamma_{s,0} + \gamma_{s,1} \left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{s/(s-2)}}{\left[1 + \left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{2/(s-2)} \right]^{s/2}}. \quad (15)$$

Покажем, что $a_{m,s}$ — точка минимума функции $\gamma_s(a)$. Для этого нужно убедиться в том, что $\gamma_s(a_{m,s}) < \gamma_{s,0} = \gamma_s(0)$ и $\gamma_s(a_{m,s}) < \gamma_{s,1} = \gamma_s(\infty)$. Преобразовав выражение (15), получим

$$\gamma_s(a_{m,s}) = \frac{\gamma_{s,0}}{\left[\left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{2/(s-2)} + 1 \right]^{s/2-1}} < \gamma_{s,0}, \quad \gamma_s(a_{m,s}) = \frac{\gamma_{s,1}}{\left[\left(\frac{\gamma_{s,1}}{\gamma_{s,0}} \right)^{2/(s-2)} + 1 \right]^{s/2-1}} < \gamma_{s,1}. \quad (16)$$

Таким образом, $a_{m,s}$ — точка минимума функции $\gamma_s(a)$, и из (16) получаем окончательное выражение:

$$\min \gamma_s = \gamma_s(a_{m,s}) = \frac{\gamma_{s,1}}{\left[\left(\frac{\gamma_{s,1}}{\gamma_{s,0}} \right)^{2/(s-2)} + 1 \right]^{s/2-1}} = \frac{\gamma_{s,0}}{\left[\left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{2/(s-2)} + 1 \right]^{s/2-1}}.$$

2. Пусть коэффициенты $\gamma_{s,0}, \gamma_{s,1}$ имеют различные знаки. Тогда коэффициенты $\gamma_s(a)$ могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Найдем условия, при которых $\gamma_s(a) = 0$. При $\gamma_{s,0} \neq 0$ и $\gamma_{s,1} \neq 0$ из формулы (13) получаем уравнение $(3\kappa_{2,0})^{s/2} \gamma_{s,0} + a_{0,s}^s \gamma_{s,1} = 0$, откуда находим значение $a_{0,s}$, при котором $\gamma_s(a) = 0$:

$$a_{0,s} = (3\kappa_{2,0})^{1/2} \left(-\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{1/s} = 3^{1/2} \sigma_0 \left(-\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}} \right)^{1/s}. \quad (17)$$

Конкретизируем формулу (13) для порядков $s = 4, 6, 8$. Для этого вычислим значения коэффициентов $\gamma_{s,1}$, $s = 4, 6, 8$, случайной величины ξ_1 , используя известные формулы связи кумулянтных коэффициентов с центральными моментами [16]:

$$\gamma_4 = M_4 - 3, \quad \gamma_6 = M_6 - 15M_4 + 30, \quad \gamma_8 = M_8 - 28M_6 - 35M_4^2 + 420M_4 - 630, \quad (18)$$

где $M_s = \mu_s / \mu_2^{s/2}$ — нормированные центральные моменты. Подставляя в (18) моменты $\mu_{s,1}$ выражения (12), находим

$$\gamma_{4,1} = -12, \quad \gamma_{6,1} = 48/7, \quad \gamma_{8,1} = -86,4. \quad (19)$$

Подставляя в (13) значения кумулянтных коэффициентов (19), получаем зависимости коэффициентов $\gamma_s(a)$ четных порядков от параметра сдвига a :

$$\gamma_4(a) = \frac{9\sigma_0^4 \gamma_{4,0} - 12a^4}{(3\sigma_0^2 + a^2)^2}, \quad \gamma_6(a) = \frac{189\sigma_0^6 \gamma_{6,0} + 48a^6}{7(3\sigma_0^2 + a^2)^3}, \quad \gamma_8(a) = \frac{81\sigma_0^8 \gamma_{8,0} - 86,4a^8}{(3\sigma_0^2 + a^2)^4}. \quad (20)$$

Из формулы (14) находим значения параметра сдвига $a_{m,s}$, при которых $\gamma_s(a) = \min \gamma_s$:

$$a_{m,4} = \sigma_0 \left(-\frac{5}{2} \gamma_{4,0} \right)^{1/2}, \quad a_{m,6} = \sigma_0 \left(\frac{21}{16} \gamma_{6,0} \right)^{1/4}, \quad a_{m,8} = \sigma_0 \left(-\frac{5}{16} \gamma_{8,0} \right)^{1/6}.$$

Из формулы (17) получаем значения параметра сдвига $a_{0,s}$, при которых $\gamma_s(a) = 0$:

$$a_{0,4} = \sigma_0 \left(\frac{15}{2} \gamma_{4,0} \right)^{1/4}, \quad a_{0,6} = \sigma_0 \left(-\frac{63}{16} \gamma_{6,0} \right)^{1/6}, \quad a_{0,8} = \sigma_0 \left(\frac{15}{16} \gamma_{8,0} \right)^{1/8}. \quad (21)$$

Из формул (20), (21) следует, что при четном порядке s распределение (8) будет перфорированным, если у базового распределения $F_0(x)$ ку-мулянтные коэффициенты удовлетворяют хотя бы одному из условий: $\gamma_{4,0} > 0, \gamma_{6,0} < 0, \gamma_{8,0} > 0$.

Моделирование перфорированных распределений. Формула (8) при заданной базовой функции распределения $F_0(x)$ позволяет моделировать плотность вероятностей $p_\xi(x)$ перфорированной случайной величины ξ , у которой математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$ и дисперсия $\mathbf{D}\xi$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi &= m_\xi = \kappa_1 = \kappa_{1,0} + \kappa_{1,1} = \kappa_{1,0}, \\ \mathbf{D}\xi &= \sigma_\xi^2 = \kappa_2 = \kappa_{2,0} + \kappa_{2,1} = \kappa_{2,0} + a^2/3. \end{aligned} \quad (22)$$

Для получения моделей плотности вероятностей $p_\eta(x)$ перфорированной случайной величины η с заданным математическим ожиданием $\mathbf{M}\eta = m_\eta$ и дисперсией $\mathbf{D}\eta = \sigma_\eta^2$ осуществим линейное преобразование случайной величины ξ :

$$\eta = c + b\xi, \quad (23)$$

где $c \in (-\infty, \infty)$ — параметр сдвига, $b > 0$ — параметр масштаба. Определим значения параметров c и b . Из формулы (23) следует, что $m_\eta = c + bm_\xi$, $\sigma_\eta^2 = b^2 \sigma_\xi^2$, поэтому $b = \sigma_\eta / \sigma_\xi$, $c = m_\eta - m_\xi \sigma_\eta / \sigma_\xi$.

Таким образом, плотности вероятностей $p_\eta(x)$ и $p_\xi(x)$ случайных величин η и ξ связаны между собой следующим выражением:

$$p_\eta(x) = \frac{1}{b} p_\xi \left(\frac{x-c}{b} \right) = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} p_\xi \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} (x - m_\eta) + m_\xi \right]. \quad (24)$$

Подставляя (24) в формулу (8), получаем выражение для моделирования плотности вероятностей $p_\eta(x)$ перфорированной случайной величины η с заданным математическим ожиданием m_η и дисперсией σ_η^2 :

$$p_\eta(x) = \frac{\sigma_\xi}{2a\sigma_\eta} \left\{ F_0 \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} (x - m_\eta) + m_\xi + a \right] - F_0 \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} (x - m_\eta) + m_\xi - a \right] \right\}. \quad (25)$$

Пусть $m_\eta = 0$ и $\sigma_\eta = 1$. Тогда $\eta = \tilde{\xi}$ — стандартная случайная величина,

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\xi_0 + \xi_1 - \kappa_{1,0}}{(\kappa_{2,0} + a^2/3)^{1/2}}, \quad (26)$$

плотность вероятностей которой $\tilde{p}(x)$ на основании (25) имеет вид

$$\tilde{p}(x) = \sigma_\xi p(\sigma_\xi x + m_\xi) = \frac{\sigma_\xi}{2a} [F_0(\sigma_\xi x + m_\xi + a) - F_0(\sigma_\xi x + m_\xi - a)]. \quad (27)$$

Пример 1. Пусть ξ_0 — гауссовская случайная величина, функция распределения $F_0(x)$ которой имеет вид

$$F_0(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (28)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной гауссовской случайной величины, $\varphi(z)$ — ее плотность вероятностей,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2}, \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (29)$$

Подставляя (28) в (8), получаем плотность вероятностей $p_\xi(x)$ случайной величины (3):

$$p_\xi(x) = \frac{\Phi(x+a) - \Phi(x-a)}{2a}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (30)$$

У случайной величины ξ_0 дисперсия $\kappa_{2,0} = \mu_{2,0} = 1$, все кумулянтные коэффициенты $\gamma_{s,0}$ равны нулю при $s > 2$ и формула (13) принимает следующий вид:

$$\gamma_s(a) = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{a^s \gamma_{s,1}}{(3+a^2)^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases} \quad (31)$$

Из формулы (31) видно, что при $a \rightarrow 0$ все коэффициенты $\gamma_s(a)$ стремятся к нулю, а при $a \rightarrow \infty$ $\gamma_s(a) \rightarrow \gamma_{s,1}$. Запишем формулу (31) для $s = 4, 6, 8$, используя (19):

$$\gamma_4(a) = -\frac{12a^4}{(3+a^2)^2}, \quad \gamma_6(a) = \frac{48a^6}{7(3+a^2)^3}, \quad \gamma_8(a) = -\frac{86,4a^8}{(3+a^2)^4}. \quad (32)$$

Из формул (32) следует, что $\gamma_4(a) \in (-1, 2; 0)$, $\gamma_6(a) \in (0; 48/7)$, $\gamma_8(a) \in (-86, 4; 0)$. В таблице приведены значения коэффициентов (32) в зависимости от значений параметра сдвига a .

$\gamma_s(a)$	Значение $\gamma_s(a)$ при a							
	0,5	1	2	3	4	5	10	50
<i>По формуле (32)</i>								
$\gamma_4(a)$	-0,007	-0,075	-0,392	-0,675	-0,851	-0,957	-1,131	-1,197
$\gamma_6(a)$	0,003	0,107	1,279	2,893	4,095	4,881	6,275	6,833
$\gamma_8(a)$	-0,003	-0,338	-9,212	-27,34	-43,45	-54,91	-76,77	-85,99
<i>По формуле (39)</i>								
$\gamma_4(a)$	0,72	0	-0,72	-0,96	-1,059	-1,108	-1,176	-1,199
$\gamma_6(a)$	3,566	1,714	3,566	5,006	5,718	6,096	6,656	6,849
$\gamma_8(a)$	35,25	0	-35,25	-56,68	-67,79	-73,86	-83,03	-86,26

Для моделирования стандартной случайной величины $\tilde{\xi}$ из (22) находим $m_\xi = \mathbf{M}\xi = 0$, $\sigma_\xi = (1+a^2/3)^{1/2}$, тогда формула (26) принимает следующий вид:

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \left(\frac{3}{3+a^2}\right)^{1/2} (\xi_0 + \xi_1). \quad (33)$$

Подставляя в (27) и (30) значения m_ξ и σ_ξ , получаем плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, стандартной случайной величины (33):

$$\tilde{p}(x) = \left(\frac{3+a^2}{12a^2}\right)^{1/2} [\Phi((1+a^2/3)^{1/2}x+a) - \Phi((1+a^2/3)^{1/2}x-a)]. \quad (34)$$

На рисунке сплошной линией представлены графики плотности вероятностей (34) и (41), а штриховой линией для сравнения показаны графики плотности вероятностей (29) стандартной гауссовской случайной величины.

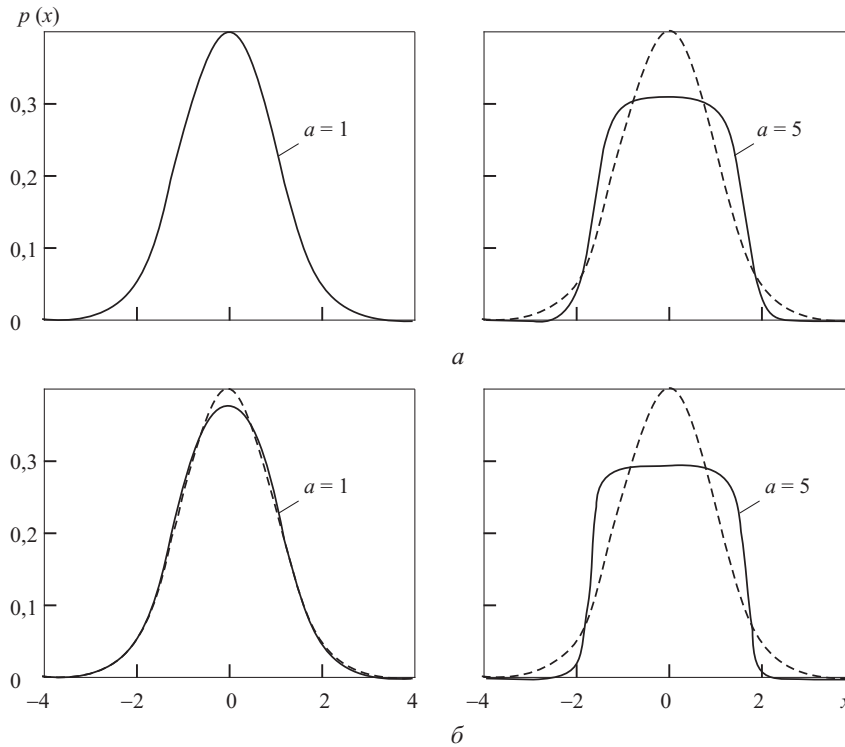
Таким образом, рассмотренная модель позволяет осуществлять математическое и компьютерное моделирование перфорированных случайных величин, у которых равны нулю все кумулянтные коэффициенты γ_s нечетных порядков, а коэффициенты γ_s четных порядков можно изменять в широких пределах, изменяя значения параметра сдвига.

Заметим, что смесь (30), которую иногда называют плоско-нормальным распределением, применяют как модель результатов измерений [17, 18].

Пример 2. Пусть ξ_0 — непрерывная случайная величина, имеющая логистическое распределение [19] с функцией распределения

$$F_0(x) = [1 + \exp(-\beta x)]^{-1}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (35)$$

где $\beta > 0$ — параметр масштаба. Распределение (35) является симметричным с центральными моментами [19]



Графики плотности вероятностей смеси (сплошные линии): a — согласно (34); b — согласно (41); --- плотность вероятностей стандартной гауссовской случайной величины согласно (29)

$$\mu_{s,0} = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^s (2^s - 2) |B_s|, & s - \text{четное,} \end{cases} \quad (36)$$

где B_s — числа Бернулли, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$. У случайной величины ξ_0 все кумулянтные коэффициенты $\gamma_{s,0}$ нечетных порядков s равны нулю. Примем $\beta = \pi$. Тогда $\kappa_{2,0} = \mu_{2,0} = \sigma_0^2 = 1/3$ и формула (13) принимает следующий вид:

$$\gamma_s(a) = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\gamma_{s,0} + a^s \gamma_{s,1}}{(1+a^2)^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases} \quad (37)$$

Из формулы (37) видно, что при $a \rightarrow 0$ все коэффициенты $\gamma_s(a)$ стремятся к $\gamma_{s,0}$, а при $a \rightarrow \infty$ $\gamma_s(a) \rightarrow \gamma_{s,1}$. Конкретизируем формулу (37) для

порядков $s = 4, 6, 8$. Подставляя в формулы (18) моменты $\mu_{s,0}$ из (36), находим кумулянтные коэффициенты случайной величины ξ_0 :

$$\gamma_{4,0} = 12, \gamma_{6,0} = 48/7, \gamma_{8,0} = 86,4. \quad (38)$$

Зависимости коэффициентов $\gamma_s(a)$ четных порядков от параметра сдвига a получаем, подставляя значения коэффициентов (38) в (37):

$$\gamma_4(a) = \frac{12(1-a^4)}{(1+a^2)^2}, \quad \gamma_6(a) = \frac{48(1+a^6)}{7(1+a^2)^3}, \quad \gamma_8(a) = \frac{86,4(1-a^8)}{(1+a^2)^4}. \quad (39)$$

Из формулы (14) находим значение $a_{m,6} = 1$, а из формул (39) — значения $a_{4,0} = a_{0,8} = 1$, $\min \gamma_6 = 12/7$. Таким образом, $\gamma_4(a) \in (-1,2; 1,2)$, $\gamma_6(a) \in (12/7; 48/7)$, $\gamma_8(a) \in (-86,4; 86,4)$. В таблице приведены значения коэффициентов (39) в зависимости от значений параметра a .

Для моделирования стандартной случайной величины $\tilde{\xi}$ из (22) находим $m_\xi = \mathbf{M}\xi = 0$, $\sigma_\xi = \sqrt{(1+a^2)/3}$ и формула (26) принимает следующий вид:

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \sqrt{\frac{3}{1+a^2}}(\xi_0 + \xi_1). \quad (40)$$

Подставляя в формулы (27), (35) значения m_ξ , σ_ξ и $\beta = \pi$, получаем плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, стандартной случайной величины (40):

$$\tilde{p}(x) = \sqrt{\frac{1+a^2}{12a^2}} \left\{ \left[1 + \exp \left(-\pi \left(x \sqrt{\frac{1+a^2}{3}} + a \right) \right) \right]^{-1} - \left[1 + \exp \left(-\pi \left(x \sqrt{\frac{1+a^2}{3}} - a \right) \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (41)$$

Таким образом, рассмотренная модель позволяет осуществлять математическое и компьютерное моделирование перфорированных случайных величин, у которых при $a = 1$ равны нулю кумулянтные коэффициенты $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9$ и все коэффициенты γ_s нечетных порядков $s \geq 11$, а при $a \neq 1$ — все коэффициенты γ_s нечетных порядков.

Выводы

Использование для моделирования плотности вероятностей перфорированных случайных величин смесей сдвинутых непрерывных распределений (6), у которых величина сдвига имеет равномерное распределение, позволяет заменить сложную операцию вычисления свертки базовой и смешивающей плотностей вероятностей простой операцией алгебраического суммирования сдвинутых базовых функций распределения. В этом

случае плотность вероятностей (8) смеси является непрерывной, одновершинной и может быть математической моделью негауссовских распределений многих физических величин и процессов, встречающихся в приложениях.

Значения кумулянтных коэффициентов $\gamma_s(a)$ смеси (8) в зависимости от параметра сдвига a могут изменяться в широких пределах, которые зависят от выбора плотности вероятностей $p_0(x)$ и, как следствие, от коэффициентов $\gamma_{s,0}$ базовой случайной величины ξ_0 .

Коэффициенты $\gamma_s(a)$ имеют минимум, если коэффициенты $\gamma_{s,0}$, $\gamma_{s,1}$ составляющих смеси имеют одинаковые знаки, и могут быть положительными, отрицательными или равными нулю, если коэффициенты $\gamma_{s,0}$, $\gamma_{s,1}$ имеют различные знаки.

Практическая ценность предложенных моделей заключается в простоте математического и компьютерного моделирования перфорированных случайных величин, а их использование может повысить достоверность результатов решения задач измерений, обнаружения и классификации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978, 376 с.
2. Кунченко Ю.П. Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. I. Стохастические полиномы, их свойства и применения для нахождения оценок параметров. Черкассы: ЧИТИ, 2001, 133 с.
3. Alexandrou D., De Moustier C., Haralabus G. Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model // J. Acoust. Soc. Am. 1992, Vol. 91, No. 3, p. 1403—1413.
4. Кузнецов В.В. Использование моментов третьего порядка в расчетах электрических нагрузок // Вест. Самарского ГТУ. Серия «Технические науки». 2009, № 2 (24), с. 166—171.
5. Wang H., Chen P. Fault Diagnosis Method Based on Kurtosis Wave and Information Divergence for Rolling Element Bearings // WSEAS Transactions on Systems. 2009, Vol. 8, Issue 10, p. 1155—1165.
6. Кузнецов Б.Ф., Бородин Д.К., Лебедева Л.В. Кумулянтные модели дополнительных погрешностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013, № 1 (37), с. 134—138.
7. Гармаш О.В., Красильников А.И. Кумулянтные методы обнаружения сигналов дискретной акустической эмиссии // Научни известия на НТСМ. 2017, XXV, брой 1 (216), с. 109—113.
8. Берегун В.С., Красильников О.І. Дослідження чутливості коефіцієнта ексцесу діагностичних сигналів для контролю стану електротехнічного обладнання // Технічна електродинаміка. 2017, № 4, с. 79—85.
9. Кунченко Ю.П., Заболотний С.В., Коваль В.В., Чепинога А.В. Моделирование эксцесных випадкових величин із заданим кумулянтним описом на основі бігаусового розподілу // Вісник ЧДТУ. 2005, № 1, с. 38—42.

10. Заболотний С.В., Чепинога А.В. Тетрагаусові симетрично-розподілені імовірнісні моделі на основі моментного опису // Зб. наук. праць ШМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. 2008, № 47, с. 92—99.
11. Чепинога А.В. Области реалізації бігаусових моделей асиметрично-ексцесних випадкових величин з перфорованим моментно-кумулянтним описом // Вісник ЧДТУ. 2010, № 2, с. 91—95.
12. Krasilnikov A.I. Class non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis // Radioelectronics and Communications Systems. 2013, Vol. 56, No 6, p. 312—320.
13. Красильников А.И. Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса // Электрон. моделирование. 2017, 39, № 1, с. 3—17.
14. Красильников А.И. Модели несимметричных распределений случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии // Там же. 2016, 38, № 1, с. 19—33.
15. Красильников А.И. Моделирование перфорированных случайных величин на основе смесей сдвинутых распределений // Там же. 2018, 40, № 1, с. 47—61.
16. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений/Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Ширяева, под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Наука, 1966, 588 с.
17. Blazquez J., Garcia-Berrocal A., Montalvo C., Balbas M. The coverage factor in a Flatten-Gaussian distribution // Metrologia, 2008, Vol. 45, No. 5, p. 503—506.
18. Дорожовець М.М., Попович І.В. Опрацювання результатів спостережень із розподілом, що є згортокою нормального і рівномірного розподілів методом порядкових статистик // Український метрологічний журнал. 2015, № 2, с. 3—11.
19. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001, 295 с.

Получена 19.03.18;
после доработки 04.06.18

REFERENCES

1. Malakhov, A.N. (1978), *Kumuliantnyi analiz sluchainykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovaniy* [Cumulant analysis of random non-Gaussian processes and their transformations], Sovetskoe radio, Moscow, USSR.
2. Kunchenko, Yu.P. (2001), *Polinomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainykh velichin. Ch. I. Stokhasticheskie polinomy, ikh svoystva i primeneniya dlia nakhozheniya otsenok parametrov* [Polynomial estimations of parameters of random variables close to Gaussians. Part I. Stochastic polynomials, their properties and application for finding Parameter Estimations], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
3. Alexandrou, D., De Moustier, C. and Haralabus, G. (1992), Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91, no. 3, pp. 1403-1413.
4. Kuznetsov, V.V. (2009), “Use of the moments of the third order in calculations of electric loadings”, *Vestnik Samarskogo GTU. Seriya Tekhnicheskie nauki*, no. 2 (24), pp. 166-171.
5. Wang, H. and Chen, P. (2009), “Fault Diagnosis Method Based on Kurtosis Wave and Information Divergence for Rolling Element Bearings”, *WSEAS Transactions on Systems*, Vol. 8, Iss. 10, pp. 1155-1165.
6. Kuznetsov, B.F., Borodkin, D.K. and Lebedeva, L.V. (2013), “Cumulant models of additional errors”, *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, no. 1 (37), pp. 134-138.
7. Harmash, O.V. and Krasilnikov, A.I. (2017), “Cumulant methods for detecting acoustic emission signals”, *Scientific Proceedings of STUME*, Vol. XXV, no. 1 (216), pp. 109-113.

8. Beregun, V.S. and Krasilnikov, A.I. (2017), "Research of excess kurtosis sensitiveness of diagnostic signals for control of the condition of the electrotechnical equipment", *Tekhnichna elektrodynamika*, no. 4, pp. 79-85.
9. Kunchenko, Iu.P., Zabolotnii, S.V., Koval, V.V. and Chepynoha, A.V. (2005), "Simulation of excess random variables with a given cumulative description on the basis of the bigaussian distribution", *Visnyk ChDTU*, no. 1, pp. 38-42.
10. Zabolotnii, S.V. and Chepynoha, A.V. (2008), "Tetragaussian symmetrically distributed probabilistic models on the basis of a moment description", *Zbirnyk naukovykh prats IPME im. G.Ye. Pukhova, NAN Ukrainy*, no. 47, pp. 92-99.
11. Chepynoha, A.V. (2010), "Areas of realization of bigauss models of asymmetric-excess random variables with a perforated moment-cumulant description", *Visnyk ChDTU*, no. 2, pp. 91-95.
12. Krasilnikov, A.I. (2013), "Class of non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis", *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 56, no. 6, pp. 312-320.
13. Krasilnikov, A.I. (2017), "Class of non-Gaussian symmetric distributions with zero coefficient of kurtosis", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 3-17.
14. Krasilnikov, A.I. (2016), "Models of asymmetrical distributions of random variables with zero asymmetry coefficient", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 19-33.
15. Krasilnikov, A.I. (2018), "Modeling of perforated random variables on the basis of a mixture of shifted distributions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 40, no. 1, pp 47-61.
16. Kendall, M. and Stuart, A. (1966), *Teoriia raspredelenii* [Distribution Theory], Translated by Sazonov, V.V., Shiriaev, A.N., Ed by Kolmogorov, A.N., Nauka, Moscow, USSR.
17. Blazquez, J., Garcia-Berrocal, A., Montalvo, C. and Balbas, M. (2008), The coverage factor in a Flatten-Gaussian distribution, *Metrologia*, Vol. 45, no. 5, pp. 503-506.
18. Dorozhovets, M.M. and Popovych, I.V. (2015), "Processing of observation results with a distribution representing the convolution of normal and uniform distributions by the method of ordinal statistics", *Ukrainskyi metrolohichnyi zhurnal*, no. 2, pp. 3-11.
19. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Reference Book on Probabilistic Distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Received 19.03.18;
after revision 04.06.18

О.І. Красильніков

ЗАСТОСУВАННЯ СУМІШЕЙ ЗСУНУТИХ РОЗПОДІЛІВ
З РІВНОМІРНИМ РОЗПОДІЛОМ ВЕЛИЧИНИ ЗСУВУ
ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРФОРОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Проаналізовано властивості сумішей зсунутих розподілів з рівномірним розподілом величини зсуву. Показано, що щільність імовірностей суміші є неперервною та одновіршинною. Досліджено властивості кумулянтних коефіцієнтів сумішей зсунутих розподілів. Побудовано моделі перфорованих випадкових величин на основі суміші зсунутих гауссівських та логістичних розподілів.

Ключові слова: кумулянтні коефіцієнти, моментно-кумулянтні моделі, кумулянтний аналіз, перфоровані розподіли, суміші розподілів.

A.I. Krasilnikov

THE APPLICATION OF MIXTURES OF SHIFTED
DISTRIBUTIONS WITH UNIFORM DISTRIBUTION
OF THE SHIFT VALUE FOR MODELING PERFORATED
RANDOM VARIABLES

The properties of mixtures of shifted distributions with a uniform distribution of the shift value have been analyzed. It is shown that the probability density of the mixture is continuous and unimodal. The properties of cumulant coefficients of mixtures of shifted distributions have been investigated. The models of perforated random variables based on a mixture of shifted Gaussian and logistic distributions have been constructed.

К е у о r d s: cumulant coefficients, moment-cumulant models, cumulant analysis, perforated distributions, mixtures of distributions.

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.