

УДК 621.313

### МЕТОД РОЗРАХУНКУ УСЕРЕДНЕНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ПО ВИСОТІ ПОВІТРЯНОГО ПРОМІЖКУ ТОРЦЕВОГО ДУГОСТАТОРНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

**О. М. Карлов, І. П. Кондратенко, Р. С. Крищук, А. П. Рашепкін**

Інститут електродинаміки Національної академії наук України  
просп. Перемоги, 56, Київ, 03680, Україна. E-mail: dep7ied@ukr.net

Потужні кульові барабанні млини широко використовують для подрібнення руди гірських порід, а також для подрібнення вугілля перед подачею до камери згоряння на теплових електростанціях. Для приведення млинів у дію застосовується електропривод із використанням зубчастої пари – ведучого валу та зубчастого вінця. Існуючий безредукторний привод кільцевого виконання, що не містить зубчастої пари, через високу вартість не знайшов застосування в кульових барабанних млинах. Торцеві дугостаторні асинхронні двигуни з дисковим неферромагнітним ротором дозволяють позбутися головних недоліків, що присутні в існуючому електроприводі кульових барабанних млинів. У даній роботі запропоновано аналітичний метод розрахунку магнітного поля, усередненого по висоті повітряного проміжку торцевого дугостаторного асинхронного двигуна з неферромагнітним дисковим ротором. Метод розроблено шляхом застосування інтегральних перетворень рівнянь електромагнітного поля, використання якого дозволить врахувати скінченну радіальну ширину ротора, характер розподілу обмоток, лінійну швидкість обертання ротора й лобові частини обмоток статорів. Використовуючи метод розрахунку, можна розрахувати магнітне поле торцевого дугостаторного асинхронного двигуна з дисковим ротором як для статорів дугового виконання з розімкненим магнітопроводом, так і з кільцевими статорами з магнітопроводом замкнутого типу.

**Ключові слова:** математична модель, торцевий дугостаторний двигун.

### МЕТОД РАСЧЕТА УСРЕДНЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ВЫСОТЕ ВОЗДУШНОГО ПРОМЕЖУТКА ТОРЦЕВОГО ДУГОСТАТОРНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

**А. Н. Карлов, И. П. Кондратенко, Р. С. Крищук, А. П. Рашепкин**

Институт электродинамики Национальной академии наук Украины  
просп. Победы, 56, Киев, 03680, Украина. E-mail: dep7ied@ukr.net

Мощные шаровые барабанные мельницы широко используют для измельчения руды горных пород, а также для измельчения угля перед подачей в камеру сгорания на тепловых электростанциях. Для приведения мельниц в действие применяется электропривод с использованием зубчатой пары – ведущего вала и зубчатого венца. Существующий безредукторный привод кольцевого исполнения, который не содержит зубчатой пары, из-за высокой стоимости не нашел применения в шаровых барабанных мельницах. Торцевые дугостаторные асинхронные двигатели с дисковым неферромагнитным ротором позволят избежать главных недостатков, которые присутствуют в существующем электроприводе шаровых барабанных мельниц. В данной работе предлагается аналитический метод расчета магнитного поля, усредненного по высоте немагнитного промежутка торцевого дугостаторного асинхронного двигателя с неферромагнитным дисковым ротором. Метод разработан путем применения интегральных преобразований уравнений электромагнитного поля. Использование его позволит учесть конечную радиальную ширину ротора, характер распределения обмоток, линейную скорость вращения ротора и лобовые части обмоток статоров. Используя метод расчета, можно рассчитать магнитное поле торцевого дугостаторного асинхронного двигателя как для статоров дугового исполнения с разомкнутым магнітопроводом, так и с кольцевыми статорами с магнітопроводом замкнутого типа.

**Ключевые слова:** математическая модель, торцевой дугостаторный двигатель.

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ.** Барабанні млини – це електромеханічні пристрої, які здійснюють подрібнення корисних копалин і застосовуються на гірничо-збагачувальних комбінатах, теплових електростанціях, цементних заводах тощо.

Для приведення в дію барабанних млинів дотепер застосовують технологію, що базується на зубчастій парі вал–вінець і характеризується труднощами в обслуговуванні [1]. Проте уже давно відомі безредукторні приводи, в яких барабан млина виконує також функцію ротора, а статор може бути як традиційного виконання (кільцевий), так і сегментного (дуговий статор). Використання кільцевого приводу вимагає значних капіталовкладень, а дугостаторний привод не знайшов широкого використання через велику силу одностороннього магнітного тяжіння.

Цих недоліків позбавлений торцевий дугостаторний асинхронний двигун (ТДАД) із дисковим неферромагнітним ротором (рис. 1). Такі двигуни ще недостатньо вивчені, але застосування їх як безредукторного електроприводу для барабанних млинів дозволить позбутися головних недоліків існуючого приводу, тому дослідження ТДАД є актуальним завданням.

Для розрахунку таких двигунів використовують схеми заміщення  $\dot{E} - \dot{H}$  чотириполюсників, аналітичні методи на основі теорії поля, деталізовані магнітні й електричні схеми заміщення, чисельні методи кінцевих різниць (МКР) та кінцевих елементів (МКЕ).

При розрахунку ТАД, використовуючи метод  $\dot{E} - \dot{H}$  чотириполюсників, виконується допущення

щодо заміни класичної зубцево-пазової структури статора еквівалентним за електромагнітними властивостями активним розподіленим шаром (АРШ). Теорія  $\dot{E} - \dot{H}$  чотириполосників, яку активно використовують дотепер, дуже добре розвинута в роботах [2, 3]. Основні допущення, що приймаються при розрахунках: поле двовимірне й симетричне по осі, торцевий асинхронний двигун (ТАД) ділиться на конструктивні зони (ярма статора й ротора, зубцево-пазові зони, немагнітний проміжок), параметри яких визначають за рівняннями Максвелла. При цьому зубчастість статора й ротора враховується загальноприйнятими коефіцієнтами, втрати в сталі враховуються в кінцевих виразах балансу потужності, для кожної зони користуються усередненими параметрами. Джерелом обертового поля виступає стороння густина синусоїдного струму статора, швидкість обертання враховано коефіцієнтом ковзання  $s$ .

При розрахунку за методом деталізованих магнітних й електричних схем заміщення для ТАД [4] вводиться поняття ідеальної моделі, машину також ділять на конструктивні зони, що розбиваються по радіусу та окружності на рівні частини, які замінюють еквівалентними параметрами й таким чином створюють двовимірну магнітну схему заміщення.

При розрахунках за теорією поля [5] струми приймаються рівномірно розподіленими по перерізу провідників, поле двовимірне, квазістаціонарне. Задачу вирішують ітераційним методом, що потребує додаткових ресурсів для здійснення розрахунку, створює додаткові похибки. Напруженість магнітного поля знаходиться методом накладання.

Також відомі Т- та Г-подібні схеми заміщення в класичній теорії електричних машин. Їх синтезують, спираючись на закони магнетизму в інтегральній формі, а тоді трансформують у закони Кірхгофа для магнітного кола.

На основі методу деталізованих схем заміщення відхилення розрахунків від експерименту для ТАД не перевищує 6 %, для класичних Т-подібних схем заміщення з урахуванням поправочних коефіцієнтів – 12 %, тоді як при розрахунках по середній лінії за допомогою традиційних методик (метод розрахунку електричних машин традиційного виконання) похибка зростає до 25–35 % [4].

Методи кінцевих різниць та кінцевих елементів отримали широке застосування через свою простоту алгоритму та універсальність, але при використанні МКР виникають певні труднощі в описі границь розділу середовищ, оскільки похідні, що входять до рівнянь, можуть там не існувати.

МКЕ набув більшого використання. При розрахунках не враховуються несуттєві конструктивні деталі, нехтують струмами в заокругленнях котушок. Для розрахунків за допомогою МКЕ були розроблені спеціальні програми, такі як Comsol, ANSYS. Часто при використанні МКЕ для розрахунків складних моделей із мінімальними похибками

не вистачає обчислювальних потужностей електронних обчислювальних машин (ЕОМ).

МКР та МКЕ недоцільно застосовувати при розробках та наукових дослідженнях принципово нових електричних машин. Щоразу при зміні конструкції електричної машини необхідно будувати нову модель, тому виникають труднощі при дослідженні залежності енергетичних параметрів від конструктивного виконання. Такі методи доцільно використовувати для інженерних розрахунків.

Запропонована машина (ТДАД з дисковим ротором) потребує врахування азимутальної складової струму ротора та лінійної швидкості обертання, що залежить від радіального напрямку. У запропонованому нами методі розрахунку такі вимоги враховано.

Метою даного дослідження є розробка аналітичного метода розрахунку електромагнітного поля, усередненого по висоті повітряного проміжку ТДАД, з урахуванням лінійної швидкості обертання ротора й лобових частин обмоток статорів.

**МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.**  
На рис. 1 зображено схему ТДАД у циліндричній системі координат, де  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  – радіальна, азимутальна та аксіальна координати відповідно. Ротор має форму диска товщиною  $h$  із неферромагнітного електропровідного матеріалу. По обидві сторони від ротора розміщуються статори, між якими знаходиться немагнітний проміжок висотою  $d$ .

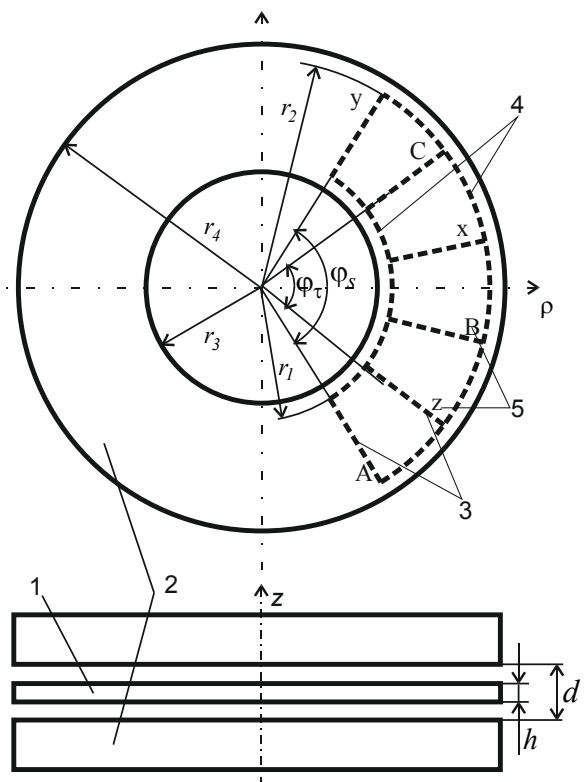


Рисунок 1 – Схема ТДАД з однією парою полюсів: 1 – ротор; 2 – статор; 3 – струми пазів; 4 – струми лобових частин обмотки; 5 – позначення фази та напрямку струму

Розподіл магнітного поля в немагнітному проміжку описується системою рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1)$$

і матеріальними рівняннями

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2)$$

де  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$  – вектори відповідно напруженості магнітного й електричного полів, вектори індукції магнітного поля й густини струму;  $\mu$  – магнітна проникність;  $\sigma$  – питома електрична провідність;  $\vec{v}$  – вектор швидкості ротора відносно статора;  $t$  – час.

Магнітопроводи статорів із нескінченно великою магнітною проникністю умовно розширені по радіальній координаті до розмірів ротора та до  $2\pi$  по координаті  $\varphi$  (рис. 1). Магнітна проникність ротора приймається рівною магнітній постійній  $\mu_0$ .

Обмотка двигуна трифазна, одношарова, розміщена в пазах і надана у вигляді зосереджених на поверхні магнітопроводів без пазів імпульсних функцій, розміщення яких співпадає із серединами реальних пазів статора та його лобових частин (рис. 1). Обмотки верхнього й нижнього статорів увімкнені узгоджено. Струм в обмотках вважається заданим і змінюється за гармонійним законом.

Оскільки ротор неферомагнітний, його магнітна проникність приймається рівною проникності повітря, тому в даній роботі для спрощення розрахунків виконано розрахунок усередненого значення індукції по висоті повітряного проміжку  $d$ .

Оскільки координата  $z$  співпадає з напрямком висоти повітряного проміжку  $d$ , то складові усередненої індукції  $B_\rho$  та  $B_\varphi$  не матимуть суттєвого впливу на усереднене результуюче значення індукції, а тому не розглядаються.

Застосувавши матеріальні рівняння (2) до першого рівняння системи (1), маємо

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3)$$

після чого виконаємо операцію ротор  $z$  складової –  $\operatorname{rot}_z$ :

$$\operatorname{rot}_z \operatorname{rot} \vec{B}_z = -\mu \sigma \frac{\partial B_z}{\partial t} + \mu \sigma \operatorname{rot}_z (\vec{v} \times \vec{B}_z). \quad (4)$$

Оскільки диск ротора машини обертається тільки в напрямку азимутальної координати, приймаємо в (4) швидкість  $\vec{v}$  по координатах  $z$  та  $\rho$  рівною нулю. Тоді залишиться лише  $v_\varphi$  складова швидкості, яка є швидкістю обертання ротора.

Виконавши операцію  $\operatorname{rot}$  у (4), отримаємо аналітичний вираз для  $B_z$  складової індукції магнітного поля в циліндричній системі координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \\ = \mu \sigma \left[ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки машина асинхронна, магнітне поле статора буде дещо випереджати швидкість ротора за таким співвідношенням:

$$v_\varphi = v_s (1 - s), \quad (6)$$

де  $s$  – ковзання;  $v_s$  – швидкість обертання магнітного поля статора ( $v_s = 2f\tau$ );  $f$  – частота струму в мережі;  $\tau$  – полюсне ділення, що залежить від радіальної координати:

$$\tau = \frac{\pi \rho C_s}{p}, \quad (7)$$

де  $p$  – число пар полюсів;  $C_s$  – коефіцієнт, який показує відношення кута дуги статора  $\varphi_s$  (рис. 1) до

величини повного кола ( $C_s = \frac{\varphi_s}{2\pi}$ ). Якщо статор займає всю окружність ротора, то  $C_s = 1$ .

Таким чином, лінійна швидкість обертання ротора є функцією від радіальної координати:

$$v_\varphi = \omega \frac{C_s \rho}{p} (1 - s), \quad (8)$$

де  $\omega = 2\pi f$  – циклічна (кутова) частота.

Лінійність рівняння (5) і залежність індукції від струму обмотки з циклічною частотою  $\omega$ , а також з урахуванням лінійної швидкості ротора (8), рівняння (5) запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \rho} - i\mu\sigma\omega B_z - \\ - C_s \frac{\omega}{p} (1 - s) \mu \sigma \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вираз (9) є диференціальним рівнянням другого порядку, що залежить від трьох змінних циліндричної системи координат  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Щоб знайти розподіл магнітного поля в немагнітному проміжку, застосуємо інтегральні перетворення з умовами періодичності по координаті  $\varphi$  [6] та усередненням по координаті  $z$ . Таким чином, в отриманому виразі (9) наявна залежність від однієї змінної, після чого, виконавши нескладні обернені перетворення, отримаємо розв'язок диференціального рівняння.

Будемо вважати, що між верхнім і нижнім індукторами встановлено магнітний шунт із нескінченною магнітною проникністю. Тоді на границях  $\rho = r_3$  і  $\rho = r_4$  маємо

$$B_z = 0. \quad (10)$$

Оскільки в азимутальному напрямку рівняння (9) змінюється періодично з періодом  $T = 2\pi$ , як граничну умову по координаті  $\varphi$  приймаємо умову періодичності.

Граничні умови на границях  $\pm d/2$  (рис. 1) визначені для верхнього або нижнього статора за теоремою Стокса:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{s}, \quad (11)$$

де напруженість магнітного поля та густина струму розглядається за радіальною та азимутальною координатами.

З урахуванням нескінченно великої магнітної проникності магнітопроводів та за умови зосереджених на поверхні магнітопроводів без пазів струмових шарів, за виразом (11) виконуються умови  $H_\rho^\pm = \mp i_\varphi$  та  $H_\varphi^\pm = \pm i_\rho$ , де  $H_\rho^\pm$ ,  $H_\varphi^\pm$  – компоненти напруженості магнітного поля зі сторони повітряного проміжку на границі розділу повітря й феромагнітних магнітопроводів при  $z = \pm d/2$  (рис. 1);  $i_\rho$ ,  $i_\varphi$  – складові лінійної густини струму. Таким чином, з урахуванням рівняння (2) маємо граничну умову на границях розділу магнітопроводів та повітряного зазору:

$$B_\rho^\pm = \mp \mu_0 i_\varphi; \quad B_\varphi^\pm = \pm \mu_0 i_\rho. \quad (12)$$

Оскільки  $B_z$  складову індукції магнітного поля прийнято періодичною й монотонною в межах зазору, до неї можна застосувати дискретне перетворення Фур'є по координаті  $\varphi$  [6] з ядром  $\frac{1}{2\pi} e^{in\varphi}$ :

$$\hat{B}_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_z e^{in\varphi} d\varphi, \quad (13)$$

де  $n$  – параметр перетворення Фур'є.

Застосуємо перетворення (13) для виразу (9). Таким чином ми зможемо спростити диференціальне рівняння до двох змінних. Над членами виразу (9), що мають частинні похідні по радіальній та аксіальній координатах ( $\rho$  та  $z$ ), виконується проста заміна  $B_z \rightarrow \hat{B}_z$ . Над членами з частинною похідною від азимутальної координати  $\varphi$  застосовується інтегральне перетворення (13). Таким чином ми прийдемо до диференціального рівняння з двома змінними:

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_z}{\partial \rho^2} - \frac{n^2}{\rho^2} \hat{B}_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial \rho} - i\mu\sigma\omega \hat{B}_z + \frac{i\omega\mu\sigma C_s(1-s)}{\rho} \hat{B}_z = -\frac{\partial^2 \hat{B}_z}{\partial z^2}. \quad (14)$$

Для того, щоб спростити диференціальне рівняння (14) до залежності від радіальної координати, виконаємо усереднення магнітного поля по всій висоті повітряного проміжку, оскільки за умовою диск ротора прийнято неферомагнітним:

$$\bar{B}_z = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \hat{B}_z dz, \quad (15)$$

після чого рівняння (14) запишемо наступним чином, позначивши праву частину літерою  $F$ :

$$\frac{\partial^2 \bar{B}_z}{\partial \rho^2} - \frac{n^2}{\rho^2} \bar{B}_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \rho} - i\mu\sigma\omega \frac{h}{d} \left( 1 - \frac{n C_s (1-s)}{p} \right) \bar{B}_z = F, \quad (16)$$

де

$$F = -\frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\partial^2 \hat{B}_z}{\partial z^2} dz. \quad (17)$$

Таким чином отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з усередненим по висоті повітряного проміжку індукції магнітного поля з урахуванням товщини  $h$  електропровідного диску.

Запишемо неоднорідне рівняння Бесселя (16) у формі

$$\frac{\partial^2 \bar{B}_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \rho} + \left[ \lambda^2 - \left( \frac{n}{\rho} \right)^2 \right] \bar{B}_z = F, \quad (18)$$

де

$$\lambda = \sqrt{-i\mu_0\sigma\omega \frac{h}{d} \left( 1 - \frac{n C_s (1-s)}{p} \right)}. \quad (19)$$

Тепер виконаємо усереднення магнітного поля за (17) із застосуванням умови симетрії відповідно до (12):

$$\left. \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z} \right|_{d/2} = -\left. \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z} \right|_{-d/2}; \quad F = -\frac{2}{d} \left. \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z} \right|_{d/2}. \quad (20)$$

Величину  $\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}$  знайдемо з  $\text{div} \hat{B}_z = 0$  та з граничних умов (12) на границі  $z = d/2$ :

$$\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\varphi) = -\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial i_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho i_\varphi). \quad (21)$$

Із закону неперервності струму  $\text{div} \vec{i} = 0$ , з урахуванням за умовою  $i_z = 0$ , отримаємо

$$i_\varphi = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\pi}^{\varphi} i_\rho d\varphi. \quad (22)$$

При застосуванні до (21) залежності (22) та дискретного перетворення Фур'є для струмового навантаження по координаті  $\varphi$

$$\hat{i}_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_\rho e^{in\varphi} d\varphi \quad (23)$$

права частина (20) рівняння Бесселя (18) запишеться у вигляді

$$F = -\frac{2\mu_0}{ind} \left[ f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) - \frac{n^2}{\rho^2} f(\rho) \right], \quad (24)$$

де  $f(\rho) = \rho \hat{i}_\rho$ ;  $\hat{i}_\rho$  – перетворене за (23) значення лінійного струмового навантаження.

Лінійне струмове навантаження (у вигляді зосереджених на поверхні магнітопроводів без пазів дельта-функцій Дірака) для фази  $A$  задається у вигляді

$$i_{p(A)} = I_A w \Theta_\rho \sum_{k=1}^q \sum_{s=1}^p \left\{ \delta \left[ \rho (\phi + p\phi_\tau - \phi_A - T(k,s)) \right] - \delta \left[ \rho (\phi + p\phi_\tau - \phi_A - T(k,s) - \phi_\tau) \right] \right\}, \quad (25)$$

де  $T(k,s) = \frac{2k-1}{2mq} \varphi_\tau + 2(s-1)\varphi_\tau$ ;  $I_A$  – струм фази  $A$ ;

$I_A = I_m e^{i\omega t}$ ;  $I_m$  – амплітуда струму;  $w$  – кількість елементарних провідників у пазу;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака;  $m$  – кількість фаз;  $\varphi_A$  – початкова координата фази  $A$ , яка прийнята рівною нулю ( $\varphi_A = 0$ );  $\Theta_\rho = [\Theta(\rho - r_1) - \Theta(\rho - r_2)]$ ;  $\Theta(\cdot)$  – одинична узагальнена функція;  $q$  – кількість пазів на полюс-фазу.

Для фаз  $B$  і  $C$  лінійне струмове навантаження  $i_{p(B)}$  обчислюється аналогічно, виконуючи заміну у (25):

$$i_{p(B)} = i_{p(A)} (\phi_A \rightarrow \phi_B, I_A \rightarrow I_B); \quad (26)$$

$$i_{p(C)} = i_{p(A)} (\phi_A \rightarrow \phi_C, I_A \rightarrow I_C),$$

де  $\varphi_B = \varphi_A + \frac{2}{m} \varphi_\tau$ ;  $\varphi_C = \varphi_A + \frac{1}{m} \varphi_\tau$ ;  $I_B = I_A e^{-i\frac{2}{m}\pi}$ ;  
 $I_C = I_A e^{i\frac{2}{m}\pi}$ .

Таким чином, щоб отримати перетворене значення розподілу магнітної індукції в немагнітному проміжку, необхідно знайти лінійне струмове навантаження трифазної обмотки з  $p$  парами полюсів та  $q$  пазами на полюс-фазу.

Для фази  $A$   $\hat{i}_\rho$  записується у вигляді

$$\hat{i}_{\rho(A)} = \frac{I_A N K_A \Theta_\rho}{2\pi\rho}, \quad (27)$$

де  $N$  – кількість витків на одну фазу ( $N = wqp$ );

$$K_A = K_1 e^{in\varphi_A} = e^{-in\varphi_\tau + in\frac{1}{2m}\varphi_\tau} (1 - e^{in\varphi_\tau}) \times \left[ \frac{\sin(np\varphi_\tau)}{p \sin(n\varphi_\tau)} \frac{\sin(n\varphi_\tau/2m)}{q \sin(n\varphi_\tau/2mq)} \right] e^{in\varphi_A} \quad (28)$$

– обмотковий коефіцієнт фази  $A$  (при  $\varphi_A = 0$ ,  $K_A = K_I$ ).

Для знаходження перетвореного значення складової лінійного струмового навантаження фаз  $B$  і  $C$ , виконаємо заміну у (27) і (28):

$$\hat{i}_{\rho(B)} = \hat{i}_{\rho(A)} (I_A \rightarrow I_B, K_A \rightarrow K_B); \quad (29)$$

$$\hat{i}_{\rho(C)} = \hat{i}_{\rho(A)} (I_A \rightarrow I_C, K_A \rightarrow K_C),$$

де  $K_B$ ,  $K_C$  – обмоткові коефіцієнти відповідно до  $B$  та  $C$  фази:

$$K_B = K_A (\phi_A \rightarrow \phi_B); \quad (30)$$

$$K_C = K_A (\phi_A \rightarrow \phi_C),$$

де стрілками « $\rightarrow$ » позначено заміну у виразі (28).

Лінійне струмове навантаження індуктора, що складається від дії усіх трьох фаз, описується виразом

$$\hat{i}_\rho = \frac{N \Theta_\rho}{2\pi\rho} (I_A K_A + I_B K_B - I_C K_C), \quad (31)$$

де знак « $\leftarrow$ » перед третім членом чисельника впливає внаслідок оберненого розміщення початку й кінця витків обмотки фази  $C$  (рис. 1).

Отже, функція  $f(\rho)$  запишеться наступним чином:

$$f(\rho) = \frac{N \Theta_\rho}{2\pi} (I_A K_A + I_B K_B - I_C K_C). \quad (32)$$

Загальне рішення однорідного рівняння Бесселя (18) (при  $F = 0$ ) відоме [7] і має вигляд:

$$\hat{B}_z(\rho) = C_1 J_n(\lambda\rho) + C_2 Y_n(\lambda\rho), \quad (33)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – довільні постійні;  $J_n(\cdot)$  – функція Бесселя першого роду;  $Y_n(\cdot)$  – функція Бесселя другого роду.

Для розрахунку неоднорідного рівняння Бесселя ( $F \neq 0$ ) використаємо метод варіації постійних [7]. Складемо систему рівнянь із членів розв'язку однорідного рівняння (33):

$$\begin{cases} C_1'(\rho) J_n(\lambda\rho) + C_2'(\rho) Y_n(\lambda\rho) = 0; \\ C_1'(\rho) J_n'(\lambda\rho) + C_2'(\rho) Y_n'(\lambda\rho) = F, \end{cases} \quad (34)$$

де  $C_1(\rho)$  і  $C_2(\rho)$  – параметри  $C_1$  і  $C_2$  (33) як функції від змінної  $\rho$ .

Вирішуючи систему рівнянь (34), знаходимо похідні  $C_1'(\rho)$  і  $C_2'(\rho)$ , а тоді й самі функції  $C_1(\rho)$  і  $C_2(\rho)$ :

$$C_1(\rho) = - \int_{r_3}^{\rho} \frac{Y_n(\lambda\rho) F}{W[J_n(\lambda\rho), Y_n(\lambda\rho)]} d\rho + A_1; \quad (35)$$

$$C_2(\rho) = \int_{r_3}^{\rho} \frac{J_n(\lambda\rho) F}{W[J_n(\lambda\rho), Y_n(\lambda\rho)]} d\rho + A_2, \quad (36)$$

де  $A_1$ ,  $A_2$  – постійні інтегрування;  $W[J_n(\lambda\rho), Y_n(\lambda\rho)]$  – визначник Вронського від Бесселевих функцій, значення якого становить [8]:

$$W[J_n(\lambda\rho), Y_n(\lambda\rho)] = \frac{2}{\pi\rho}. \quad (37)$$

Загальне рішення неоднорідного рівняння (18) ( $F \neq 0$ ) запишемо виразом

$$\hat{B}_z(\rho) = C_1(\rho) J_n(\lambda\rho) + C_2(\rho) Y_n(\lambda\rho) = A_1 J_n(\lambda\rho) + A_2 Y_n(\lambda\rho) + D(\lambda\rho), \quad (38)$$

де  $D(\lambda\rho)$  – частинне рішення неоднорідного рівняння.

Підставляючи вирази (35) і (36) у (38), частинне рішення неоднорідного рівняння (18) матиме вигляд:

$$D(\lambda\rho) = -\frac{\mu\pi}{ind} \left[ Y_n(\lambda\rho) \int_{r_3}^{\rho} J_n(\lambda\rho) (f'(\rho) + \rho f''(\rho) - \frac{n^2}{\rho} f(\rho)) d\rho - J_n(\lambda\rho) \int_{r_3}^{\rho} Y_n(\lambda\rho) \times \right. \\ \left. \times (f'(\rho) + \rho f''(\rho) - \frac{n^2}{\rho} f(\rho)) d\rho \right]. \quad (39)$$

Позбувшись похідних  $f(\rho)$  функцій методом інтегрування частинами, приведемо вираз (39) до наступного виду:

$$D(\lambda\rho) = \frac{\mu\pi}{ind} \left[ \lambda^2 Y_n(\lambda\rho) \int_{r_3}^{\rho} \rho J_n(\lambda\rho) f(\rho) d\rho - \lambda^2 J_n(\lambda\rho) \int_{r_3}^{\rho} \rho Y_n(\lambda\rho) f(\rho) d\rho - \frac{2}{\pi} f(\rho) \right]. \quad (40)$$

Розписавши за (32) функцію  $f(\rho)$ , рішення рівняння (38) запишеться наступним чином:

$$\hat{B}_z(\rho) = J_n(\lambda\rho) A_1 + Y_n(\lambda\rho) A_2 + \frac{\mu\lambda^2 \hat{i}_{\rho 1}}{2ind} \left[ Y_n(\lambda\rho) \int_{r_3}^{\rho} \rho J_n(\lambda\rho) \Theta_{\rho} d\rho - J_n(\lambda\rho) \int_{r_3}^{\rho} \rho Y_n(\lambda\rho) \Theta_{\rho} d\rho - \frac{2}{\lambda^2 \pi} \Theta_{\rho} \right], \quad (41)$$

де  $\hat{i}_{\rho 1} = N(I_A K_A + I_B K_B - I_C K_C)$ .

Із застосуванням граничних умов (10) до (41) знайдемо постійні інтегрування:

$$A_1 = \frac{\mu\lambda^2 \hat{i}_{\rho 1}}{2ind} \int_{r_1}^{r_2} \rho (J_n(\lambda r_4) Y_n(\lambda r_3) Y_n(\lambda\rho) - Y_n(\lambda r_4) Y_n(\lambda r_3) J_n(\lambda\rho)) d\rho / \quad (42)$$

$$/ [J_n(\lambda r_4) Y_n(\lambda r_3) - J_n(\lambda r_3) Y_n(\lambda r_4)]; \\ A_2 = \frac{\mu\lambda^2 \hat{i}_{\rho 1}}{2ind} \int_{r_1}^{r_2} \rho (J_n(\lambda r_4) J_n(\lambda r_3) Y_n(\lambda\rho) - Y_n(\lambda r_4) J_n(\lambda r_3) J_n(\lambda\rho)) d\rho / \quad (43) \\ / [Y_n(\lambda r_4) J_n(\lambda r_3) - Y_n(\lambda r_3) J_n(\lambda r_4)].$$

Отже, підставляючи постійні інтегрування (42), (43) у рішення (41), отримаємо перетворене значення індукції  $\hat{B}_z$ . Обернене перетворення виконується рядом

$$B_z(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{B}_z e^{-in\phi}. \quad (44)$$

Таким чином, для попередньо заданих конструктивних розмірів двигуна і його обмоткових параметрів може бути визначений шуканий розподіл магнітного поля.

За розробленим методом розрахунку в програмному пакеті Wolfram Mathematica виконано обчислення розподілу магнітного поля в зазорі ТДАД для числа полюсів  $2p = 6$  та розміщенням активної

зони на половині кола зазору машини –  $C_s = 1/2$ . Задано такі габаритні розміри:  $r_1 = 2,2 м$ ;  $r_2 = 2,6 м$ ;  $r_3 = 2,0 м$ ;  $r_4 = 2,8 м$ . Висота зазору та товщина диска ротора відповідно  $d = 0,01 м$  та  $h = 0,004 м$ . Електропровідність ротора –  $\sigma = 1 \times 10^5 С м / м$ . Трифазна обмотка виконана на  $w = 50$  витків для діючого значення фазного струму  $I_{\phi} = 30 А$ , число пазів на полюс-фазу –  $q = 1$ . Розрахунок виконано для початкового моменту часу.

В обмотковому коефіцієнті (28) при деяких гармоніках у множнику  $\frac{\sin(n\rho\phi_{\tau})}{p \sin(n\phi_{\tau})}$  виконується ділення на нуль, тому прийнято рішення замінити його на суму:

$$K_1 = e^{-in\phi_{\tau} + in\frac{1}{2m}\phi_{\tau}} (1 - e^{in\phi_{\tau}}) \times \sum_{s=1}^p \left( \frac{e^{i2n(s-1)\phi_{\tau}}}{p} \right) \frac{\sin(n\phi_{\tau}/2m)}{q \sin(n\phi_{\tau}/2mq)}. \quad (45)$$

Параметром  $n$  в оберненому перетворенні (44) визначаються гармоніки магнітного поля. Надавання нескінченного значення параметру  $n$  призводить до значної тривалості обчислення, тому, варіюючи різну кількість пар полюсів, встановлено, що для достовірності отриманих даних необхідно враховувати щонайменше шестикратну кількість гармонік відносно кількості пар полюсів. Отже, для вибраної кількості пар полюсів ( $p = 3$ ) доцільно вибрати  $n = [-18; 18]$  у сумі оберненого перетворення (44).

Останнім членом виразу (41) описується первинне магнітне поле – поле, що створене обмоткою статора, яке із застосуванням оберненого перетворення (44) буде описуватись рівнянням

$$B_{z_1}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{ind\pi} \hat{i}_{\rho 1} \Theta_{\rho} e^{-in\phi}. \quad (46)$$

Іншими членами виразу (41) описано вторинне магнітне поле – поле ротора, яке із застосуванням оберненого перетворення (44) має вигляд:

$$B_{z_2}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [J_n(\lambda\rho) A_1 + Y_n(\lambda\rho) A_2 + \frac{\mu\lambda^2 \hat{i}_{\rho 1}}{2ind} \left[ Y_n(\lambda\rho) \int_{\rho} \rho J_n(\lambda\rho) \Theta_{\rho} d\rho - J_n(\lambda\rho) \int_{\rho} \rho Y_n(\lambda\rho) \Theta_{\rho} d\rho \right]] e^{-in\phi}. \quad (47)$$

Для аналізу розробленого методу розрахунок виконувався окремо як для первинного, так і для вторинного магнітного поля.

Труднощі в програмі Wolfram Mathematica виникають при розрахунку за нульовою гармонікою ( $n = 0$ ) з причини неможливості обчислення обмоткового коефіцієнта  $K_1$ : множник  $(1 - e^{in\phi_{\tau}})$  перетво-

рюється в нуль, а у множнику  $\frac{\sin(n\phi_\tau/2m)}{q \sin(n\phi_\tau/2mq)}$  виникає ділення на нуль, тому постає необхідність окремого розрахунку нульової гармоніки як для первинного поля, так і для вторинного. Для цього слід позбутися параметра  $n$  у виразах первинного та вторинного поля алгебраїчними методами, після чого отримаємо вираз первинного поля для нульової гармоніки:

$$B_{z1}|_{n \rightarrow 0} = \frac{-2C_s N \mu_0 I_C \Theta_\rho}{pd} \quad (48)$$

У виразі вторинного поля (47), а також у виразах (42)–(43) множник  $\frac{\mu\lambda^2 \hat{i}_{\rho l}}{2ind}$  після аналітичних перетворень отримає вигляд  $\frac{-\mu\pi\lambda^2 C_s N I_C}{pd}$ .

На рис. 2,а зображено розподіл первинного магнітного поля ТДАД по азимутальній координаті в межах  $[-\pi; \pi]$  при сталому значенні радіальної координати  $\rho = 2,4$  м, обчисленого сумою виразів (46), де  $n \neq 0$ , та (47), де  $n = 0$ .

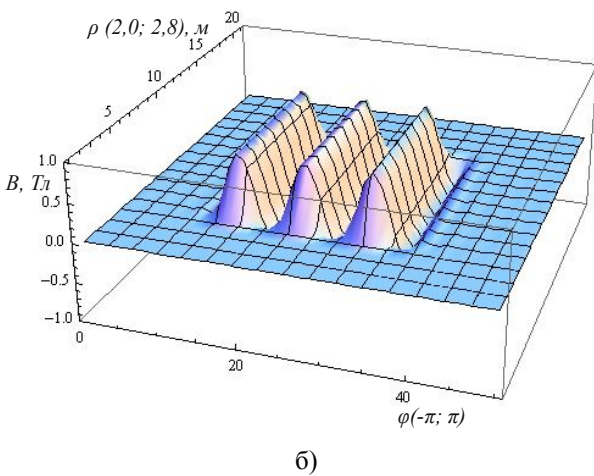
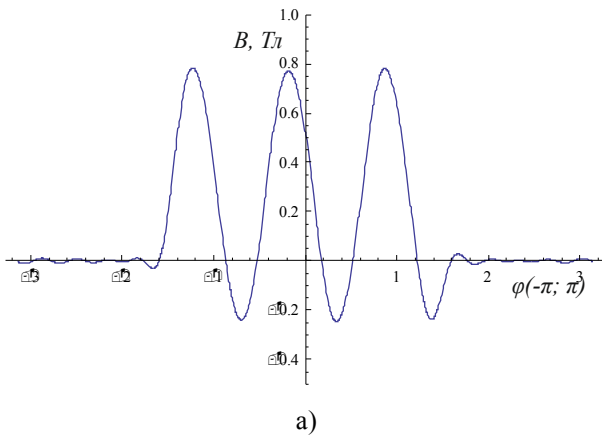


Рисунок 2 – Розподіл первинного поля в немагнітному проміжку ТДАД: а) розподіл поля через активну зону по азимутальній координаті; б) розподіл поля по всій площині повітряного зазору

Магнітне поле в активній зоні повітряного зазору описується синусоїдою, амплітуда якої складає 0,5 Тл. За межами активної зони індукція набуває значення нуля. Графік індукції зміщений угору на 0,25 Тл з причини того, що обмотка не компенсована, й тому в зазорі існує пульсуюче магнітне поле величиною 0,25 Тл.

На рис. 2,б пропонується до уваги розподіл первинного поля ТДАД у вигляді тривимірної моделі. Посередині графіка зображено синусоїду, яка розміщується в активній зоні повітряного зазору й змінюється періодично по азимутальній координаті. За межами активної зони індукція первинного магнітного поля зводиться до нуля.

На рис. 3 зображено розмагнічуючу дію вторинного поля (поле ротора) по радіальній координаті при  $\phi = -0,5\phi_\tau$  (в активній зоні повітряного зазору). На верхньому та нижньому радіусі ротора магнітне поле плавно переходить до нуля.

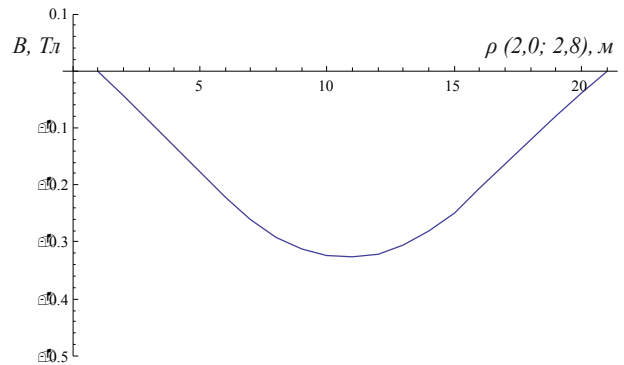


Рисунок 3 – Розмагнічуюча дія вторинних струмів.

На рис. 4 пропонується до уваги порівняльна характеристика первинного та вторинного поля. Позицією 1 показано первинне поле, 2 та 3 – вторинне поле струмів ротора відповідно для  $s = 0,1$  та  $s = 0,4$ . З рис. 4 чітко видно, що при збільшенні ковзання струми ротора зростають, і ми спостерігаємо чітку синусоїду. Розмагнічувальна характеристика зміщена вниз відносно первинного магнітного поля, оскільки вона є протидіючою.

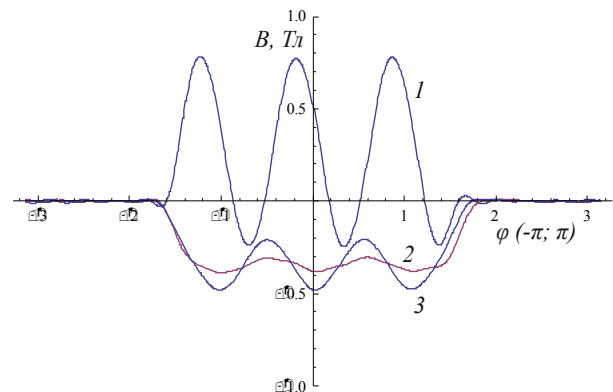
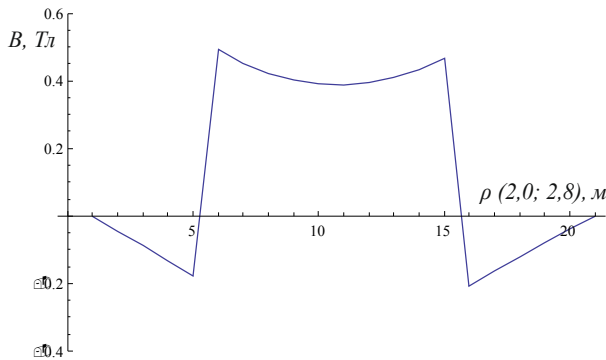
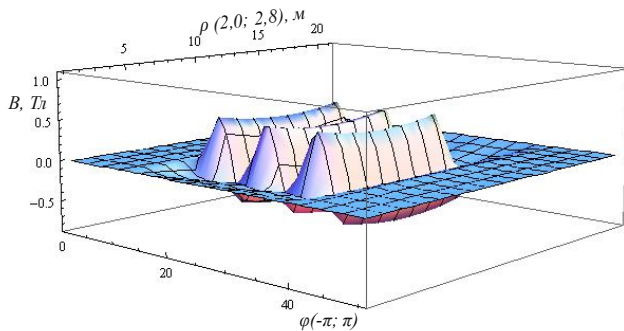


Рисунок 4 – Порівняльна характеристика первинного та вторинного поля: 1 – первинне поле; 2 – вторинне поле ( $s = 0,1$ ); 3 – вторинне поле ( $s = 0,4$ )

На рис. 5,а показано розподіл результуючого магнітного поля ТДАД по координаті  $\rho$  при  $\phi = -0,5\phi_r$ , де чітко видно підйом індукції від п'ятої поділки до 16-ої по радіальній координаті, що обумовлено стрибком первинного магнітного поля в межах активної зони статора. Також має вплив розмагнічуюча дія магнітного поля ротора у вигляді увігнутої лінії в межах активної зони, а також у вигляді спадання індукції до від'ємного значення поза межами активної зони. На границях ротора по радіальній координаті магнітне поле спадає до нуля, як і було вказано в граничній умові (10).



а)



б)

Рисунок 5 – Розподіл магнітного поля ТДАД у зазорі: а) розподіл результуючого поля через активну зону по радіальній координаті; б) розподіл поля по всій площині повітряного зазору

По азимутальній координаті магнітне поле поза межами активної зони дорівнює нулю. У межах активної зони розташована синусоїда результуючого магнітного поля. На синусоїду впливає вторинне магнітне поле (поле ротора) у вигляді розмагнічуючої дії за всією шириною ротора ( $\rho(2,0-2,8) \text{ м}$ ). На границях ротора магнітне поле дорівнює нулю, оскільки за умовою (10) верхній та нижній статори з'єднані між собою шунтом із нескінченною магнітною проникністю.

**ВИСНОВКИ.** Розроблений метод розрахунку дозволяє знайти розподіл індукції магнітного поля, усередненої по висоті зазору ТДАД за заданими значеннями конструктивних розмірів, числа витків і величини струму в обмотці. Отримані результати дозволяють розрахувати торцеві асинхронні двигуни з дисковим ротором як з дуговими статорами, так і з кільцевими.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Фридкин П.А. Безредукторный дугостаторный электропривод. – М.: Энергия, 1970. – 138 с.
2. Инкин А.И. Синтез Е-Н звеньев и цепных схем замещения электрических машин. – В кн. «Электрические беспазовые машины переменного тока». – Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1973. – Вып. 4. – С. 107–113.
3. Инкин А.И., Литвинов Б.В. Электромагнитное поле в активном объеме трехфазного торцевого асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором // Электричество. – 1974. – Вып. 9. – С. 47–53.
4. Власов В.В., Сарапулов Ф.Н., Урманов Ю.Р. Математическая модель торцевого асинхронного двигателя с биметаллическим ротором // Электричество. – 1992. – Вып. 7. – С. 37–41.
5. Игнатов В.А. Вильданов К.Я. Торцевые асинхронные электродвигатели интегрального изготовления. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 304 с.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
8. Балакин А.Б. Три лекции по теории функций Бесселя: учебно-методическое пособие. – Казань: Казанский государственный университет, 2009. – 39 с.

#### METHOD FOR CALCULATING THE AVERAGED OVER NONMAGNETIC GAP MAGNETIC FLUX DENSITY OF THE AXIAL INDUCTION MOTOR WITH DISCONNECTED MAGNETIC CONDUCTOR

**O. Karlov, I. Kondratenko, R. Kryshchuk, A. Rashchepkin**

Institute of Electrodynamics of National Academy of Sciences of Ukraine  
prosp. Peremohy, 56, Kyiv, 03680, Ukraine. E-mail: dep7ied@ukr.net

Powerful tumble ball mill is widely used for crushing ore and for rock crushing of coal in thermal power stations before feeding to combustion chamber. To bring the mills into force electric drive is applied using a gear pair: an input shaft and the ring gear. Existing annular gearless drive does not contain a gear pair, but due to its high cost does not apply to ball mill drums. Axial arc-stator induction motors with a non-ferromagnetic rotor disk avoid the main disadvantages that are present in the existing electric drive ball tumbling mills. In this paper, an analytical method for calculating the magnetic field averaged over the height of the gap of axial arc-stator induction motors with a non-



ferromagnetic rotor disk is proposed. The method is developed by the application of integral transforms to the equations of the electromagnetic field. Using the method allows to take into account the finite radial width of the rotor windings, the distribution pattern of windings, the linear speed of the rotor and the frontal parts of stator windings. Using the method can compute magnetic flux density distribution in the axial induction motors with arc-stators and with circular stators.

**Key words:** mathematical model, the axial arc-stator motor.

## REFERENCES

1. Fridkin, P.A. (1970), *Bezreduktornyi dugostatornyi elektroprivod* [Gearless electric drive with arc-shaped stator], Energiya, Moscow. (in Russian)
2. Inkin, A.I. (1973), *Sintez Ye-N zvenyev i tsepnykh skhem zameshcheniya elektricheskikh mashin* [Synthesis of E-H units and chain of equivalent circuits of electrical machines], Novosibirsk Electrotechnical Institute, Novosibirsk. (in Russian)
3. Inkin, A.I. and Litvinov, B.V. (1974), "The electromagnetic field in the active volume of the three-phase induction motor mechanical squirrel cage", *Elektrichestvo*, Vol. 9, pp. 47–53. (in Russian)
4. Vlasov, V.V., Sarapulov, F.N. and Urmanov, Yu.R. (1992), "Mathematical model of the axial induction motor with rotor bimetallic", *Elektrichestvo*, Vol. 7, pp. 37–41. (in Russian)
5. Ignatov, V.A. and Vildanov, K.Ya. (1988), *Tortsevye asinkhronnye elektrodvigateli integralnogo izgotovleniya* [Axial induction motors integrated manufacturing], Energoatomizdat, Moscow. (in Russian)
6. Koshliakov, N.S., Gliner, E.B. and Smirnov, M.M. (1970), *Uravneniya v chasnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics], Vysshaya shkola, Moscow. (in Russian)
7. Vladimirov, V.S. (1967), *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics], Nauka, Moscow. (in Russian)
8. Balakin, A.B. (2009), "Three lectures of the theory of Bessel functions", *uchebno-metodicheskoye posobiye*, Kazanskiy gosudarstvennyi universytet, Kazan. (in Russian)

Стаття надійшла 08.08.2014.