УДК. 621.313.333

РОЗРАХУНОК МАГНІТНОГО ПОЛЯ У ВЕНТИЛЬНОМУ ЕЛЕКТРОДВИГУНІ ІЗ ЗАКРИТИМИ ПАЗАМИ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОЇ МАГНІТНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. В. Жильцов, В. В. Ликтей
Національний університет біоресурсів і природокористування України
вул. Героїв Оборони, 12, м. Київ, 03057, Україна. E-mail: azhilt@mail.ru

Розрахунок магнітного поля є одним із перспективних шляхів діагностики двигунів, оскільки з ним пов'язані основні процеси в електричних машинах. Розглянуто електричний двигун із неявнополюсним статором і явнополюсним ротором. Особливістю конструкції наданого електродвигуна є наявність тонкої феромагнітної перемички між обмоткою статора й зазором між статором і ротором. При номінальному режимі роботи електродвигуна феромагнітний матеріал, з якого вона виготовлена, входить у стан магнітного насичення. Це необхідно для суттєвого зниження шунтування магнітного потоку струмів статора й постійних магнітів цими перемичками, магнітна проникливість матеріалу яких наближається до значення магнітної проникливості повітря, що робить необхідним урахування нелінійних магнітних характеристик матеріалу при розрахунку середнього моменту двигуна наданої конструкції. На основі методу вторинних джерел розроблено дво- та тривимірну математичні моделі для розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. Перевагою розглянутого методу вторинних джерел є звуження області пошуку невідомих.

Ключові слова: вентильний електродвигун із закритими пазами, магнітостатичне поле, метод вторинних джерел.

РАСЧЁТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕНТИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕ С ЗАКРЫТЫМИ ПАЗАМИ С УЧЁТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. В. Жильцов, В. В. Ликтей
Национальный университет биоресурсов и природоиспользования Украины
ул. Героев Обороны, 12, г. Киев, 03057, Украина. E-mail: azhilt@mail.ru

Расчёт магнитного поля является одним из перспективных путей диагностики двигателей, поскольку с ним связаны основные процессы в электрических машинах. Рассмотрен электрический двигатель с неявнополюсным статором и явнополюсным ротором. Особенностью конструкции представленного электродвигателя является наличие тонкой ферромагнитной перемычки между обмоткой статора и зазором между статором и ротором. При номинальном режиме работы электродвигателя ферромагнитный материал, из которого она изготовлена, входит в состояние магнитного насыщения. Это необходимо для существенного снижения шунтирования магнитного потока токов статора и постоянных магнитов этими перемычками, магнитная проницаемость материала которых приближается к значению магнитной проницаемости воздуха, что делает необходимым учет нелинейных магнитных характеристик материала при расчете среднего момента двигателя представленной конструкции. На основе метода вторичных источников разработаны двух- и трехмерная математические модели для расчёта характеристик магнитного поля в вентильном электродвигателе с закрытыми пазами с учётом нелинейной магнитной характеристики. Преимуществом рассматриваемого метода вторичных источников является сужение области поиска неизвестных.

Ключевые слова: вентильный электродвигатель с закрытыми пазами, магнитостатическое поле, метод вторичных источников.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Багато електротехнічних пристроїв (електричні машини та апарати, елементи автоматики й обчислювальної техніки) містять феромагнітні елементи. Номінальні режими роботи таких пристроїв реалізуються зазвичай при значеннях магнітної індукції, які не призводять до значного насичення магнітом'яких матеріалів. У цей же час у деяких областях (наприклад, кутові зони, тонкі феромагнітні перемички) значення магнітної індукції можуть перевищувати допустимі, що вимагає врахування нелінійної залежності *B(H)* при розрахунку магнітного поля в таких пристроях.

Метою роботи є розробка математичної моделі для розрахунку магнітного поля у вентильному електродвигуні з неявнополюсним статором і явнополюсним ротором з урахуванням нелінійних магнітних властивостей феромагнітних елементів.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Статор і ротор вентильного двигуна є шихтованими та виготовленими з магнітом'якого матеріалу. Статор – це феромагнітна труба, вздовж якої пророблені канали для розташування обмотки (рис. 1).

Циліндричний ротор розміщений у середині статора. На поверхню ротора наклеєні постійні магніти, що намагнічені однорідно в площині *Oxy*.

При постановці задачі знехтуємо гістерезисом та анізотропією феромагнітних матеріалів і приймемо, що магнітна індукція залежить від напруженості магнітного поля як $B = B(H)$, де B, H – індукція та напруженість магнітного поля. Якщо ввести магнітну проникність матеріалу μ, вказану залежність можемо записати у вигляді $\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$, де $H = \left|\vec{H}\right|$ – модуль напруженості магнітного поля.

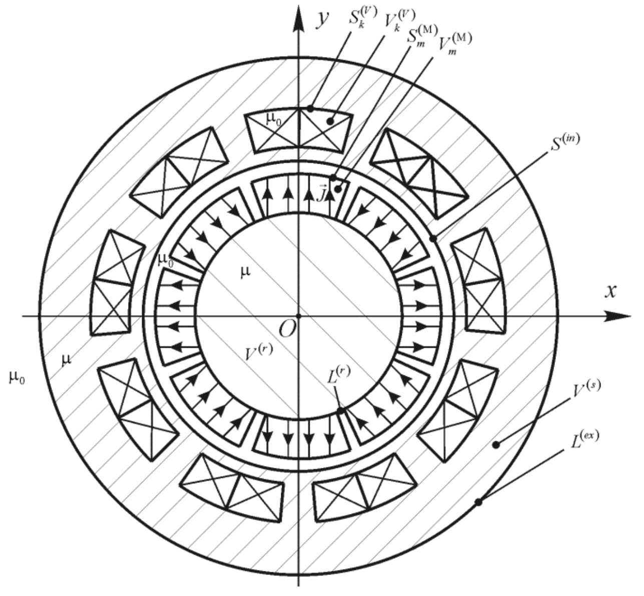

Рисунок 1 – Переріз вентильного електродвигуна із закритими пазами

Постановка тривимірної задачі. Введемо позначення: $V^{(s)}$ і $V^{(r)}$ – області, які зайняті феромагнітним статором і ротором; $S^{(r)}$ – поверхня, що обмежує область $V^{(r)}$, а $S^{(ex)}$ і $S^{(in)}$ – поверхні, що обмежують область $V^{(s)}$ з боку навколишнього простору й з боку ротора відповідно; у статорі $V^{(s)}$ є R пустот $V_k^{(V)}$, k= 1,2,...,R, які заповнені середовищем з магнітною проникністю μ_0; $S_k^{(V)}$ – поверхня, що обмежує область $V_k^{(V)}$; $V^{(in)}$ і $V^{(ex)}$ – області між статором і ротором та поза статором відповідно, які заповнені середовищем із магнітною проникністю μ_0 [1].

Нехай

$$V^{+}=V^{(s)}\cup V^{(r)};$$

$$V^{-}=V^{(ex)}\cup V^{(in)}\cup\left(\sum_{k=1}^{R}V_k^{(V)}\right);$$

$$S=S^{(r)}\cup S^{(in)}\cup S^{(ex)}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{R}S_k^{(V)}\right).$$

Постановка крайової задачі розрахунку характеристик магнітного поля. Розглянемо повну систему рівнянь Максвелла [2, 3]:

$$\begin{cases} rot\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ rot\vec{H}=\vec{\delta}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \\ div\vec{D}=\rho; \\ div\vec{B}=0. \end{cases}$$

З урахуванням того, що в обмотках статора протікають постійні струми, розрахунок магнітного поля електричної машини в загальному випадку зводиться до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} rot\vec{H}=\vec{\delta}; \\ rot\vec{B}=0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\vec{\delta}$ – щільність струму.

На границі розділу середовищ повинні виконуватись наступні граничні умови для векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$:

$$Rot\vec{H}=0; \qquad (2)$$

$$Div\vec{B}=0, \qquad (3)$$

де $Rot\vec{H}(Q)=\vec{n}_Q\times\left(\vec{H}_2(Q)-\vec{H}_1(Q)\right)$ – поверхневий ротор; $Div\vec{B}(Q)=\vec{n}_Q\left(\vec{B}_2(Q)-\vec{B}_1(Q)\right)$ – поверхнева дивергенція; $\vec{n}_Q$ – нормаль у точці Q до поверхні розділу двох середовищ, яка спрямована із середовища 1 до середовища 2; $\vec{H}_2(Q)$, $\vec{B}_2(Q)$ – напруженість та магнітна індукція в точці Q границі розділу середовищ із боку другого середовища; $\vec{H}_1(Q)$, $\vec{B}_1(Q)$ – напруженість та магнітна індукція в точці Q границі розділу середовищ із боку першого середовища.

Подамо напруженість магнітного поля $\vec{H}$ у вигляді двох складових:

$$\vec{H}(Q)=\vec{H}^{(B)}(Q)+\vec{H}^{(H)}(Q), \qquad (4)$$

де $\vec{H}^{(B)}(Q)$ – вихрова складова напруженості магнітного поля, що обумовлена струмами провідності, а $\vec{H}^{(H)}(Q)$ – безвихрова частина магнітного поля, яка обумовлена намагніченням матеріалу під дією зовнішнього магнітного поля.

Оскільки

$$\vec{B}(Q)=\mu(Q)\vec{H}(Q), \qquad (5)$$

то, підставивши співвідношення (4), (5) у вирази системи (1) і (2)–(3), знайдемо:

$$rot\vec{H}^{(B)}+rot\vec{H}^{(H)}=\vec{\delta};$$

$$div\mu\vec{H}^{(B)}+div\mu\vec{H}^{(H)}=0; \qquad (6)$$

$$Rot\vec{H}^{(B)}+Rot\vec{H}^{(H)}=0; \qquad (7)$$

$$Div\mu\vec{H}^{(B)}+Div\mu\vec{H}^{(H)}=0. \qquad (8)$$

Враховуючи, що $rot\vec{H}^{(B)}=\vec{\delta}$ і $div\vec{B}=0$, а також безперервність $\vec{H}^{(B)}$ у всьому просторі, приходимо до висновку, що $rot\vec{H}^{(H)}=0$.

Тому поза областями зі струмом можна ввести скалярний магнітний потенціал φ_M

$$\vec{H}^{(H)}(Q)=-grad_Q\varphi_M(Q), \qquad (9)$$

або

$$\varphi_M(Q) = -\int_{Q_0}^{Q} \vec{H}^{(H)}(P)\,dl_p \,,$$

де Q_0 – точка нульового значення потенціалу.

Із виразу (6) з урахуванням рівняння (9) отримаємо, що

$$0 = div_Q \mu(Q)\vec{H}^{(B)}(Q) + div_Q \mu(Q)\vec{H}^{(H)}(Q) =$$
$$= \mu(Q)\,div_Q \vec{H}^{(B)}(Q) + \vec{H}^{(B)}(Q)\,grad_Q \mu(Q) +$$
$$+\mu(Q)\,div_Q \vec{H}^{(H)}(Q) + \vec{H}^{(H)}(Q)\,grad_Q \mu(Q) =$$
$$= \mu(Q)\,div_Q \vec{H}^{(H)}(Q) + \vec{H}(Q)\,grad_Q \mu(Q) =$$
$$= -\mu(Q)\,div_Q grad_Q \varphi_M(Q) + \vec{H}(Q)\,grad_Q \mu(Q) =$$
$$= -\mu(Q)\,\Delta\varphi_M(Q) + \vec{H}(Q)\,grad_Q \mu(Q).$$

Тобто

$$\Delta\phi_M(Q) = \frac{\vec{H}(Q)\,grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q)}. \qquad (10)$$

Якщо ввести позначення

$$\rho_M(Q) = -\frac{\mu_0 \vec{H}(Q)\,grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q)}, \qquad (11)$$

тоді вираз (10) набуде вигляду $\Delta\varphi_M(Q) = -\dfrac{\rho_M(Q)}{\mu_0}$.

Таким чином, отримано рівняння Пуассона, де $\rho_M(Q)$ є об'ємною щільністю магнітних зарядів, при цьому поза магнітним матеріалом магнітних зарядів немає і тому

$$\Delta\varphi_M^+(Q) = -\frac{\rho_M(Q)}{\mu_0}; \quad \text{в } V^+ \qquad (12)$$

$$\Delta\varphi_M^-(Q) = 0. \quad \text{в } V^-. \qquad (13)$$

Скористаємося виразами (7)–(9), тоді запишемо

$$H_t^{(B)}(Q) + H_t^H(Q) = H_t^{(B)-}(Q) + H_t^{(H)-}(Q), \ Q \in S,$$

де індекс *t* позначає тангенціальну компоненту.

З урахуванням безперервності вихрової складової напруженості магнітного поля $H^{(B)}(Q)$ при проході через S отримаємо $H_t^{(H)+}(Q) = H_t^{(H)-}(Q)$, або

$$\varphi_M^+(Q) = \varphi_M^-(Q), \ Q \in S. \qquad (14)$$

Аналогічно

$$\mu_0 H_n^{(B)-}(Q) + \mu_0 H_n^{(H)-}(Q) = \mu(Q) H_n^{(B)+}(Q) +$$
$$+\mu(Q) H_n^{(H)+}(Q),$$

де індекс *n* позначає нормальну компоненту вектора напруженості магнітного поля.

З урахуванням безперервності $\vec{H}^{(B)}(Q)$ при переході через границю *S* отримаємо наступні вирази для нормальних складових поля:

$$\mu(Q) H_n^{(H)+}(Q) - \mu_0 H_n^{(H)-}(Q) = (\mu_0 - \mu(Q)) H_n^{(B)}(Q),$$
$$Q \in S;$$

$$\mu(Q)\frac{\partial\varphi_M^+(Q)}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial\varphi_M^-(Q)}{\partial n} = (\mu(Q) - \mu_0) H_n^{(B)}(Q), \qquad (15)$$
$$Q \in S.$$

Об'єднавши вирази (11) і (12)–(15), отримаємо крайову задачу для тривимірного магнітного поля з урахуванням неоднорідності магнітних властивостей матеріалу:

$$\Delta\varphi_M^+(Q) = -\frac{\rho_M(Q)}{\mu_0}, \ Q \in V^+;$$
$$\Delta\varphi_M^-(Q) = 0, \ Q \in V^-;$$
$$\varphi_M^+(Q) = \varphi_M^-(Q), \ Q \in S;$$
$$\mu(Q)\frac{\partial\varphi_M^+(Q)}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial\varphi_M^-(Q)}{\partial n} = (\mu(Q) - \mu_0) H_n^{(B)}(Q),$$
$$Q \in S,$$

де $\rho_M(Q) = -\dfrac{\mu_0 \vec{H}(Q)\,grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q)}$.

Редукція крайової задачі до системи інтегральних рівнянь для джерел магнітного поля. Для розв'язку сформульованої крайової задачі використаємо метод вторинних джерел [3, 4], який полягає у тому, що магнітний матеріал із магнітною проникністю $\mu(Q)$ заміщають системою об'ємних і поверхневих магнітних зарядів так, щоб поле $\vec{H}(Q)$ залишилось незмінним і для нього виконувались граничні умови. У даному випадку незмінним вважаємо поле $\vec{H}^{(H)}(Q)$, оскільки поле $\vec{H}^{(B)}(Q)$ визначається тільки конфігурацією провідників і розподілом струмів.

Введемо вторинні джерела $\sigma_M(Q)$ і $\rho_M(Q)$, де $\sigma_M(Q)$ – поверхнева щільність магнітних зарядів, а $\rho_M(Q)$ – об'ємна щільність магнітних зарядів.

Запишемо скалярний магнітний потенціал поля $\vec{H}^{(H)}(Q)$ у вигляді

$$\phi_M(Q) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left\{\int_{V^+} \frac{\rho_M(M)}{r_{QM}} dV_M + \oint_S \frac{\sigma_M(M)}{r_{QM}} dS_M\right\},$$

де r_{QM} – радіус вектора, проведеного з точки *M* в точку *Q*.

Скориставшись теоремою про стрибок нормальних похідних потенціалу φ простого шару при переході через заряджену поверхню [5], отримаємо

$$\frac{\partial\phi^+(Q)}{\partial n} = \frac{\sigma(Q)}{2} - \frac{1}{4\pi}\oint_S \sigma(M)\frac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} dS_M;$$

$$\frac{\partial\phi^-(Q)}{\partial n} = -\frac{\sigma(Q)}{2} - \frac{1}{4\pi}\oint_S \sigma(M)\frac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} dS_M.$$

Розглянемо поведінку цієї частини скалярного магнітного потенціалу, яка обумовлена магнітними зарядами, що розподілені за об'ємом V^+ об'ємною щільністю $\rho_M(Q)$. Очевидно, що

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{1}{r_{QM}}dV_M =$$

$$=\vec{n}grad_Q\left(\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{1}{r_{QM}}dV_M\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\left(grad_Q\frac{1}{r_{QM}}\cdot\vec{n}_Q\right)dV_M =$$

$$=-\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M .$$

Тоді

$$\frac{\partial\phi^+(Q)}{\partial n}=\frac{\sigma(Q)}{2\mu_0}-\frac{1}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M - \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M ; \quad (16)$$

$$\frac{\partial\phi^-(Q)}{\partial n}=-\frac{\sigma(Q)}{2\mu_0}-\frac{1}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M - \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M . \quad (17)$$

Використаємо вираз (15), у який підставимо попередні вирази (16) і (17), та отримаємо

$$\mu(Q)\frac{\partial\varphi_M^+(Q)}{\partial n}-\mu_0\frac{\partial\varphi_M^-(Q)}{\partial n}=\mu(Q)\frac{\sigma_M(Q)}{2\mu_0}- -\frac{\mu(Q)}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M - -\frac{\mu(Q)}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M + +\mu_0\frac{\sigma_M(Q)}{\mu_0}+\frac{\mu_0}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M + +\frac{\mu_0}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M = =\frac{\left(\mu(Q)+\mu_0\right)}{2\mu_0}\sigma_M(Q)- -\frac{\left(\mu(Q)+\mu_0\right)}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M - -\frac{\left(\mu(Q)+\mu_0\right)}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M , \quad (18)$$

де $\vec{n}_Q$ – зовнішня нормаль до *S*.

Перепишемо (18) у вигляді

$$\frac{\left(\mu(Q)+\mu_0\right)}{2\mu_0}\sigma_M(Q)- -\frac{\left(\mu(Q)-\mu_0\right)}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M - -\frac{\left(\mu(Q)-\mu_0\right)}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M = =\left(\mu(Q)-\mu_0\right)\vec{n}_Q\vec{H}^{(B)}(Q). \quad (19)$$

Помножимо ліву й праву частини рівняння (19) на $2\mu_0/\left(\mu(Q)+\mu_0\right)$ і введемо позначення

$$\lambda(Q)=\frac{\left(\mu(Q)-\mu_0\right)}{\left(\mu(Q)+\mu_0\right)}.$$

Тоді

$$\sigma_M(Q)-\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M = =\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M + +2\mu_0\lambda(Q)\vec{n}_Q\vec{H}^{(B)}(Q),\ Q\in S .$$

Таким чином, отримано інтегральне рівняння другого ряду, яке дозволяє визначити густину простого шару магнітних зарядів.

Отримаємо друге інтегральне рівняння, використовуючи вираз для об'ємної густини магнітного заряду (11), оскільки

$$\vec{H}(Q)=\vec{H}^{(H)}(Q)+\vec{H}^{(B)}(Q)=-grad\varphi_M(Q)+ +\vec{H}^{(B)}(Q)=-grad_Q\left\{\frac{1}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma_M(M)\frac{1}{r_{QM}}dS_M + +\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{1}{r_{QM}}dV_M\right\}+\vec{H}^{(B)}(Q)=\frac{1}{4\pi\mu_0}\times \times\left\{\oint_S\sigma_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3}dS_M+\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3}dV_M\right\}+\vec{H}^{(B)}(Q).$$

Таким чином,

$$\rho_M(Q)=-\frac{\mu_0}{\mu(Q)}\vec{H}(Q)grad_Q\mu(Q)= =-\frac{\mu_0}{\mu(Q)}\left\{\frac{1}{4\pi\mu_0}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dS_M + +\frac{1}{4\pi\mu(Q)}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dV_M + +\vec{H}^{(B)}(Q)grad_Q\mu(Q)\right\}= =-\frac{1}{4\pi\mu(Q)}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dV_M - -\frac{1}{4\pi\mu(Q)}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dS_M - -\frac{\mu_0}{\mu(Q)}\vec{H}^{(B)}(Q)grad_Q\mu(Q).$$

Як наслідок, приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_M(Q) - \dfrac{\lambda(Q)}{2\pi} \oint\limits_S \sigma_M(M) \dfrac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} dS_M = \\ = \dfrac{\lambda(Q)}{2\pi} \int\limits_{V^+} \rho_M(M) \dfrac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} dV_M + \\ +2\mu_0 \lambda(Q) \overrightarrow{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q, Q \in S; \\ \rho_M(Q) - \dfrac{1}{4\pi\mu(Q)} \oint\limits_{V^+} \rho_M(M) \dfrac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dV_M = \\ = -\dfrac{1}{4\pi\mu(Q)} \oint\limits_S \sigma_M(M) \dfrac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dS_M - \\ -\dfrac{\mu_0}{\mu(Q)} \overrightarrow{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q), Q \in V^+. \end{cases} \quad \begin{matrix} (20) \\ \\ (21) \end{matrix}$$

Використаємо систему інтегральних рівнянь (20), (21). Оскільки ядра системи інтегральних рівнянь є ядрами із слабкою особливістю, тобто належать до ядер типу $K(Q,M) = \dfrac{F(Q,M)}{r_{QM}^{\alpha}}$, де $0 \le \lambda \le m$; m – розмірність простору; $F(Q,M)$ – неперервна функція аргументів Q і M, а для таких застосовують теореми Фредгольма.

Система інтегральних рівнянь (20), (21) для будь-якої функції, яка диференціюється, $\mu(Q) > 0$ вирішується однозначно [6, 7].

Доведення однозначності розв'язку системи інтегральних рівнянь (20), (21). Якщо застосувати до системи інтегральних рівнянь (20), (21) теореми Фредгольма, то щоб дана система вирішувалася однозначно, необхідно й достатньо, щоб відповідна однорідна система інтегральних рівнянь мала тільки нульове рішення, тобто $\sigma_M(Q) \equiv 0$ і $\rho_M(Q) \equiv 0$.

Розглянемо однорідну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_0(Q) - \dfrac{\lambda(Q)}{2\pi} \oint\limits_S \sigma_0(M) \dfrac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} dS_M - \\ -\dfrac{\lambda(Q)}{2\pi} \int\limits_{V^+} \rho_0(M) \dfrac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} dV_M = 0; \\ \rho_0(Q) - \dfrac{1}{4\pi\mu(Q)} \oint\limits_{V^+} \rho_0(M) \dfrac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dV_M + \\ +\dfrac{1}{4\pi\mu(Q)} \oint\limits_S \sigma_0(M) \dfrac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dS_M = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (22) \\ \\ (23) \end{matrix}$$

Введемо скалярний магнітний потенціал:

$$\phi_0(Q) = \frac{1}{4\pi\mu(Q)} \left\{ \oint\limits_S \sigma_0(M) \frac{1}{r_{QM}} dS_M + \int\limits_{V^+} \rho_0(M) \frac{1}{r_{QM}} dV_M \right\}. \quad (24)$$

В області V^- відсутні об'ємні заряди, й тому скалярний магнітний потенціал задовольняє рівняння Лапласа $\Delta\varphi_0^-(M) = 0, M \in V^-$, а в області V^+ задовольняє рівняння Пуассона:

$$\Delta\varphi_0^+(M) = -\frac{\rho_0^+(M)}{\mu_0}, \; M \in V^+. \quad (25)$$

Якщо взяти $-grad_Q \ldots$ від лівої й правої частини рівняння (24), отримаємо

$$grad_Q \phi_0(Q) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left\{ \oint\limits_S \sigma_0(M) \frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M + \int\limits_{V^+} \rho_0(M) \frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M \right\}. \quad (26)$$

Помножимо ліву й праву сторону (26) на $\mu_0 / \mu(Q)$ і перенесемо праві доданки в ліву частину рівняння, тоді

$$-\frac{\mu_0}{\mu(Q)} grad_Q \phi_0(Q) - \frac{1}{4\pi\mu(Q)} \oint\limits_S \sigma_0(M) \frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^2} dS_M - \frac{1}{4\pi\mu(Q)} \int\limits_{V^+} \rho_0(M) \frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M = 0. \quad (27)$$

Помножимо ліву й праву сторони рівняння (27) на $grad_Q \mu(Q)$ і, порівнявши із співвідношенням (23), приходимо до висновку, що

$$\rho_0(Q) = \frac{\mu_0}{\mu(Q)} grad_Q \mu(Q)\, grad_Q \varphi_0(Q). \quad (28)$$

Із рівняння (25) і виразу (28) отримаємо наступне:

$$\mu(Q) \Delta\varphi_0^+(Q) = grad_Q \mu(Q)\, grad_Q \varphi_0(Q) = = grad_Q \mu(Q)\, grad_Q \varphi_0^+(Q).$$

Тоді записуємо

$$\mu(Q)\, div_Q grad_Q \varphi_0^+(Q) - -grad_Q \mu(Q) \cdot grad_Q \varphi_0^+(Q) = 0. \quad (29)$$

Враховуючи співвідношення векторного аналізу, $div_Q \varphi(Q) \vec{a}(Q) = \vec{a}(Q)\, grad_Q \varphi(Q) + \varphi(Q)\, div_Q \vec{a}(Q)$, де $\varphi(Q)$ – неперервна функція, а $\vec{a}(Q)$ – вектор із неперервними компонентами.

Таким чином, із виразу (29) отримаємо

$$div_Q \left(\mu(Q)\, grad_Q \varphi_0^+(Q) \right) = 0.$$

Із співвідношення (24) випливає, що для потенціалу $\varphi_0(Q)$ на границі S розподілу двох середовищ із магнітними проникностями μ та μ_0 виконуються граничні умови:

$$\varphi_0^+(Q) = \varphi_0^-(Q), \; Q \in S; \quad \mu_0 \frac{\partial\varphi_0^-(Q)}{\partial n_Q} = \mu(Q) \frac{\partial\varphi_0^+}{\partial n_Q}, \; Q \in S. \quad (30)$$

Скористаємося теоремою Гаусса–Остроградського

$$\int\limits_{V^+} div_M \vec{a}(M)\, dV_M = \int\limits_S \vec{a}(M)\, dS_M \qquad (31)$$

і візьмемо у функції вектора $\vec{a}(M)$ вектор вигляду

$$\vec{a}(M) = \varphi_0^+(M)\mu(M)\, grad_M \varphi_0^+(M) .$$

Тоді

$$div_M \vec{a}_{(M)} = \varphi_0^+(M)\, div_M\left(\mu(M)\, grad_M \varphi_0^+(M) + \right.$$
$$\left. + \mu(M)\left|grad_M \varphi_0^+(M)\right|^2\right) = \mu(M)\left|grad_M \varphi_0^+(M)\right|^2 .$$

Підставляючи останній вираз у співвідношення (31), отримаємо

$$\int\limits_S \mu(M)\varphi_0^+(M)\frac{\partial \varphi_0^+(M)}{\partial n} dS_M =$$
$$= \int\limits_{V^+} \mu(M)\left|grad_M \varphi_0^+(M)\right|^2 dV_M .$$

Аналогічно отримаємо

$$\int\limits_S \mu(M)\varphi_0^-(M)\frac{\partial \varphi_0^-(M)}{\partial n} dS_M =$$
$$= \int\limits_{V^+} \mu(M)\left|grad_M \varphi_0^-(M)\right|^2 dV_M ,$$

де знак «–» зумовлений тим, що нормаль до поверхні S направлена до середини області V^+. З урахуванням, що $\varphi_0(M)$ є неперервним на S, а також рівняння (30), приходимо до виразу

$$\int\limits_{V^+} \mu(M)\left|grad_M \varphi_0^+(M)\right|^2 dV_M +$$
$$+ \int\limits_{V^+} \mu(M)\left|grad_M \varphi_0^-(M)\right|^2 dV_M = 0 .$$

Якщо $\mu(M) > 0$, то $\varphi_0^+ = const$ і $\varphi_0^- = const$, і оскільки $\varphi_0(\infty) = 0$, то $\varphi_0(Q) = 0$ у цілому просторі. Оскільки нормальна похідна від φ_0 зазнає стрибка на зарядженій поверхні S, який дорівнює $\sigma_0(M) = \frac{\partial \varphi_0^+}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_0^-}{\partial n}$, $M \in S$, то $\sigma_0(M) \equiv 0$ при $M \in S$, а із виразу (28) отримаємо $\rho_0(M) \equiv 0$, $M \in S$.

Тому однорідна система рівнянь (22), (23) має тільки нульове рішення й система інтегральних рівнянь (20), (21) вирішується однозначно.

Дослідження стійкості системи інтегральних рівнянь (20), (21). Інтегральні рівняння (20), (21) мають погану стійкість відносно малих збурень у правій частині цих інтегральних рівнянь.

Нехай $\tilde{f}_1(Q)$ – збурення правої частини рівняння (20) і нехай середнє значення збурення $\tilde{f}_1(Q)$ на поверхні S дорівнює $a = \frac{1}{S}\int\limits_S \tilde{f}_1(Q)\, dS_Q$.

Нехай $\tilde{\sigma}_M(Q)$ – збурення, що обумовлено $\tilde{f}_1(Q)$, тоді для його визначення отримуємо наступне рівняння:

$$\tilde{\sigma}_M(Q) - \frac{\lambda(Q)}{2\pi}\oint\limits_S \tilde{\sigma}_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2} dS_M = \tilde{f}_1(Q) . \qquad (32)$$

Проінтегруємо ліву й праву сторони (32) по поверхні S та отримуємо

$$\oint\limits_S \tilde{\sigma}_Q(Q)\, dS_Q - \oint\limits_S\oint\limits_S \frac{\lambda(Q)}{2\pi}\tilde{\sigma}_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2} dS_M dS_Q =$$
$$= \oint\limits_S \tilde{f}_1(Q)\, dS_Q .$$

Враховуючи, що

$$\oint\limits_S \frac{\cos\left(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2} dS_Q = 2\pi ,$$

то

$$\frac{1}{S}\oint\limits_S \tilde{\sigma}_M(Q)\, dS_Q - \frac{1}{S}\oint\limits_S \tilde{\sigma}_M(Q)\lambda(Q)\, dS_Q = \frac{1}{S}\oint\limits_S \tilde{f}_1(Q)\, dS_Q ,$$

або $\frac{1}{S}\oint\limits_S \tilde{\sigma}_Q(Q)\left(1 - \lambda(Q)\right) dS_Q = a$.

Якщо припустити, що $\sigma_M(Q) > 0$, то

$$\frac{1}{S}\oint\limits_S \tilde{\sigma}_M(M)\, dS_M = \frac{a}{1-\lambda} ,$$

де $\min\limits_{Q\in S}\lambda(Q) \le \lambda \le \max\limits_{Q\in S}\lambda(Q)$.

Оскільки $\lambda \to 1$, то середнє значення $\left\langle \tilde{\sigma}_M(M)\right\rangle \frac{1}{S}\oint\limits_S \tilde{\sigma}_M(M)\, dS_M$ достатньо велике, а це означає, що рівняння (20) має погану стійкість до збурень правої частини цього інтегрального рівняння.

Необхідно також відмітити погану стійкість до збурень правої частини рівняння (21).

Нехай $\tilde{f}_2(Q)$ – збурення правої частини рівняння (21), і нехай середнє значення збурення $\tilde{f}_2(Q)$ за об'ємом V^+ дорівнює $b = \frac{1}{V^+}\int\limits_{V^+} \tilde{f}_2(Q)\, dV_Q$.

Нехай $\tilde{\rho}_M(Q)$ – збурення $\rho_M(Q)$, яке зумовлене збуренням $\tilde{f}_1(Q)$, тоді отримаємо наступне рівняння:

$$\tilde{\rho}_M(Q) + \frac{1}{4\pi\mu(Q)}\int\limits_{V^+} \tilde{\rho}_M(M)\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^2} dV_M = \qquad (33)$$
$$= \tilde{f}_2(Q) .$$

Проінтегруємо ліву й праву сторони (33) за об'ємом V^+:

$$\int_{V^+} \tilde{\rho}_M(Q)dV_Q +$$

$$+\int_{V^+}\int_{V^+} \frac{1}{4\pi\mu(Q)}\tilde{\rho}(M)\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dV_M\, dV_Q =$$

$$= \int_{V^+} \tilde{f}_2(Q)dV_Q .$$

Розглянемо функцію

$$\psi(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{V^+} \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{QM}^3}dV_Q ,$$

яка є неперервною для будь-якої точки $M \in V^+$.

Для цього покажемо, що

$\lim\limits_{M\to M'}\left|\psi(M)-\psi(M')\right| \to 0$, де $M, M' \in V^+$.

Розглянемо дві точки M і M', що належать V^+, і оточимо ці точки сферами радіуса R і R', при цьому $V^+ \subset V_R$ і $V^+ \subset V_{R'}$, де V_R і $V_{R'}$ – області, що обмежені поверхнею сфер радіусу R і R' відповідно. Тоді

$$\left|\psi(M)-\psi(M')\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left|\int_{V^+}\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{QM}^3}dV_Q - \int_{V^+}\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{QM}^3}dV_Q\right| \le$$

$$\le \frac{M}{4\pi}\int_{V^+}\left|\frac{1}{r_{QM}^2}-\frac{1}{r_{QM'}^2}\right|dV_Q \le \frac{M}{4\pi}\int_{V^+}\frac{\left|r_{QM'}^2-r_{QM}^2\right|}{r_{QM}^2 r_{QM'}^2}dV_Q \le$$

$$\le \frac{M}{4\pi}\vec{r}_{MM'}\int_{V^+}\left\{\frac{1}{r_{QM}}+\frac{1}{r_{QM'}}\right\}dV_Q \le$$

$$\le \frac{M}{4\pi}\int_{V^+}\frac{\left|r_{QM}^2-r_{QM'}^2\right|}{r_{QM}^2 r_{QM'}^2}\left|r_{QM}^2+r_{QM'}^2\right|dV_Q \le$$

$$\le \frac{M}{4\pi}\int_{V^+}\left|\vec{r}_{MM'}\right|\frac{\left(r_{QM'}^2+r_{QM}^2\right)}{r_{QM}r_{QM'}}dV_Q \le$$

$$\le \frac{M}{4\pi}\vec{r}_{MM'}\left\{\int_{V_R}\frac{dV_Q}{r_{QM}}+\int_{V_{R'}}\frac{dV_Q}{r_{QM'}}\right\} \le$$

$$\le \frac{M}{4\pi}\vec{r}_{MM'}4\pi(R+R') \le M\vec{r}_{MM'}(R+R'),$$

де $M = \max\limits_{Q\in V^+}\left|\dfrac{grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}\right|$.

При цьому $M \to M'$, $r_{MM'} \to 0$ і $\left|\psi(M)-\psi(M')\right| \to 0$, а це означає, що функція $\psi(M)$ – неперервна функція й, як наслідок, обмежена.

Тому записуємо

$$\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)dV_Q + \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)\psi(Q)dV_Q =$$

$$= \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{f}_2(Q)dV_Q ,$$

або $\dfrac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)\left(1+\psi(Q)\right)dV_Q = b$.

Якщо припустити, що $\tilde{\rho}_M(Q) > 0$, то

$$\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)dV_Q = \frac{b}{1+\psi},$$

де $\min\limits_{Q\in V^+}\psi(Q) \le \psi \le \max\limits_{Q\in V^+}\psi(Q)$.

Тому середнє значення

$$\langle\tilde{\rho}_M(M)\rangle = \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(M)dV_M$$

може набути як завгодно велике значення.

Використання інтегральних властивостей вторинних джерел для видозміни інтегральних рівнянь магнітостатичної задачі. Виникає необхідність перетворення системи інтегральних рівнянь (20), (21). Для цього скористаємося додатковою інформацією. З принципу неперервності магнітного потоку [8] випливає умова, яка свідчить про те, що сумарний магнітний заряд повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\int_S \sigma_M(Q)dS_Q + \int_{V^+}\rho_M(Q)dV_Q = 0 . \qquad (34)$$

Вираз (34) виходить із принципу неперервності магнітного потоку та з повної аналогії між електричними й магнітними зарядами, а саме:

$$\int_S \vec{B}(M)d\vec{S}_M = \mu_0\int_S \vec{H}(M)d\vec{S}_M = \mu_0\int_S\left\{\vec{H}^{(B)}(M)+\right.$$

$$\left.+\vec{H}^{(H)}(M)\right\}d\vec{S}_M = \mu_0\int_S \vec{H}^{(H)}(M)d\vec{S}_M = 0 ,$$

де S – поверхня, яка охоплює об'єм V^+.

Тобто $\int_S \vec{H}^{(H)}(M)d\vec{S}_M = 0$.

Оскільки потік вектора $\vec{H}^{(H)}(M)$ через поверхню S дорівнює нулю, а отже, сумарний магнітний заряд, охоплений S, дорівнює нулю.

Рівняння (20), (21) набудуть вигляду

$$\sigma_M(Q) - \frac{\lambda(Q)}{2\pi}\oint_S \sigma_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dS_M =$$

$$= \frac{\lambda(Q)}{2\pi}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2}dV_M + \qquad (35)$$

$$+2\mu_0\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q ;$$

$$\rho_M(Q)-\frac{1}{4\pi\mu(Q)}\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{\vec r_{QM}\, grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dV_M=$$
$$=-\frac{1}{4\pi\mu(Q)}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\vec r_{QM}\, grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^3}dS_M-\qquad(36)$$
$$-\frac{\mu_0}{\mu(Q)}\vec H^{(B)}(Q)\, grad_Q\mu(Q),$$

де $\lambda(Q)=\dfrac{\mu(Q)-\mu_0}{\mu(Q)+\mu_0}$.

Проінтегруємо (35) по поверхні S:

$$\oint_S\sigma_M(Q)dS_Q-\oint_S\oint_S\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\sigma_M(M)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}dS_M dS_Q=$$
$$=\oint_S\int_{V^+}\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\rho_M(M)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}dV_M dS_Q+\qquad(37)$$
$$+2\mu_0\oint_S\lambda(Q)\vec H^{(B)}(Q)\vec n_Q dS_Q.$$

Віднімемо із виразу (37) вираз (34), отримаємо

$$\oint_S\oint_S\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\sigma_M(M)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}dS_M dS_Q+$$
$$+\oint_S\int_{V^+}\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\rho_M(M)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}dV_M dS_Q+\qquad(38)$$
$$+2\mu_0\oint_S\lambda(Q)\vec H^{(B)}(Q)\vec n_Q dS_Q+$$
$$+\int_{V^+}\rho_M(Q)dV_Q=0.$$

Помножимо (37) на C_1 і віднімемо отримане співвідношення з виразу (34):

$$\sigma_M(Q)-\frac{\lambda(Q)}{2\pi}\oint_S\sigma_M(M)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}dS_M-$$
$$-\frac{C_1}{2\pi}\oint_S\oint_S\lambda(P)\sigma_M(M)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_M dS_P=$$
$$=\frac{\lambda(Q)}{2\pi}+\int_{V^+}\rho_M(M)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}dV_M+$$
$$+\frac{C_1}{2\pi}\oint_S\int_{V^+}\lambda(P)\rho_M(M)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dV_M dS_P+$$
$$+C_1\int_{V^+}\rho_M(M)dV_M+2\mu_0\lambda(Q)\vec H^{(B)}(Q)\vec n_Q+$$
$$+2\mu_0C_1\oint_S\lambda(P)\vec H^{(B)}(P)\vec n_P dS_P,$$

або

$$\sigma_M(Q)-\frac{1}{2\pi}\oint_S\sigma_M(M)\left[\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}+\right.$$
$$\left.+C_1\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P\right]dS_M=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{V^+}\rho_M(M)\left[\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}+\right.$$
$$\left.+C_1\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P+2\pi C_1\right]dV_M+$$
$$+2\mu_0\left[\lambda(Q)\vec H^{(B)}(Q)\vec n_Q+\right.$$
$$\left.+C_1\oint_S\lambda(P)\vec H^{(B)}(P)\vec n_P dS_P\right].$$

Константу C_1 визначимо з мінімуму функціоналу виду

$$B_1(C_1)=\oint_S\oint_S\left[\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}+\right.$$
$$\left.+C_1\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P\right]^2dS_M dS_Q;$$

$$B_1(C_1)=\oint_S\oint_S\left[\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}+\right.$$
$$+2C_1\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P+$$
$$+C_1^2\left[\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P\right]^2dS_Q dS_M=$$
$$=\oint_S\oint_S\left[\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}\right]^2dS_Q dS_M+$$
$$+2C_1\oint_S\oint_S\lambda(Q)\frac{\cos(\vec r_{QM},\vec n_Q)}{r_{QM}^2}\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P dS_Q dS_M+$$
$$+C_1^2\oint_S\oint_S\left[\int_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P\right]^2dS_Q dS_M=$$
$$=B^2+2C_1\oint_S\left[\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P\right]^2dS_M+$$
$$+C_1^2S\oint_S\left[\oint_S\lambda(P)\frac{\cos(\vec r_{PM},\vec n_P)}{r_{PM}^2}dS_P\right]^2dS_M.$$

Продиференціювавши функціонал $B_1(C_1)$ за C_1, отримаємо

$$\frac{\partial B_1(C_1)}{\partial C_1} = 2\oint_S \left[\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right]^2 dS_M + +2C_1 S \oint_S \left[\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right]^2 dS_M . \quad (39)$$

Продиференціюємо вираз (39) за C_1, тоді

$$\frac{\partial^2 B_1(C_1)}{\partial C_1^2} = 2S\oint_S \left[\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right]^2 dS_M > 0 .$$

Тому функціонал $B_1(C_1)$ має мінімум, який можна визначити з умови $\dfrac{\partial B_1(C_1)}{\partial C_1} = 0$.

Таким чином,

$$\oint_S \left[\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right]^2 dS_M + +C_1 S \oint_S \left[\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right]^2 dS_M = 0 .$$

Оскільки

$$\oint_S \left[\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right]^2 dS_M > 0 ,$$

тоді

$$1 + C_1 S = 0 \text{ або } C_1 = -\frac{1}{S} .$$

Перетворене інтегральне рівняння (35) набуде вигляду

$$\sigma_M(Q) - \frac{1}{2\pi}\oint_S \sigma_M(M) \left[\lambda(Q) \frac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} - -\frac{1}{S}\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_P \right] dS_M = $$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{V^+} \rho_M(M) \left[\lambda(Q) \frac{\cos(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^2} - -\frac{1}{S}\oint_S \lambda(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{PM}^2} dS_M - \frac{2\pi}{S} \right] dV_M + $$
$$+2\mu_0 \left[\sigma(Q) \vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q - \frac{1}{S}\oint_S \sigma(P) \vec{H}^{(B)}(P)\vec{n}_P dS_P \right]. \quad (40)$$

Перетворимо інтегральне рівняння (36), проінтегрувавши за об'ємом V^+:

$$\int_{V^+} \rho_M(Q) dV_Q + +\int_{V^+}\int_{V^+} \frac{\rho_M(M)}{4\pi\mu(Q)} \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dV_Q dV_M = $$
$$= -\int_{V^+}\oint_S \frac{\sigma_M(M)}{4\pi\mu(Q)} \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dS_M dV_Q - -\int_{V^+} \frac{\mu_0}{\mu(Q)} \vec{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q) dV_Q . \quad (41)$$

Віднімемо з виразу (41) вираз (34) та отримаємо

$$\int_{V^+}\int_{V^+} \frac{\rho_M(M)}{4\pi\mu(Q)} \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dV_Q dV_M + +\int_{V^+}\oint_S \frac{\sigma_M(M)}{4\pi\mu(Q)} \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dS_M dV_Q + $$
$$+\int_{V^+} \frac{\mu_0}{\mu(Q)} \vec{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q) dV_Q - -\oint_S \sigma_M(Q) dS_Q = 0 . \quad (42)$$

Помножимо вираз (42) на C_2 і додаємо до виразу (36):

$$\rho_M(Q) + \int_{V^+} \frac{\rho_M(M)}{4\pi\mu(Q)} \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dV_M + +C_2 \int_{V^+}\int_{V^+} \frac{\rho_M(M)}{4\pi\mu(P)} \frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{r_{PM}^3} dV_P dV_M = $$
$$= -\int_{V^+} \frac{1}{4\pi\mu(Q)} \sigma_M(M) \frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} dS_M - -C_2 \int_{V^+}\oint_S \frac{\sigma_M(M)}{4\pi\mu(P)} \frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{r_{PM}^3} dS_M dV_P + $$
$$+C_2 \oint_S \sigma_M(Q) dS_M - \frac{\mu_0}{\mu(Q)} \vec{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q) - -C_2 \int_{V^+} \frac{\mu_0}{\mu(P)} \vec{H}^{(B)}(P)\, grad_P \mu(P) dV_P ,$$

або

$$\rho_M(Q) + \frac{1}{4\pi}\int_{V^+} \rho_M(M) \left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{QM}^3} + +C_2 \int_{V^+} \frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P \right] dV_M = $$
$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_S \sigma_M(M) \left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{QM}^3} + +(-C_2) \int_{V^+} \frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P - 4\pi C_2 \right] dS_M - $$
$$-\mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} + +C_2 \int_{V^+} \frac{\vec{H}^{(B)}(P)\, grad_P \mu(P)}{\mu(P)} dV_P \right].$$

Константу C_2 визначимо з мінімуму функціоналу, що має вигляд

$$B_2(C_2) = \int_{V^+}\int_{V^+}\left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{QM}^3} + \right.$$
$$\left. + C_2 \int_{V^+} \frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P \right] dV_M\, dV_Q .$$

Аналогічно, як і раніше, знаходимо

$$C_2 = -\frac{1}{V^+} .$$

Тому перетворене інтегральне рівняння (36) набуде вигляду:

$$\rho_M(Q) + \frac{1}{4\pi}\int_{V^+}\rho_M(M)\left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{QM}^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P\right] dV_M =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_S \sigma_M(M)\left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{r_{QM}^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P + \frac{4\pi}{V^+}\right] dS_M - \qquad (43)$$
$$-\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P + \frac{4\pi}{V^+}\Bigg] dS_M -$$
$$-\mu_0\left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec{H}^{(B)}(P)\, grad_P \mu(P)}{\mu(P)} dV_P\right].$$

Доведення стійкості до збурень правої частини видозміненої системи інтегральних рівнянь магнітостатичної задачі. Покажемо, що система інтегральних рівнянь (40) і (43) є стійкою до збурень правої частини, на відміну від рівнянь (35), (36).

Нехай $\tilde{f}_1(Q)$ – збурення правої частини рівняння (40) і нехай середнє значення $\tilde{f}_1(Q)$ на S дорівнює

$$a = \frac{1}{S}\int_S \tilde{f}_1(Q)\, dS_Q .$$

Нехай $\tilde{\sigma}_M(Q)$ – збурення $\sigma_M(Q)$, що викликано $\tilde{f}_1(Q)$. Для його знаходження з рівняння (40) отримаємо наступний вираз:

$$\tilde{\sigma}_M(Q) - \frac{1}{2\pi}\oint_S \tilde{\sigma}_M(M)\left[\lambda(Q)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{S}\oint_S \lambda(P)\frac{\cos\left(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P\right)}{r_{PM}^2} dS_P\right] dS_M = \tilde{f}_1(Q). \qquad (44)$$

Проінтегруємо (44) за площею S та отримуємо:

$$\oint_S \sigma_M(Q)\, dS_Q - \frac{1}{2\pi}\oint_S\oint_S \sigma_M(M)\left[\lambda(Q)\frac{\cos\left(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q\right)}{r_{QM}^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{S}\oint_S \lambda(P)\frac{\cos\left(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P\right)}{r_{PM}^2} dS_P\right] dS_M\, dS_Q = \oint_S \tilde{f}_1(Q)\, dS_Q .$$

Тоді з цього виразу знаходимо, що

$$\frac{1}{S}\oint_S \tilde{\sigma}_M(Q)\, dS_Q = a .$$

Таким чином, середнє значення

$$\langle \tilde{\sigma}_M(Q)\rangle = \frac{1}{S}\int_S \tilde{\sigma}_M(Q)\, dS_Q$$

дорівнює середньому значенню $\tilde{f}_1(Q)$ на S. Аналогічно нехай $\tilde{f}_2(Q)$ – збурення правої частини рівняння (43) і нехай $b = \frac{1}{V^+}\int_S \tilde{f}_2(Q)\, dV_Q$ – середнє значення $f_2(Q)$ на S.

Нехай $\tilde{\rho}_M(Q)$ є збурення $\rho_M(Q)$, що викликано $\tilde{f}_2(Q)$, то для його визначення отримаємо наступне рівняння

$$\tilde{\rho}_M(Q) + \frac{1}{4\pi}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)\left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{QM}^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P\right] dV_M = \tilde{f}_2(Q). \qquad (45)$$

Проінтегруємо (45) за об’ємом V^+:

$$\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)\, dV_Q + \frac{1}{4\pi}\int_{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(M)\left[\frac{\vec{r}_{QM}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{QM}^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec{r}_{PM}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{PM}^3} dV_P\right] dV_M\, dV_Q =$$
$$= \int_{V^+}\tilde{f}_2(Q)\, dV_Q .$$

Тоді

$$\frac{1}{S}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)\, dV_Q = b .$$

Таким чином,

$$\langle \tilde{\rho}_M(Q)\rangle = \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\tilde{\rho}_M(Q)\, dV_Q ,$$

що дорівнює середньому значенню $\tilde{f}_2(Q)$ на V^+.

Необхідно відзначити, що отримані інтегральні рівняння та теорема про однозначність вирішення можуть бути зведені до аналогічних інтегральних рівнянь для двовимірного магнітного поля.

Двовимірна математична модель розрахунку характеристик магнітного поля вентильного двигуна. Розглянемо N нескінченно довгих паралельних один одному циліндричних провідників (обмотка статора), по яких течуть струми, що розподілені по перерізу провідників з густиною $\vec{\delta}_m(Q)=\vec{e}_z\delta_m(Q)$, $Q\in S_m^{(C)}$, m=1,2,…,N, де $S_m^{(C)}$ – переріз m-го провідника; $\vec{e}_z$ – орт циліндричної системи координат (рис. 1). Нехай $L_m^{(C)}$ – контур, який обмежує $S_m^{(C)}$, m=1, 2, …, N.

Поле, що створюється системою провідників у середовищі з магнітною проникливістю μ_0, визначається виразом [9, 10]

$$\vec{H}^{(B)}(Q)=\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{S_m^{(C)}}\delta_m(M)\frac{\vec{e}_z\times\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^2}dS_M .$$

Паралельно провідникам розміщена феромагнітна шихтована труба нескінченної довжини (статор), вздовж якої виконано R каналів нескінченної довжини перерізу $S_k^{(V)}$, $k=1,2,...,R$, в які укладається обмотка статора. Нехай $L_k^{(V)}$ – контур, який обмежує $S_k^{(V)}$, а $S^{(s)}$ – переріз труби з каналами.

У середині труби коаксіально розміщений ротор – нескінченно довгий шихтований феромагнітний циліндр, на поверхні якого розташовані однорідно намагнічені постійні магніти (рис. 1). Нехай $S^{(r)}$ – переріз цього циліндра, а $L^{(r)}$ – контур, який обмежує $S^{(r)}$.

Нехай

$$S^{+}=S^{(S)}\cup S^{(r)};$$

$$L=L^{(r)}\cup L^{(S)}\cup\sum_{k=1}^{R}L_k^{(V)} .$$

Виконавши викладки, аналогічні вищенаведеним, отримаємо систему інтегральних рівнянь для знаходження густини магнітних зарядів, розподілених по S^{+} і L:

$$\begin{cases}\sigma_M(Q)-\dfrac{\lambda(Q)}{\pi}\oint_L\sigma_M(M)\dfrac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}}dL_M=\\ =\dfrac{\lambda(Q)}{\pi}\int_{S^{+}}\rho_M(M)\dfrac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}}dS_M+\\ +2\mu_0\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q;\\ \rho_M(Q)-\dfrac{1}{2\pi\mu(Q)}\int_{S^{+}}\rho_M(M)\dfrac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^2}dS_M=\\ =-\dfrac{1}{2\pi\mu(Q)}\int_L\sigma_M(M)\dfrac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^2}dL_M-\\ -\dfrac{\mu_0}{\mu(Q)}\vec{H}^{(B)}(Q)\,grad_Q\mu(Q),\end{cases}\qquad(46)$$

де $\sigma_M(Q)$ – густина простого шару магнітних зарядів у точці Q границі L; $\rho_M(Q)$ – густина магнітних зарядів у точці Q поверхні S^{+};

$$\lambda(Q)=\frac{\mu(Q)-\mu_0}{\mu(Q)+\mu_0} .$$

Для повної системи інтегральних рівнянь (46) справедливою буде теорема, за якою дана система для будь-якої функції $\mu(Q)>0$, що диференціюється, вирішується однозначно.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми для тримірного магнітного поля.

Якщо скористатися додатковою інформацією про те, що

$$\oint_L\sigma_M(M)dL_M+\int_{S^{+}}\rho_M(M)dS_M=0 ,$$

то можна привести систему інтегральних рівнянь (46) до вигляду:

$$\begin{cases}\sigma_M(Q)-\dfrac{1}{\pi}\oint_L\sigma_M(M)\left[\lambda(P)\dfrac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}}-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{L}\oint_L\lambda(P)\dfrac{\cos\left(\vec{r}_{PM},\vec{n}_Q\right)}{r_{PM}}dL_p\right]dL_M=\\ =-\dfrac{1}{\pi}\int_{S^{+}}\rho_M(M)\left[\lambda(Q)\dfrac{\cos\left(\vec{r}_{QM},\vec{n}_Q\right)}{r_{QM}}-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{L}\oint_L\lambda(P)\dfrac{\cos\left(\vec{r}_{PM},\vec{n}_Q\right)}{r_{PM}}dL_P-\dfrac{\pi}{L}\right]dS_M+\\ +2\mu_0\left[\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{L}\oint_L\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q dL_P\right];\\ \rho_M(Q)-\dfrac{1}{2\pi}\int_{S^{+}}\rho_M(M)\left[\dfrac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{QM}^2}-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{S^{+}}\int_{S^{+}}\dfrac{\vec{r}_{PM}\,grad_P\mu(P)}{\mu(P)r_{PM}^2}dS_P\right]dS_M=\\ =-\dfrac{1}{2\pi}\oint_L\sigma_M(M)\left[\dfrac{\vec{r}_{QM}\,grad_Q\mu(Q)}{r_{QM}^2}-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{S^{+}}\int_{S^{+}}\dfrac{\vec{r}_{PM}\,grad_P\mu(P)}{\mu(P)r_{PM}^2}dS_P-\dfrac{2\pi}{S^{+}}\right]dL_M-\\ -\mu_0\left[\dfrac{\vec{H}^{(\mathbf{B})}(Q)\,grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{S^{+}}\int_{S^{+}}\dfrac{\vec{H}^{(B)}(P)\,grad_Q\mu(P)}{\mu(P)}dS_P\right].\end{cases}$$

Ця система інтегральних рівнянь вирішується однозначно, оскільки вона є лише перетвореною системою інтегральних рівнянь (46).

ВИСНОВКИ. На основі методу вторинних джерел крайову задачу розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні з урахуванням нелінійності магнітної характеристики сталі зведено до системи інтегральних рівнянь для фіктивних магнітних зарядів, розташованих по границі, та об'єму феромагнітних тіл, що дозволяє суттєво звузити область пошуку невідомих.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жильцов А.В., Ликтей В.В. Крайова задача для тривимірного магнітного поля з урахуванням неоднорідності магнітних властивостей середовища // Проблеми енергоресурсозбереження в електротехнічних системах. Наука, освіта і практика: наукове видання. – Кременчук: КрНУ, 2014. – Вип. 1/2014 (2). – С. 124–126.
2. Стадник И.П. Электродинамика: лекции с вопросами и задачами. – К.: Техника, 2012. – 336 с.
3. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.
4. Маергойз И.Д. Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных, анизотропных и линейных средах. – К.: Наукова думка, 1979. – 208 с.
5. Бессонов Л.А. Электромагнитное поле. –М.: Гардарики. – 2003. –316 с.
6. Гребеников В.В., Приймак М.В. Расчет магнитного поля и момента магнитоэлектрической машины с явно выраженными полюсами на статоре // Технічна електродинаміка. – 2012. – Вип. 2. – С. 83–84.
7. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчёт трёхмерных электромагнитных полей. – К.: Техника, 1974. – 352 с.
8. Брынский Е.А., Данилевич Я.Б., Яковлев В.И. Электромагнитные поля в электрических машинах. – Л.: Энергия, 1979. – 179 с.
9. Демирчян К.С. Моделирование магнитных полей. – Л.: Энергия, 1974. – 288 с.
10. Демирчян К.С., Нейман И.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники. – СПб.: Питер, 2009. – Т. 2. – 432 с.

CALCULATION OF MAGNETIC FIELD IN BRUSHLESS ELECTRIC MOTORS WITH CLOSET GROOVES TAKING INTO ACCOUNT NOTLINEAR MAGNETIC CHARACTERISTICS

A. Zhiltsov, V. Lyktey
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
vul. Geroiv Oborony, 12, Kyiv, 03041, Ukraine. E-mail: azhilt@mail.ru

The calculation of the magnetic field is one of the promising ways to engine diagnostics, because the basic processes in electrical machines is related to the magnetic field. We consider an electric motor with stator and rotor. Design feature of the present electric motor is the presence of ferromagnetic thin jumper between the stator winding and the gap in the stator and rotor. In nominal mode, the motor ferromagnetic material from which it is made is included in the state of magnetic saturation. This is to a significant reduction in shunting the magnetic flux of the stator currents and permanent magnets these bridges, insight magnetic material which is close to the value of the magnetic permeability of air. This makes it necessary to take account of the nonlinear magnetic characteristics of the material in the calculation of the average motor torque provided by the design. Three-dimensional and two-dimensional mathematical model for calculating the characteristics of the magnetic field in Brushless DC electric motor with closed grooves taking into account notlinear magnetic characteristics has been developed on the basis of method of secondary sources. The advantage of the method of secondary sources is narrowing the search area of unknown.

Key words: brushless DC electric motor with closed grooves, magnetostatic field, method of secondary sources.

REFERENCES

1. Zhiltsov, A.V. and Lyktej, V.V. (2014), "Boundary value problem for the three-dimensional magnetic field inhomogeneity based on the magnetic properties of the medium", *Problemy enerhoresursozberezhennia v elektrotekhnichnych systemach. Nauka, osvita i praktyka. Naukove vydannia*, Vol. 1, no. 2, pp. 124–126. (in Ukrainian)
2. Stadnik, I.P. (2012), *Elektrodinamika:* lektsii s voprosami i zadachami [Electrodynamics: Lecture with Questions and Problems], Tekhnika, Kyiv. (in Ukrainian)
3. Tosoni, O.V. (1975), *Metod vtorynnykh istochnikov v elektrotekhnike* [Method of secondary sources in electrical engineering], Energiya, Moscow. (in Russian)
4. Maergoiz, I.D. (1979), *Iteratsionnye metody rascheta staticheskikh poley v neodnorodnyhk, anizotropnykh i lineinykh sredakh* [Iterative methods for calculating static fields in inhomogeneous, anisotropic and linear media], Naukova dumka, Kyiv. (in Russian)
5. Bessonov, L.A. (2003), *Elektromagnitnoe pole* [Electromagnetic field], Gardariki, Moscow. (in Russian)
6. Grebenikov, V.V. and Pryymak, M.V. (2012), "Calculation of the magnetic field and torque of electric motor with salient poles on the stator", *Tekhnichna elektrodynamika,* Vol. 2, pp. 83–84. (in Russian)
7. Tosoni, O.V. and Maergoiz, I.D. (1974), *Raschet trekhmernikh elektromagnitnikh poley* [Calculation of the three-dimensional electromagnetic fields], Tekhnika, Kyiv. (in Russian)
8. Brynskiy, E.A., Danilevich, Y.B. and Yakovlev, V.I. (1979), *Elektromagnitniye polya v elektricheskikh mashinakh* [Electromagnetic fields in electrical machines], Energiya, Leningrad. (in Russian)
9. Demirchian, K.S. (1974), *Modelirovanie magnitnikh poley* [Modeling of magnetic fields], Energiya, Leningrad. (in Russian)
10. Demirchian, K.S, Neiman, I.R. and Korovkin, N.V. (2009), *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki,* [Theory of Electrical Engineering], Piter, Sankt-Peterburg. (in Russian)

Стаття надійшла 4.09.2014.