

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ БИОФОРМЫ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Рассмотрены обобщенные координатные системы, позволяющие моделировать биоформы в процессе роста по заданной траектории или поверхности. Приведены формулы преобразования координат специальных систем в традиционные.

Постановка проблемы. Формы живой природы изменяют свою структуру в процессе роста по определенным траекториям. Ставится задача сформировать этот процесс единой геометрической моделью.

Постановка задания. Направление роста задается направляющей фигурой (плоскость, поверхность, плоская или пространственная кривая). Для того, чтобы направляющая фигура являлась носителем сетки дискретизации она должна быть основой некоторой обобщенной координатной системы, в которой формируется дискретный каркас поверхности моделируемой биоформы.

В зависимости от постановки геометрической задачи используют различные координатные системы, среди которых традиционными (наиболее употребляемыми) в трехмерном пространстве являются: прямоугольная декартова, косоугольная (аффинная), полярная цилиндрическая, полярная сферическая, проективная и т.д.

Анализ последних исследований. Известны исследования, связанные с применением специальных (обобщенных) координатных систем [1, 2 и т.д.]. Авторы справочника [3] определяют координатную систему как « схему правил, описывающих каждый объект (точку) некоторого класса». Координатную систему в n -мерном точечном пространстве можно рассматривать как аппарат, позволяющий фиксировать n параметров точек. При этом параметры могут быть величинами различной природы (расстояния, углы, отношения и т.д.) Координаты могут отсчитываться вдоль двупараметрического множества линий, которые называются координатными линиями. Координатные системы, где координатными линиями являются прямые, называются линейными. Любая линейная система координат может рассматриваться как двупараметрическое множество координатных прямых (конгруэнция), где задана система отсчета луча конгруэнции и начало отсчета линейной координаты вдоль луча.

С учетом особенностей роста биоформы [4]. предлагается обобщенная линейная система координат, где началом отсчета линейной координаты является поверхность (плоскость) или линия (кривая или прямая). Модель реализуется наиболее просто, если множество координатных прямых представляют собой гиперболическую

конгруэнцию, одна из фокальных фигур которой обеспечивает расслоение конгруэнции на множество плоскостных пучков.

На рис. 1 показана конгруэнция прямых, фокальными фигурами которой является некоторый торс Δ и кривая s . Конгруэнция расслаивается на множество плоскостей инцидентности Σ_i . Каждой плоскости Σ_i принадлежит пучок лучей конгруэнции с центром S на фокальной кривой s .

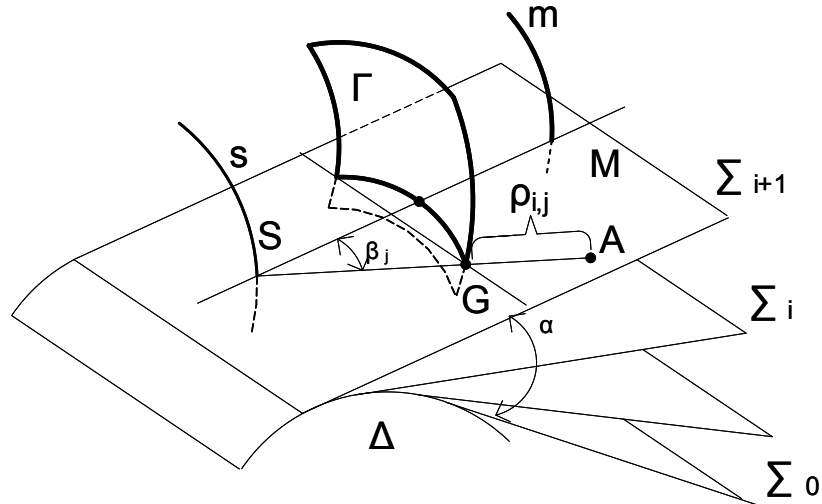


Рис. 1.

Произвольная точка A трехмерного пространства имеет три координаты α , β и ρ . Началом отсчета параметра α является заданная плоскость инцидентности Σ_0 , началом отсчета параметра β является фиксированная в данной плоскости прямая SM , где точка M определяется в результате пересечения заданной линии m с плоскостью инцидентности. Началом отсчета линейного параметра ρ является кривая g , получаемая в результате сечения заданной поверхности Γ плоскостью Σ_i . Направляющая поверхность является носителем сетки дискретизации.

Элементы представленного аппарата могут принимать различную форму и положение и совпадать. При этом образуется множество линейных координатных систем с направляющей фигурой роста, которая является носителем сетки дискретизации моделируемой поверхности. Например, фокальная фигура Δ может быть торсом, конической или цилиндрической поверхностью, прямой линией (собственной или несобственной). Фокальная фигура S может быть кривой (плоской или пространственной), прямой линией, собственной или несобственной. Фигура Γ может быть произвольной поверхностью, плоскостью или линией, совпадающей с фокальной фигурой S .

С одной стороны, формирование точечных каркасов поверхностей способом конечных разностей можно выполнять непосредственно в специальной координатной системе, заменяя параметры X , Y , Z соответствующими параметрами специальной системы. С другой стороны

формирования точечных каркасов такой поверхности можно представить как соответствующее преобразование каркаса, сформированного в декартовой системе координат. Авторы справочника [3] на стр. 362 приводят трактовку такого преобразования как «Активную» точку зрения, или точку зрения «alibi» на преобразование координат, при котором каждой точке объекта в этой же координатной системе относится новая точка.

Формирование дискретных точечных каркасов поверхностей в специальных более сложных координатных системах в литературе отсутствует.

Поскольку для решения большинства прикладных задач используются традиционные координатные системы, необходимы соответствующие формулы перехода из специальной системы в традиционную. В общем случае, не имея конкретных параметров специальной координатной системы, это сделать невозможно. Поэтому такие формулы перехода необходимо выводить в каждом конкретном случае.

Рассмотрим примеры специальных координатных систем и формы перехода из них в декартову прямоугольную систему координат.

Полярная система координат на основе эвольвенты.

Фокальными фигурами конгруэнции координатных прямых являются фронтально проецирующий круговой цилиндр Δ и несобственная вертикальная прямая. Тогда конгруэнция расслаивается на плоские пучки двояко. С одной стороны пучки лучей конгруэнции принадлежат к фронтальным плоскостям, а с другой стороны – фронтально-проецирующим плоскостям, которые огибают цилиндр Δ . Началом обсчета полярного угла α является плоскостью XOY .

Каждой плоскости инциденции лучей принадлежит пучок фронтальных координатных прямых. Поэтому параметру β обобщенной координатной системы соответствует координата Y . Рассмотрим два простейших варианта выбора направляющей поверхности Γ обобщенной координатной системы.

1. Поверхность Γ совпадает с цилиндром Δ (рис. 2).

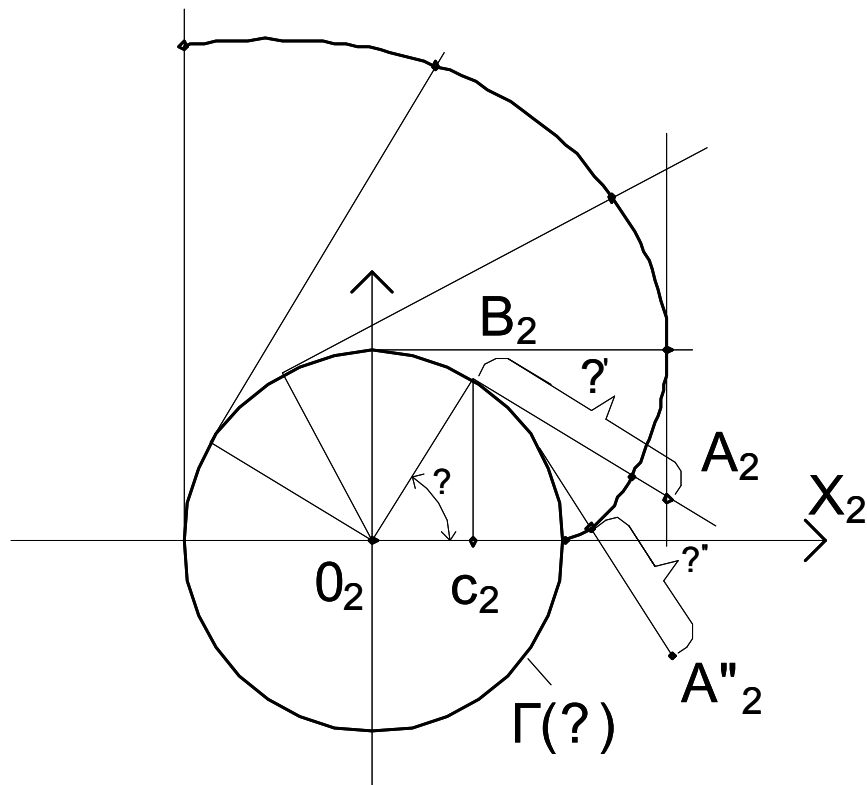


Рис. 2

Началом отсчета параметра ρ' являются образующие цилиндра Γ . В этом случае формулы перехода в декартову систему координат имеют вид:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha + \rho \sin \alpha \\ Y &= Y \\ Z &= R \sin \alpha + \rho \cos \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

2. Поверхность Γ является эвольвентным цилиндром и является началом отсчета параметра ρ'' . Тогда формулы (1) приобретают вид:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha + \frac{2\pi R \alpha \sin \alpha}{180^\circ} + \rho \sin \alpha \\ Y &= Y \\ Z &= R \sin \alpha - \frac{2\pi R \alpha \cos \alpha}{180^\circ} - \rho \cos \alpha . \end{aligned} \quad (2)$$

Тороидальная система координат (рис. 3).

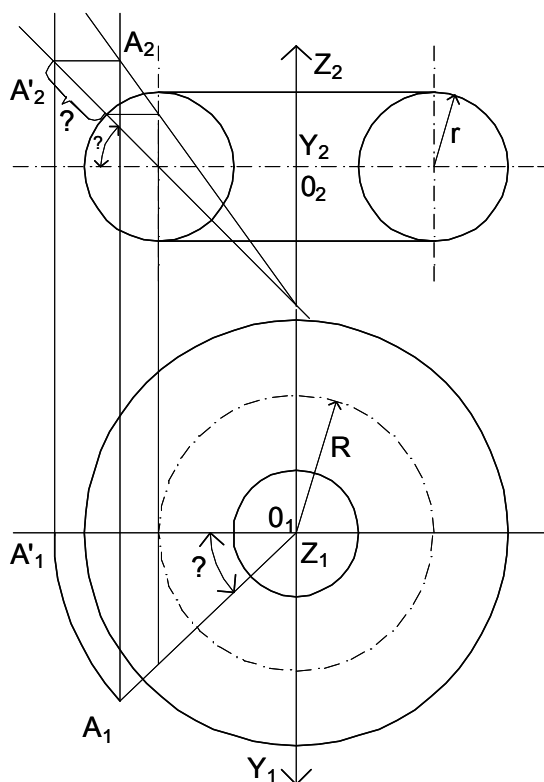


Рис. 3

Фокальными фигурами конгруэнции координатных прямых является ось OZ и осевая окружность тора

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

(3)

Конгруэнция расслаивается на множество плоских пучков лучей в вертикальных плоскостях проходящих через ось OZ и имеющих центры на осевой окружности тора. Параметры α , β и ρ повторяют параметры обобщенной координатной системы. Направляющей фигуре Δ обобщенной системы соответствует либо поверхность тора, либо осевая окружность тора.

В последнем случае формулы перехода в декартову систему координатную систему имеют вид:

$$\begin{aligned} X &= (R + \rho \cos \beta) \cos \alpha \\ Y &= (R + \rho \cos \beta) \sin \alpha \\ Z &= \rho \sin \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Если направляющей фигуре Δ соответствует поверхность тора, формулы (4) приобретают вид:

$$\begin{aligned} X &= [R + (r + \rho) \cos \beta] \cos \alpha \\ Y &= [R + (r + \rho) \cos \beta] \sin \alpha \\ Z &= (r + \rho) \sin \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 1.

Дискретный точечный каркас поверхности, изображенной на рис. 4 сформирован в полярной системе координат на основе эвольвенты окружности. Направляющей поверхностью роста биоформы является круговой цилиндр $x^2 + z^2 = 4$.

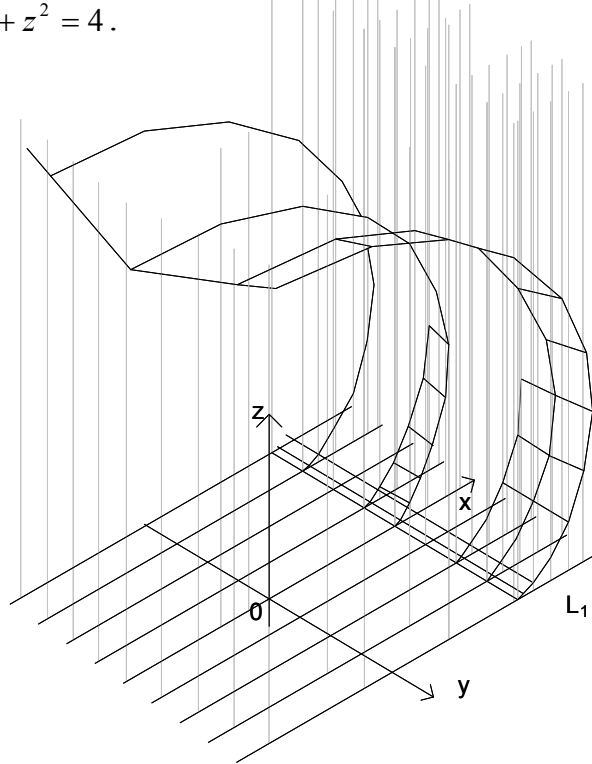


Рис. 4

Изменения формы в процессе роста задано вычислительными операторами:

$$\begin{array}{l} \text{изменение полярного угла } \alpha \quad \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} & \textcircled{+1} \end{array} + 0,07 = 0 \\ \text{изменение радиуса вектора } \rho \quad \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} & \textcircled{+1} \end{array} - 0,01 = 0 \end{array}$$

в качестве начальных условий приняты точки на прямой $l : X = 4; Z = 0; Y = ih$, где $h = 1$, и точки на эвольвенте окружности:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

с шагом $\alpha = 15^\circ$.

Пример 2

Дискретный точечный каркас поверхности, изображенной на рис. 5 сформирован в полярной системе координат на основе тора. Направляющей поверхностью роста биоформы является тор $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 9$. Поэтому для перехода в декартову систему координат используем формулы (7), где $r = 3, R = 2$, а $\alpha; \beta; \rho$ – полярные координаты.

Дискретные параметры α и β имеют постоянный угловой шаг соответственно 10° и 15° . Исходными (начальными) условиями для

определения значений параметра ρ приняты точки на кривых a и b и разностной оператор

$$\begin{array}{c} \circ \\ \circ \quad \circ \\ \circ \end{array} + P = 0$$

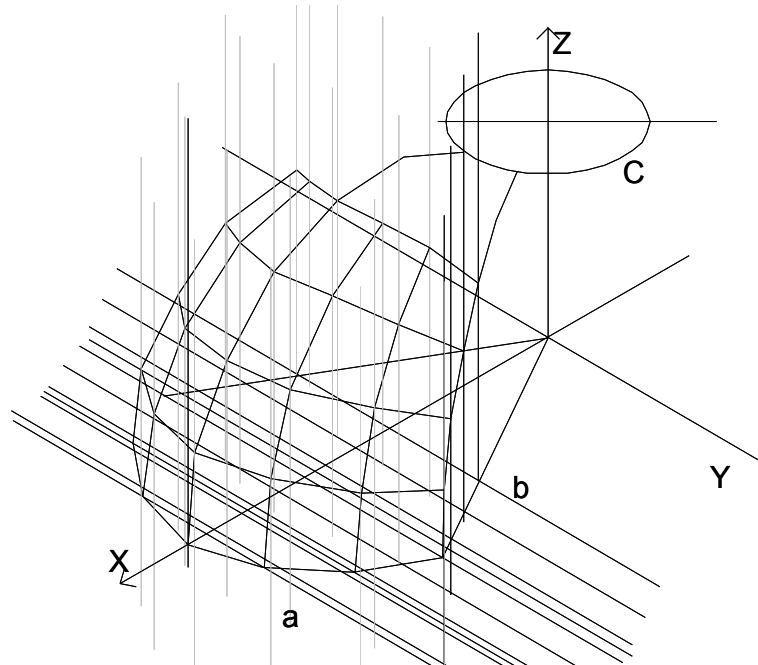


Рис. 5

Для того, чтобы поверхность в итоге роста прошла через точки окружности c

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 5, \end{cases}$$

задача с начальными условиями была заменена на задачу с краевыми условиями. Поэтому координаты узлов определены из системы конечно – разностных уравнений, составленных для каждого неизвестного узла.

Выводы. Выполненное обобщение координатных систем позволяет моделировать биоформы в процессе роста по заданной траектории или направляющей поверхности. Приведенные формулы преобразования координат позволяют описывать точечные каркасы моделируемых биоформ в традиционных координатных системах.

Литература

1. Скидан И.А. Квазисферические координаты и их применение в прикладной геометрии. « Прикладная геометрия». Вып. 23. - К.: « Будівельник», 1977. -с. 38-42.

2. Слав Л.И. Об одном подходе к конструированию нелинейных преобразований. «Прикладная геометрия и инженерная графика», вып. 35.- К.:«Будівельник»,1983 -с. 113–116.

3. Корн Г., Корн Т. «Справочник по математике для научных работников и инженеров». - М: «Наука» 1968. - 720 с.

4. Кащенко А.В., Ковальов С.Н. Дискретное моделирование принципов видоизменения биоформы в процессе ее роста.- Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. Вип. 90. - К.: КНУБА, 2012 - с. 138-144.

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРЯМКУ РОЗВИТКУ БІОФОРМИ

О.В. Кащенко

Розглянуто узагальнені координатні системи, що дозволяють моделювати біоформи в процесі росту по заданій траєкторії або поверхні. Наведено формули перетворення координат спеціальних систем на традиційні.

MODELING OF THE BIOFORM DEVELOPMENT DIRECTION

A. Kashchenko

It is considered generalized coordinate systems, allowing prototype bioform in process of the growing on given to paths or directing surfaces. It is worked out formulas of transformation coordinates of the special systems in traditional.