УДК 515.2

Д.В.Кукуруза, к.т.н.,
М.М.Піксасов, к.т.н.,
Л.Л.Запольський, к.т.н.

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА БАЗІ ФАЗОВИХ ПОРТРЕТІВ

Національний університет цивільного захисту України, м. Харків,
Український науково-дослідний інститут пожежної безпеки, м.Київ

Розглянуто якісний аналіз механічних коливальних систем, коли вантаж здійснює коливання за наявності пружини і демпфера.

Постановка проблеми. З позицій прикладної геометрії якісна теорія диференціальних рівнянь викликає інтерес тому, що вона може становити теоретичну базу методів унаочнення поведінки сім'ї інтегральних кривих диференціальних рівнянь у часі за допомогою графічних зображень, що відносяться до нового класу графічних об'єктів дослідження - до класу *фазових портретів коливальних систем*. Враховуючи динамічний характер коливального процесу, унаочнення логічно здійснювати засобами анімаційного комп'ютерного моделювання, що також становить інтерес для прикладної геометрії.

Вважається, що найважливішою подією в історії розвитку диференціальних рівнянь є створення їх *якісної теорії* [1, 2]. Оскільки розв'язки у аналітичному вигляді існують лише для досить невеликого кола диференціальних рівнянь, побудова достатньо загальної теорії в цьому напрямку виявлялася неможливою. Прийоми чисельного розв'язання рівнянь, засновані на теоремах існування, також не відкривали шляхи до загальної теорії [1 - 6].

Аналіз відомих результатів. Якісна теорія диференціальних рівнянь була одночасно створена математиками А.Пуанкаре й А.М.Ляпуновим. Задача, поставлена Пуанкаре, полягала у тому, щоб, не інтегруючи диференціальне рівняння, дослідити поводження сім'ї інтегральних кривих рівняння $y' = f(x, y)$ або системи $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = \psi(x, y)$ на всій площині тільки на основі властивостей функцій, що містяться у правих частинах рівнянь. А.Пуанкаре дав класифікацію і показав значення особливих точок інтегральних кривих, дослідив поводження останніх в околі особливих точок, увів поняття граничного циклу як замкненої інтегральної кривої, до якої наближаються по спіралях досить близькі інтегральні криві.

Дослідження творця якісних методів А.М.Ляпунова спочатку були зв'язані з конкретною задачею астрономії. Ляпунов розглядав систему *n* звичайних лінійних рівнянь

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t) \text{; (k=1,2,…,n),} \tag{1}$$

де X_k є розклади при досить малих x_k у ряди, що сходяться, по цілих ступенях x_k і дорівнюють нулю при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$; коефіцієнти при цьому або постійні, або залежать від t.

Ляпунов з'ясував, у яких випадках питання про стійкість системи (1) може бути розв’язано за першим наближенням, тобто шляхом дослідження системи, у якій функції X_k заміняються членами розкладу першого ступеня відносно x_k. Зазначимо, що вивчення системи (1) при цьому проводилося лише *якісними методами*, тобто без її безпосереднього інтегрування.

Подальший розвиток якісної теорії диференціальних рівнянь визначався глибокими зв'язками досліджень із проблемами математичного природознавства і техніки (задачі аеро- і гідродинаміки, теорії пружності, сейсмології, тощо).

Постановка завдання. Розглянути якісний аналіз механічних коливальних систем, коли вантаж здійснює коливання за наявності пружини і демпфера.

Основна частина. Вивченням механічних коливань займаються фахівці багатьох галузей точних і інженерних наук: теоретичної механіки, прикладної та обчислювальної математики, теорії коливань механізмів, тощо. Найпоширеніші види коливань, які досліджуються на практиці, описуються нелінійними *диференціальними рівняннями другого порядку*. Тому розглянемо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2}$$

і представимо динамічну коливальну систему, що складається з елементарної частки одиничної маси, яка рухається по осі x і на котру діє сила $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Тоді диференціальне рівняння (2) буде рівнянням руху частки. Значенням x і dx/dt, які у будь-який момент часу характеризують стан системи, відповідає точка на площині $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, що називається *площиною станів* або *фазовою площиною* [2, 8].

Фазова площина зображує сукупність усіх можливих станів розглянутої динамічної системи. Кожному новому станові системи відповідають різні точки фазової площини. Таким чином, зміні станів системи можна поставити у відповідність рух деякої точки по фазовій площині. Таку точку називають *зображуючою точкою*. Траєкторія зображуючої точки, називається *фазовою траєкторією*, а швидкість цієї точки - *фазовою швидкістю*. У літературі (особливо навчальній) для траєкторії зображуючої точки більш вживаним є термін *фазовий портрет*.

Якщо ввести змінну $y = \frac{dx}{dt}$, то рівняння (2) можна звести до системи двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y; \qquad \frac{dy}{dt} = f(x, y). \tag{3}$$

При цьому, якщо *t* розглядати як параметр, то розв'язком системи (3) буде пара функцій *x(t)* і *y(t),* що визначають на фазовій площині (*x, y*) криву (*фазову траєкторію*, або *фазовий портрет*).

Можна показати, що система (3), як і більш загальна виду

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y); \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \tag{4}$$

де функції X і Y неперервні разом зі своїми частинними похідними в деякій області D, має таку властивість.

Якщо *x(t), y(t)* - розв'язок диференціальної системи (4), то

$$x = x(t + C); \quad y = y(t + C), \tag{5}$$

також є розв'язком розглянутої диференціальної системи (4), де C - довільна дійсна постійна. Розв'язкам (5) при можливих значеннях C відповідатиме на фазовій площині (*x, y*) та ж сама фазова траєкторія. Далі, якщо дві фазові траєкторії мають спільну точку, то вони збігаються. При цьому зростанню або убуванню параметра *t* відповідає визначений рух зображуючої точки по траєкторії.

На рис. 1 наведено традиційну схему коливальної системи вантажу з пружиною та демпфером (тобто вантаж є підресорений).

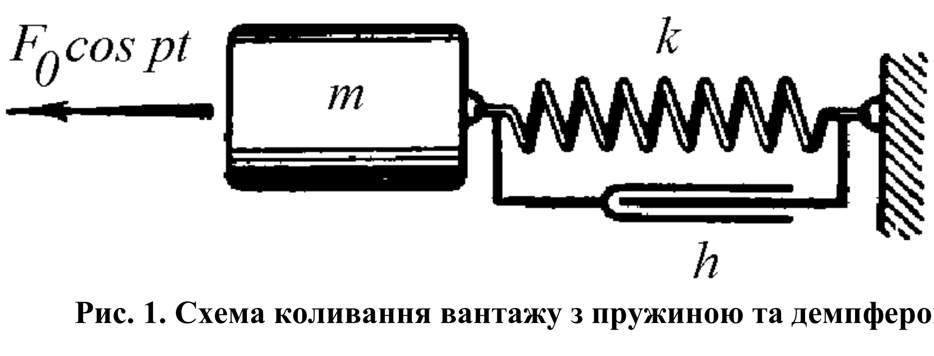

Рис. 1. Схема коливання вантажу з пружиною та демпфером

Маємо таке рівняння коливань вантажу за наявності сил тертя [3]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos pt,$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega^2x=f_0\cos pt, \qquad (6)$$

де x – зміщення, m – маса вантажу, яка коливається, h – коефіцієнт сили тертя, k – жорсткість пружини, δ - коефіцієнт затухання, ω - власна частота коливань, F_0 – амплітуда зовнішньої сили, p – колова частота зовнішньої сили.

Відомо, що диференціальне рівняння (6) можна тотожно замінити на систему диференціальних рівнянь (де $f_0 = F_0 / m$)

$$\frac{dx}{dt}=y; \qquad \frac{dy}{dt}=f_0\cos pt-2\delta y-\omega^2x. \qquad (7)$$

При цьому величина y буде швидкістю вантажу. З теорії коливань [3] відомий точний розв'язок рівнянь (7). Але цікавішою є інтерпретація цього розв'язку на площині в системі координат Oxy, в результаті чого одержується графічне зображення, яке в якісній теорії диференціальних рівнянь називається „фазовим портретом ".

Для побудови фазових портретів на фазовій площині та у фазовому просторі було складено maple-програму розв'язання системи диференціальних рівнянь (7), головний фрагмент якої має вигляд [10, 11]:

```
  sys := [diff(x(t),t) = y(t),
         diff(y(t),t) = f0*cos(p*t) -
         2*delta*y(t) – omega^2*x(t)]:
 sol := dsolve(sys):

 assign(sol): x(t), y(t):

 for i from 1 to 3 do
 xx := x(t); yy := y(t);
 f1 := x(t) = i/5;
 f2 := y(t)=0;
 unassign('_C1'): _C1:  unassign('_C2'): _C2:
 t := 0:
 sol2 := solve({f1, f2}, {_C1, _C2}):
 assign(sol2): _C1, _C2;
 unassign('t'): t:
 xxx[i]:= xx;     yyy[i]:= yy;
```

```
end do:

unassign('t'): t:

spacecurve({[xxx[1](t), yyy[1](t), t],
           [xxx[2](t), yyy[2](t), t],
           [xxx[3](t), yyy[3](t), t]},
   t=0..100, color=black,
  numpoints=1500,labels=[x,y,t], axes=BOXED,
  orientation=[-90, 0], thickness=2,
  axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);

spacecurve({[xxx[1](t), yyy[1](t), t],
           [xxx[2](t), yyy[2](t), t],
           [xxx[3](t), yyy[3](t), t]},
   t=0..100, color=black,
  numpoints=500,labels=[x,y,t], axes=BOXED,
  orientation=[-130, 65], thickness=2,
  axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
```

На рис. 2 і 3 наведено приклад системи, де має статися *резонансне явище* (`m = 50; h = 0.8; k = 25; p = sqrt(k/m); F0 = 1`). Про це свідчать побудовані за допомогою складеної програми траєкторії, які ніби «намотані» на конічну поверхню.

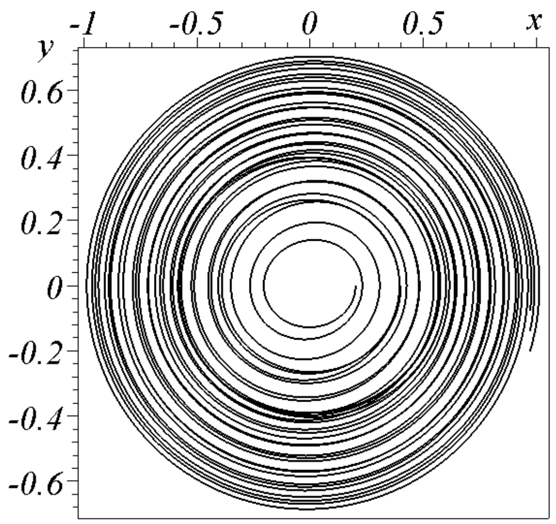

Рис. 2. Фазовий портрет коливальної системи в резонансі

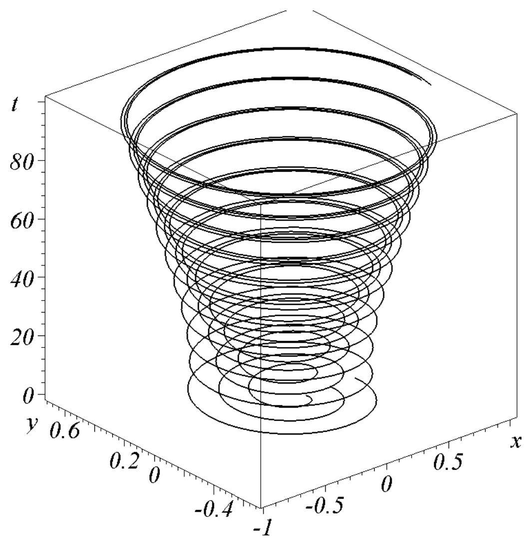

Рис. 3. Узагальнений фазовий портрет системи в резонансі

Для порівняння наведено приклад (рис. 4 і 5) системи зі *сталим коливанням* (`m = 1;  h = 0.5; k = 10; F0 = 1.5; p = 2.5`). Про це свідчать траєкторії, які ніби намотані на циліндричну поверхню.

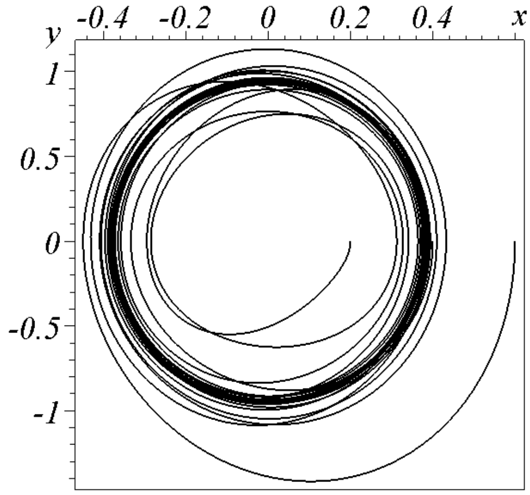

Рис. 4. Фазовий портрет сталої коливальної системи

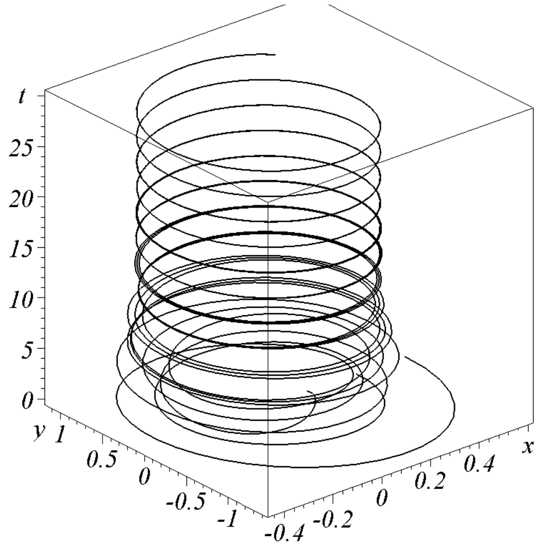

Рис. 5. Просторовий фазовий портрет сталої коливальної системи

На рис. 6 і 7 наведено *систему з биттям* під час коливань (`m =10; h = 0.1; k = 5; p = sqrt(k/m)+0,1; F0 = 1`). Про це свідчать траєкторії, які ніби намотані на „фасонну ” поверхню обертання.

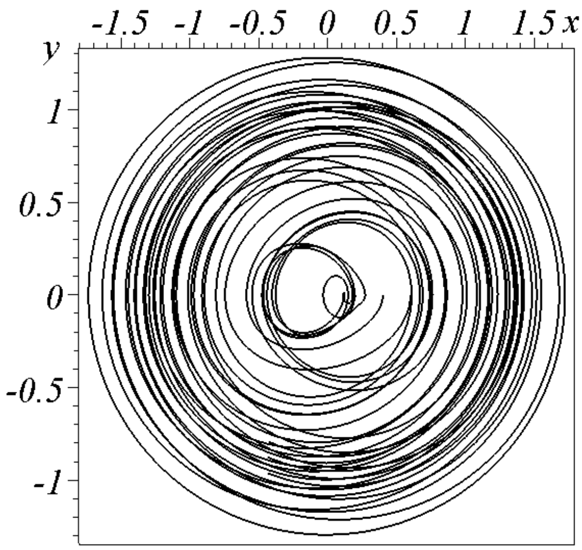

Рис. 6. Фазовий портрет коливальної системи з биттям

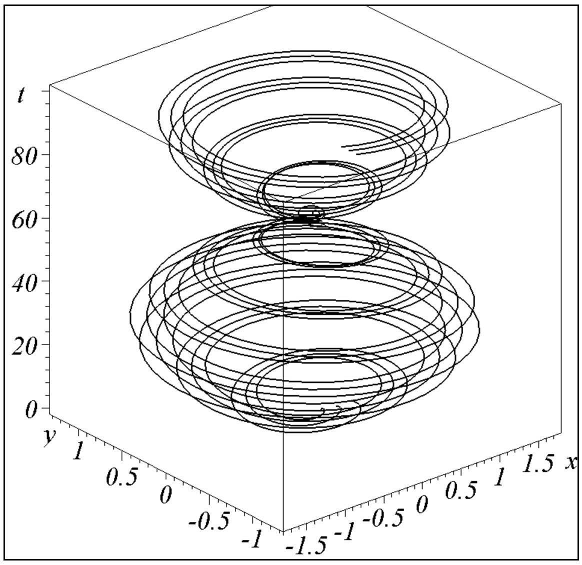

Рис. 7. Узагальнений фазовий портрет системи з биттям

Висновки. За допомогою фазових портретів можна пояснити деякі прояви механічних коливальних систем, коли вантаж здійснює коливання за наявності пружини і демпфера.

Література

1. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. / *И.М.Бабаков /* М., ГИТТЛ, 1958. – 628 с.

2. *Пановко Л.Г.* Введение в теорию механических колебаний. - / *Л.Г. Пановко /* М.: Физматгиз, - 1971 2-е Изд 1989

3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнений в приложениях. – / *В.В. Амелькин* / М.: Наука, 1987. – 158 с.

4. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. – / *С.П.Стрелков* / М.: Наука, 1964. – 438 с.

5. *Эрроусмит Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - / *Д. Эрроусмит, К.Плейс* /М.: Мир, 1986. – 243 с.

6. *Яблонский А.А.* Курс теории колебаний. – / *А.А.Яблонский, С.С. Норейко* / М.: Высшая школа, 1966. – 255 с.

7. *Андронов А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. / *А.А.Андронов, Е.А.Леонтотч, И.П.Гордон, А.Г. Майер* / М., 1967.

8. *Рабинович М.И.* Введение в теорию колебаний и волн. / *М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков* / М.: Наука, 1992

9. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. – / *В.Л. Бидерман* / М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.

10. *Ларін О.М.* Фазові портрети коливань надресорного вантажу, спричинених періодичними нерівностями шляху // *О.М.Ларін, Б.І.Кривошей* / Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 10. – С. 25-32

11. *Ларін О.М.* Дослідження руху транспортного засобу за допомогою графічних зображень // *О.М.Ларін, Б.І.Кривошей* / Праці Таврійської держ. агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2005. Вип. 4. - Т. 30 - С.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ

Д.В.Кукуруза, М.М.Пиксасов, Л.Л.Запольский

Рассмотрен качественный анализ механических колебательных систем, когда груз осуществляет колебание при наличии пружины и демпфера.

THE QUALITATIVE ANALYSIS OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS ON THE BASIS OF PHASE PORTRAITS

D. Kukuruza, M. Piksasov, L. Zapolsky

The qualitative analysis of mechanical oscillatory systems when freight carries out fluctuation in the presence of a spring and a damper is considered.