УДК 519.6

А. О. Пашко[1], д.ф.-м.н., с.н.с.,
С. А. Теренчук[2], к.ф.-м.н., доц.,
Б. М. Єременко[2], к.т.н.

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОЛІВ ДЛЯ РОЗВЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
[2]Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Стаття присвячена моделюванню строго субгауссових випадкових процесів та полів при чисельному розв'язуванні задачі теплопровідності з випадковими початковими та крайовими умовами. Для побудови реалізацій випадкових процесів та полів використовується їх спектральне представлення у вигляді випадкових рядів або стохастичних інтегралів. Для моделювання використовувались випадкові процеси та поля із стандартними спектральними щільностями.

Постановка проблеми та аналіз досліджень і публікацій. Велика кількість прикладних задач описуються крайовими задачами, серед них, задачі будівельної механіки, задача теплопровідності, задачі теорії пружності [1 – 2]. В багатьох із них початкові та крайові умови задаються випадковими функціями. Розв'язування таких задач опирається на оцінювання статистичних характеристик розв'язків. Використання методів статистичного моделювання дозволяє не тільки оцінювати статистичні властивості розв'язків, а також, і самі розв'язки в конкретних точках [3 – 4]. Тобто, можна будувати реалізації розв'язків на заданих інтервалах, а при багатократному моделюванні оцінювати середнє значення та інші характеристики розв'язків. Таким чином, використання методів статистичного моделювання дозволяє проводити повноцінний обчислювальний експеримент.

Формулювання цілей та завдання статті. Мета статті – адаптувати методи статистичного моделювання випадкових процесів та полів до розв'язування задачі теплопровідності з випадковими початковими та крайовими умовами. В роботі розглядаються строго субгауссові центровані дійсні випадкові поля.

Алгоритми статистичного моделювання випадкових полів прості в реалізації, а це дозволяє оперативно розв'язувати задачі теплопровідності для тіл різної форми і складності границі.

Математична модель розповсюдження тепла в деякому середовищі, що заповнене речовиною з густиною ρ, питомою теплоємністю C та коефіцієнтом теплопровідності k має вигляд [3]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x,t) + f(x,t),$$

де $u(x,t)$ – температура середовища в точці x в момент t, $f(x,t)$ – зовнішні впливи, $\Delta u(x,t)$ – оператор Лапласа, $a^2 = \dfrac{k}{\rho \cdot C}$.

Нехай D довільна область середовища, що містить x, границя ∂D достатньо гладка. В процесі спостереження за розподілом тепла, можна обчислити значення $u(x,t)$ в кожній точці середовища в початковий момент t_0 і в кожній точці x_0 границі середовища ∂D для всіх t на деякому проміжку $t_0 < t < T$. Ці значення задають початкові умови: $u(x,t_0) = \xi(x)$, $x \in D$ та крайові умови $u(x_0,t) = \eta(t)$, $x_0 \in \partial D$, $t \in \left(t_0, T\right)$ [3].

Розглядаються задачі коли джерела тепла відсутні:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = C\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

або присутні

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + \zeta(x,t) = C\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

де $\zeta(x,t)$ – щільність теплових джерел в точці x в момент t [3].

Цікавим, з прикладної точки зору, є випадок, коли $\zeta(x,t)$, $\xi(x)$ та $\eta(t)$ випадові процеси чи поля. Як правило, розглядаються гауссові випадкові поля. Однак, за рахунок точності обчислень, при реальному моделюванні отримуємо строго субгауссові випадкові процеси та поля. Властивості субгауссових випадкових величин та процесів досліджуються в [5].

Основна частина. Алгоритм розв’язання здачі теплопровідності наступний.

1. Задаємо надійність $\alpha > 0$ і точність $\delta > 0$ моделювання.
2. Для заданих надійності $\alpha > 0$ і точності $\delta > 0$ будуємо моделі випадкових процесів та полів, а саме, $\zeta(x,t)$, $\xi(x)$ та $\eta(t)$.
3. Розв’язуємо задачу теплопровідності чисельними методами. Отримуємо реалізацію розв’язку.
4. Будуємо наступні реалізації випадкових полів $\zeta(x,t)$, $\xi(x)$ та $\eta(t)$.
5. Отримуємо необхідну кількість реалізацій для знаходження статистичних характеристик розв’язку (на практиці кількість реалізацій перевищує тисячу).

Нехай (Ω, B, P) – стандартний ймовірнісний простір, $\left(R^d, \Sigma, \nu\right)$ – деякий вимірний простір, Σ – борелівська σ- алгебра, $\nu(\cdot)$ – скінчена міра.

Кореляційна функція дійсного центрованого однорідного випадкового поля $X = \left\{X(\vec{t}),\quad \vec{t} \in R^d\right\}$ допускає зображення [6]:

$$B(\vec{t}\,) = \int\limits_{R^d} cos(\vec{t}, \vec{\lambda}\,)\, d\nu(\vec{\lambda}\,),$$

де $(\vec{t}, \vec{\lambda})$ – скалярний добуток, $\nu(\cdot)$ – скінчена міра на σ– алгебрі борелівських множин в R^d, а саме поле має зображення в вигляді стохастичного інтеграла [6]:

$$X(\vec{t}) = \int_{R^d} \cos(\vec{t}, \vec{\lambda})\, dZ_1(\vec{\lambda}) + \int_{R^d} \sin(\vec{t}, \vec{\lambda})\, dZ_2(\vec{\lambda}),$$

де $Z_1(\vec{\lambda})$ и $Z_2(\vec{\lambda})$ – некорельовані випадкові міри, що підпорядковані мірі $v(\cdot)$. Функція $v(\lambda)$ називається спектральною функцією поля.

Якщо $v(\lambda)$ абсолютно неперервна, тобто, допускає представлення $v(\lambda) = \int_{R^d} f(\lambda) d\lambda$, то $f(\lambda)$ називається спектральною щільністю однорідного випадкового поля.

Нехай $\rho(\vec{t}, \vec{s})$ – деяка евклідова метрика в R^d, або еквівалентна їй метрика.

Наприклад, $\rho(\vec{t}, \vec{s}) = \max_{i=1,\dots,d} |t_i - s_i|$, де $\vec{t}^{\,T} = (t_1, \dots, t_d)$, $\vec{s}^{\,T} = (s_1, \dots, s_d)$.

Нехай $T \subset R^d$ – множина виду $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \le L\}$, де $L > 0$ - деяке число. При моделюванні поля $X(\vec{t})$ можна розглядати і інші компакти в R^d.

Нехай A – однозв'язна, з кусково – гладкою границею область в R^d, D_n – деяке розбиття області A на n однозв'язних областей $A_1, A_2, \dots, A_n$ з кусково-гладкими границями, $\vec{\lambda}_i, i = 1, \dots, n$ – фіксовані точки в R^d такі, що $\vec{\lambda}_i \in A_i$. Позначимо $X_n(\vec{t}, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\cos(\vec{t}, \vec{\lambda}_i) Z_1(A_i) + \sin(\vec{t}, \vec{\lambda}_i) Z_2(A_i) \right)$.

Випадкове поле $X_n(\vec{t}, A)$ – будемо називати апроксимаційною моделлю поля $X(\vec{t})$ або A_p – моделлю.

Нехай $\delta > 0$ і $\alpha > 0$, $\alpha \in (0,1)$ – деякі числа.

Будемо говорити, що $X_n(\vec{t}, A)$ наближає поле $X(\vec{t})$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю α в деякому функціональному просторі, якщо:

$$P\left\{ \| X(\vec{t}) - X_n(\vec{t}, A) \| > \delta \right\} \le 1 - \alpha, \tag{1}$$

де $\| \cdot \|$ – норма функціонального простору.

В роботах [6,7] були знайдені оцінки (1) для просторів L_2 та L_p, $p \ge 1$, в роботі [8] – в просторі неперервних функцій. В даній роботі будемо використовувати результати для простору L_2.

Твердження 1. Нехай $X = \{X(\vec{t}), \ \vec{t} \in R^d\}$ – гауссове випадкове поле. Модель $X_n(\vec{t}, A)$ наближає поле $X(\vec{t})$ з надійністю $\alpha > 0$ і точністю $\delta > 0$, якщо область A та її розбиття D_n вибрано так, що мають місце нерівності [6]:

$$B(D_n, A) < \delta,$$

$$exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\left(B(D_n, A)\right)^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B(D_n, A)}\right\} < \alpha,$$

де $B(D_n, A) = \int_T B(\vec{t}, D_n, A) d\vec{t}$,

$$B(\vec{t}, D_n, A) = \sum_{j=0}^{n} \int_{\Delta_j} 4\sin^2 \frac{\left(\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}_j\right)}{2} dv(\vec{\lambda}) + \quad v(R^d \setminus A).$$

Виберемо область A и її розбиття D_n таким чином: $A = \left\{\vec{\lambda} : \rho(\vec{\lambda}, 0) \le \Lambda \right\}$, $\Lambda > 0$. Для $m > 0$ позначимо $k_{ri} = \frac{\Lambda r_i}{m}$, $i = 1,2,...,d$, де r_i – деякі числа, $-m \le r_i \le m-1$, $\vec{\lambda}(r_1,....,r_d) = \left(k_{r1},...,k_{rd}\right)^T$. Розбиття D_n визначимо елементами $A_{(r_1,...,r_d)} = \left\{\vec{\lambda} : k_{rs}\ \lambda_s < k_{r(s+1)},\ s = 1,2,...,d \right\}$.

При цьому $n = (2m)^d$, а A_p - модель поля $X(\vec{t})$ має вигляд:

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{\substack{-m \le r_i \le m-1 \\ i=1,...,d}} cos\left(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_1,...,r_d)\right) Z_1\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right) + $$
$$+ sin\left(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_1,...,r_d)\right) Z_2\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right).$$

Тоді при моделюванні випадкові величини $\left\{Z_1\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right), Z_2\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right)\right\}$ можна розглядати як множину некорельованих строго субгауссових випадкових величин таких, що:

$$E\,Z_1^2\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right) = E\,Z_2^2\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right) = v\left(A_{(r_1,...,r_d)}\right).$$

В цьому випадку має місце оцінка:

$$B(D_n, A) \le \frac{2^d \Lambda^2 d^2 L^{d+2}}{3m^2} v(A) + \quad v(R^d \setminus A)(2L)^d,$$

Найбільш часто в прикладних задачах використовуються випадкові поля з спектральними щільностями [1 – 2]:

$$f_1(\vec{\lambda}) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi\left(\alpha^2 + \left|\vec{\lambda}\right|^2\right)}, \qquad f_2(\vec{\lambda}) = \frac{\alpha\sigma^2\left(a^2 + \left|\vec{\lambda}\right|^2\right)}{\pi\left(4\alpha^2\left|\vec{\lambda}\right|^2 + \left(\left|\vec{\lambda}\right|^2 - a^2\right)^2\right)} \text{ та}$$

$$f_3(\vec{\lambda}) = \frac{2\alpha\sigma^2 a^2}{\pi\left(4\alpha^2\left|\vec{\lambda}\right|^2 + \left(\left|\vec{\lambda}\right|^2 - a^2\right)^2\right)}.$$

Нехай $A = \left\{\vec{\lambda} : \left|\vec{\lambda}\right| \le \Lambda\right\}$, $R = \left\{d_i, i = 0,1,...M\right\}$ – деяке розбиття області A, $\vec{\lambda}_i \in d_i$. Модель будується за формулою:

$$X(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{M}\left(cos(\vec{x}, \vec{\lambda}_i)\xi_{1i} + sin(\vec{x}, \vec{\lambda}_i)\xi_{2i}\right),$$

де $\left\{\xi_{1i}, \xi_{2i}\right\}$- строго субгауссові незалежні випадкові величини з $E\xi_{1i} = E\xi_{2i} = 0$, $E\xi_{1i}^2 = E\xi_{2i}^2 = v_l(d_i)$, $v_l(d_i) = \iint_{d_i} S_l(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}$.

Отримані результати переносяться на субгауссові випадкові процеси. В задачах теплопровідності в ізотропному середовищі необхідно моделювати випадкові поля на сфері. Ізотропне випадкове поле на сфері можна представити у вигляді [9]:

$$\xi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=}^{h(m,d)} \xi_m^l S_m^l(x),$$

де $\{\xi_m^l\}$– незалежні строго субгауссові випадкові величини, $E(\xi_m^l)^2 = \sigma_m^2$, $l = 1,...,h(m,d)$, $S_m^l(x)$– ортогональні сферичні гармоніки порядку m, $h(m,d)$ – кількість гармонік і виконується умова $\sum_{m=1}^{\infty} h(m,d)\sigma_m^2 < \infty$.

Модель будується у вигляді $\xi_M(x) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{l=}^{h(m,d)} \xi_m^l S_m^l(x)$.

Для побудови моделі із заданими надійністю $\alpha > 0$ та точністю $\delta > 0$ для знаходження *M* в моделі $\xi_M(x)$ використовуються оцінки:

$$\frac{\delta}{(J(M))^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{\delta^2}{2J(M)}\right\} exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \le 1-\alpha,$$

де $J(M) = \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} h(k,d)\sigma_k^2\right)$.

Наприклад, для $d = 3$ покладемо $b_m^2 = \dfrac{1}{(1+m^{2k})^2}$, $k \ge 1$. В цьому випадку $h(3,m) = 2m+1$.

В таблиці 1 приведені значення для різних значень точності і надійності.

Висновки. В роботі розглянуто теоретичні основи моделювання гауссових випадкових процесів та полів, що використовуються в задачах теплопровідності та запропоновано алгоритм обчислювального експерименту для розв’язування зазначеної задачі, якій може знайти застосування при моделюванні теплообміну в будівлях і спорудах різного призначення

Для розв’язання даної задачі розроблено програмне забезпечення в середовищі MathCAD.

Таблиця 1

Кількість доданків в моделі для різних точності і надійності

α	δ	*M(k=1)*	*M (k=2)*
0.95	0.1	34	4
0.95	0.05	67	8
0.95	0.01	332	12
0.99	0.1	42	5
0.99	0.05	76	8
0.99	0.01	360	14

Література

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем / *В. В. Болотин.* – М. : Наука, 1979. – 336 с.
2. *Yeremenko B.* Statistical Simulation of Accidental Loads in the Problems of Constructional Mechanics / *B. Yeremenko, A. Pashko, S. Terenchuk* // Advanced Materials Research. – Vol 1122. – P. 249–252.
3. *Сабельфельд К. К.* Методы Монте-Карло в краевых задачах / *К. К. Сабельфельд.* – Новосибирск : Наука, 1989. – 280 с.
4. *Елепов Б. С.* Решение краевых задач методом Монте-Карло / *Б. С. Елепов, А. А. Кронберг, Г. А. Михайлов, К. К. Сабельфельд.* – Новосибирск : Наука, 1980. – 175 с.
5. *Булдыгин В. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов / *В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко.* Киев : ТВиМС, 1998 – 288 с.
6. *Пашко А. О.* Чисельне моделювання гауссових однорідних випадкових полів. / *А. О. Пашко* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія:математика і інформатика. – 2013. – Вип. 24, №1. – С.116–120.
7. *Пашко А. О.* Моделювання гауссових однорідних та ізотропних випадкових полів / *А. О. Пашко* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія:математика і інформатика. – 2013. – Вип. 24, № 2. – С. 138–144.
8. *Пашко А. О*. Оцінка точності моделювання гауссових випадкових процесів в рівномірній метриці / *А. О. Пашко* // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2014. – № 1(115). – С.119–131.
9. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей / *М. И. Ядренко*. – К. : Вища школа, 1980. – 220 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пашко А. О., Теренчук С. А., Еременко Б. М.

Статья посвящена моделированию строго субгауссовых случайных процессов и полей при численном решении задачи теплопроводности со случайными начальными и краевыми условиями. Для построения реализаций случайных процессов и полей используется их спектральное представление в виде случайных рядов или стохастических интегралов. Для моделирования использовались случайные процессы и поля со стандартными спектральными плотностями.

SIMULATION OF RANDOM PROCESSES AND FIELDS FOR SOLVING THE HEAT

A. Pashko, S. Terenchuk, B. Yeremenko

The article is devoted strictly sub-Gaussian modelling of random processes and fields in the numerical solution of heat conduction problem with random initial and boundary conditions. To construct realizations of random processes and fields used their spectral representation in the form of a series of random or stochastic integrals. For modeling used random processes and fields with standard spectral densities