

## СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

*Сформовано прямі умови оптимальності при побудові бажаних фазових траєкторій рухомих об'єктів з максимальною швидкістю або мінімумом витрат енергії. Розвинено процедуру синтезу керуючих функцій, які реалізуються за допомогою спеціальних перемикальних структур ланцюгів зворотних зв'язків. Наведено результати моделювання.*

*Сформированы прямые условия оптимальности при построении желаемых фазовых траекторий морских подвижных объектов с максимальным быстродействием или минимумом затрат энергии. Получила развитие процедура синтеза управляющих функций, которые реализуются с помощью специальных переключаемых структур цепей обратных связей. Приведены результаты моделирования.*

*Direct optimality conditions in the construction of the desired phase trajectories of movable objects with a maximum speed or minimum cost of energy are formed. Procedure for the synthesis of control functions has been developed and that are implemented with the structures of special switching bodies feedback loops. The simulation results has been presented.*

**Введение.** Актуальность задачи оптимальной стабилизации подвижных (инерционных) объектов различных типов обусловлена необходимостью, с одной стороны, минимальных расходов энергии управления в нормальных (штатных) режимах функционирования объектов, а с другой, -- максимального быстродействия в экстремальных условиях при обеспечении высоких требований к точности стабилизации. К данному классу задач относится стабилизация морских судов в открытом море на заданном курсе в условиях воздействия морского волнения, течения и ветра с минимальными затратами энергии, а также стабилизация судна в ограниченных акваториях (каналах, проливах и т.п.), когда приоритетными являются требования максимального быстродействия в условиях необходимости обеспечения заданной безопасной траектории при действии экстремальных возмущений.

Задачи стабилизации подвижных объектов при движении по заданной траектории предполагает создание эффективных, физически реализуемых прикладных алгоритмов управления и требует применения дуального подхода к оптимальному управлению в условиях неполной определенности [4]. Для

подобных алгоритмов фундаментальным и постоянно развивающимся элементом является управление с обратными связями [1,5,11], в том числе системы с переменной структурой [2]. Однако, например, применение при управлении в условиях неопределенности систем с переменной структурой для создания скользящих режимов [2] требует повышенных расходов энергии и частых переключений, что может приводить к значительному снижению работоспособности, для органов управления судна. При решении задач оптимального управления основной и принципиальной трудностью при использовании классических методов синтеза является необходимость решения краевых задач для синтеза программного управления и матричных уравнений Риккати при построении оптимальных линейных регуляторов для многомерных динамических объектов. Формирование критериев оптимальности на основе квадратичных критериев оптимальности предполагает формализацию матриц весовых коэффициентов, что не всегда может быть сделано корректно или требует выполнения дополнительных процедур вычислений [5].

**Постановка задачи.** В настоящей статье ставится задача формирования условий оптимальности движения многомерных подвижных объектов, которые не предполагают

использования квадратичных. Достаточно условных критериев оптимальности стабилизации подвижных объектов, а также развития на основе условий оптимальности процедуры синтеза управляющих функций, обеспечивающих движение по данным траекториям стабилизации.

Предлагаемый подход базируется на использовании обратных связей с переменной структурой [8,9], которые позволяют решать практические задачи построения оптимальных траекторий для разных критериев оптимальности и вида граничных условий. При этом движение по отрезкам оптимальной траектории обеспечивается управляющими функциями в цепях обратной связи, которые имеют возможность переключения для перехода с текущего отрезка траектории на заданный отрезок.

Планирование траектории перехода объекта для заданных условий оптимальности и граничных условий заключается в определении необходимого количества отрезков траектории с постоянными значениями соответствующих производных фазовых переменных, а также моментов времени переключения управляющих функций в цепях обратных связей при переходе с начального отрезка на заданный отрезок траектории.

Переключение управляющих функций изменяет структурную конфигурацию обратных связей и позволяет решить задачу обеспечения необходимого порядка производной фазовой переменной с соответствующим позитивным или негативным постоянным значением.

**Формирование условий оптимальности стабилизации подвижных объектов.** Для формирования условий оптимальности траекторий на основе оценки затрат кинетической энергии в горизонтальной плоскости и равных граничных условиях рассмотрим процесс стабилизации динамического объекта по двум возможным траекториям, которые описываются следующими уравнениями

$$\mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(0) + \dot{\mathbf{X}}(0)T_1 + \dots + \mathbf{X}^{(s)}(0)\frac{T_1^s}{s!}, \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(T_2) = \mathbf{X}(0) + \dot{\mathbf{X}}(0)T_2 + \dots + \mathbf{X}^{(r)}(0)\frac{T_2^r}{r!}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{X}(0)$ ,  $\mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(T_2)$  – векторы начальных и конечных координат состояния;  $T_1, T_2$  – время движения по каждой из траекторий;  $s > r$  – порядок высших производных вектора координат состояния.

Изменение кинетической энергии динамического объекта для первой траектории будет иметь вид

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{X}}^T(T_1)\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}(T_1) - \dot{\mathbf{X}}^T(0)\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}(0)],$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица масс и моментов инерции динамического объекта;

$$\dot{\mathbf{X}}(T_1) = \dot{\mathbf{X}}(0) + \ddot{\mathbf{X}}(0)T_1 + \dots + \mathbf{X}^{(s)}(0)\frac{T_1^{s-1}}{(s-1)!};$$

для второй –

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{X}}^T(T_2)\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}(T_2) - \dot{\mathbf{X}}^T(0)\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}(0)],$$

$$\text{где } \dot{\mathbf{X}}(T_2) = \dot{\mathbf{X}}(0) + \ddot{\mathbf{X}}(0)T_2 + \dots + \mathbf{X}^{(r)}(0)\frac{T_2^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Чтобы оценить энергию, необходимую для перехода объекта управления из начального состояния в заданное конечное состояние, по траектории (1) получим с учетом представления квадратичной формы

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= E_{1T} - E_{10} = \\ &= \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(T_1) \dot{x}_k(T_1) - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \left\{ \left[ \dot{x}_i(0) + \dots + \frac{x_i^{(s)}(0)T_1^{s-1}}{(s-1)!} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \dot{x}_k(0) + \dots + \frac{x_k^{(s)}(0)T_1^{s-1}}{(s-1)!} \right] \right\} - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0). \end{aligned}$$

Для траектории (2) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta E_2 &= E_{2T} - E_{20} = \\ &= \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(T_2) \dot{x}_k(T_2) - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \left\{ \left[ \dot{x}_i(0) + \dots + \frac{x_i^{(r)}(0)T_2^{r-1}}{(r-1)!} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \dot{x}_k(0) + \dots + \frac{x_k^{(r)}(0)T_2^{r-1}}{(r-1)!} \right] \right\} - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0). \end{aligned}$$

Предположим,  $\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2 > 0$ . Можно показать, что для доказательства данного утверждения при условии  $x_i(0) > 0$ ,

а также принятия без сужения для рассмотрения  $s = r + 1$  достаточно рассмотреть положительность выражений вида

$$\begin{aligned} & [m_{ik}\dot{x}_i(T_1) - m_{ik}\dot{x}_i(T_2)]; \\ & [m_{ik}\dot{x}_k(T_1) - m_{ik}\dot{x}_k(T_2)]; \\ & [m_{ik}\dot{x}_i(T_1)\dot{x}_k(T_1) - m_{ik}\dot{x}_i(T_2)\dot{x}_k(T_2)] \end{aligned}$$

или, что тождественно, вида

$$[\dot{x}_i(T_1) - \dot{x}_i(T_2)] > 0, [\dot{x}_k(T_1) - \dot{x}_k(T_2)] > 0.$$

Тогда, например для  $i$ -й координаты объекта, запишем

$$\begin{aligned} & \dot{x}_i(0)T_1 + \dots + x_i(0)\frac{T_1^r}{(r)!} - \dot{x}_i(0)T_2 - \dots \\ & - x_i(0)\frac{T_2^{r-1}}{(r-1)!} = \dot{x}_i(0)(T_1 - T_2) + \dots + \\ & + x_i(0)\frac{T_1^r - T_2^r}{(r)!} + x_i(0)\frac{T_2^r}{(r)!} = \\ & = S_i + x_i(0)\frac{T_2^r}{(r)!} > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } S_i = \dot{x}_i(0)(T_1 - T_2) + \dots + x_i(0)\frac{T_1^r - T_2^r}{r!}.$$

В то же время из условия  $x_i(T_1) = x_i(T_2)$  следует, что

$$\begin{aligned} & x_i(0) + \dot{x}_i(0)T_1 + \dots + x_i(0)\frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} - \\ & - x_i(0) - \dot{x}_i(0)T_2 - \dots - x_i(0)\frac{T_2^r}{r!} = \quad (4) \\ & = S_i + x_i(0)\frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} = 0 \end{aligned}$$

Так как  $x_i(0)\frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} > 0$ , из (4) следует

$S_i < 0$ , что возможно при  $T_1 < T_2$ . Таким образом, траектория (1) описывает движение с большим быстродействием по сравнению с траекторией (2).

Получив из уравнения (4) промежуточную сумму  $S_i$ , подставляем ее в (3) и имеем для условия  $\Delta E > 0$  следующее выражение

$$x_i(0)\frac{T_2^r}{(r)!} - x_i(0)\frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} > 0.$$

Далее с учетом  $T_2 > T_1$  запишем

$$x_i(0)\frac{T_2^r}{(r)!} > x_i(0)\frac{T_1^r}{(r)!},$$

а также принятия для траекторий исследуемых динамических объектов условия

$$x_i(0)\frac{T_1^r}{(r)!} > x_i(0)\frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!},$$

получаем выполнение неравенства (3).

Работа при движении динамического объекта (при отсутствии внешних возмущений) по траекториям вида (1) и (2), определяемая изменением кинетической энергии, соответственно  $\Delta E_1$  и  $\Delta E_2$ , создается управляющими и демпфирующими (аэрогидродинамического сопротивления) силами. Для оценки энергетических потерь, обусловленных силами демпфирования, введем диссипативную функцию Релея [10]

$$D(\dot{\mathbf{X}}) = \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k,$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов демпфирования.

Сравнительный анализ диссипативных функций демпфирования для траекторий (1) и (2), проведенный аналогично рассмотренному анализу общих затрат кинетической энергии, показывает выполнение условия  $D(\dot{\mathbf{X}}(T_1)) > D(\dot{\mathbf{X}}(T_2))$  для  $[\dot{x}_i(T_1) - \dot{x}_i(T_2)] > 0$ ,  $[\dot{x}_k(T_1) - \dot{x}_k(T_2)] > 0$ , что при выполнении неравенства (3) означает для первой траектории сравнительно большие затраты энергии на управляющее воздействие.

Приведенные исследования позволяют сделать обобщенный вывод относительно прямых условий оптимальности для практического построения траекторий динамического объекта при позитивных значениях производных вектора координат состояния. Траектория вида (1) для заданных граничных условий будет оптимальной по быстродействию при движении с максимально возможным количеством возможных максимальных значений производных вектора координат состояния, с учетом ограничений на управляющее воздействие:  $T = \min \rightarrow \mathbf{X}_{opt}(t) \in \mathbf{X}(t)$

для заданных  $\mathbf{X}^{(i)}(t_0); \mathbf{X}^{(i)}(T)$  при

$$\max_k \max_{\mathbf{X}(t_0)} \dot{\mathbf{X}}(t),$$

а также с учетом ограничений на управляющее воздействие

$$\mathbf{X}^{(i)}(t_0) = \mathfrak{Z}\{\mathbf{X}(t_0), \mathbf{U}_{\max}^{(i)}\}.$$

Для траектории с минимумом затраченной энергии условия оптимальности  $E = \min \rightarrow \mathbf{X}_{opt}(t) \in \mathbf{X}(t)$  для заданных значений векторов  $\mathbf{X}(t_0); \mathbf{X}(T)$  при

$$\min_k \min_{\mathbf{X}(t_0)} \dot{\mathbf{X}}(t).$$

Переключение управляющих функций обеспечивает требуемый порядок производных вектора координат состояния с соответствующим положительным или отрицательным постоянным значением. Синтез управляющих функций будет состоять в определении управляющих воздействий в цепях обратных связей объекта управления, при которых на определенных заданных отрезках траектории выполняются условия постоянства соответствующих производных вектора координат состояния  $\mathbf{X}(t)$ .

**Синтез систем переменной структуры обратных связей для оптимальной стабилизации подвижных объектов.** Запишем систему уравнений, описывающих динамику многомерного объекта управления в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{X}(t)$  – вектор координат состояния размерностью  $n \times 1$ ;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – матрицы коэффициентов  $n \times n$ ;  $\mathbf{U}(t)$  – вектор управляющих функций  $n \times 1$ .

Для класса подвижных объектов можно считать, что компоненты вектора  $\mathbf{X}(t)$  непрерывны и дифференцированы  $(n-1)$  раз, а компоненты вектора  $\mathbf{U}(t)$  – кусочно-непрерывны и кусочно-дифференцированы (возможны разрывы в точках переключения).

После дифференцирования уравнения (5) и применения преобразования Лапласа при второй нулевой производной координаты состояния запишем для вектора управляющих функций с учетом начального значения  $\mathbf{U}_0$  и векторно-матричных преобразований [7]

$$\mathbf{U}(p) = -\mathbf{B}^{-1}(p\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{A}^2\mathbf{X}(p) - \mathbf{B}\mathbf{U}_0], \quad (6)$$

где  $p$  – комплексная переменная преобразования Лапласа;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;

$\mathbf{U}_0$  – вектор начальных значений управляющей функции.

Для третьей нулевой производной с учетом начального значения  $\mathbf{U}_0$ , получим выражение вектора управляющих функций

$$\mathbf{U}(p) = -\mathbf{B}^{-1}(p^2\mathbf{E} + p\mathbf{A} + \mathbf{A}^2)^{-1}[\mathbf{A}^3\mathbf{X}(p) - (p\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{U}_0 - \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_0]. \quad (7)$$

Для общего случая нулевой производной вектора фазовых координат  $k$ -го порядка в результате соответствующих векторно-матричных преобразований вектор управляющих функций

$$\mathbf{U}(p) = -\mathbf{B}^{-1}(p^{k-1}\mathbf{E} + \mathbf{A}_k)^{-1} \times [\mathbf{A}^k\mathbf{X}(p) - \mathbf{U}_0(p)], \quad (8)$$

где матрица  $\mathbf{A}_k = \sum_{j=0}^{k-2} p^j \mathbf{A}^{k-j-1}$ ;  $\mathbf{U}_0(p)$  –

начальный вектор управляющей функции.

Необходимые начальные значения управляющих функций для обеспечения движения динамического объекта с заданными начальными условиями получим из следующих соотношений:

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{X}(0) - \mathbf{A}\mathbf{X}(0)], \quad (9)$$

$$\mathbf{U}^{(k-1)}(0) = \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{X}^{(k)}(0) - \mathbf{A} \mathbf{X}^{(k-1)}(0)].$$

Необходимо отметить для выражений (6-8), что с учетом существования обратной матрицы  $(p^{k-1}\mathbf{E} + \mathbf{A}_k)^{-1}$  возникает требование к существованию обратной матрицы  $\mathbf{B}$  для корректного применения систем с переменной структурой обратных связей к синтезу управляющих функций для линеаризованных многомерных систем, описывающих динамику динамического объекта.

Таким образом, реализация управляющих функций вида (6-8) позволяет обеспечивать движение объекта вида (5) по отрезкам траектории вида (1,2) с нулевыми значениями соответствующих производных вектора координат состояния.

**Моделирование процесса стабилизации.** Рассмотрим моделирование стабилизации угла курса судна, управляемого пером руля (без учета динамики рулевого привода) и описываемого «укороченными» уравнениями в форме Номото [7]

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= a\omega(t) + b\alpha(t) + f(t); \\ \dot{\psi}(t) &= \omega(t), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\alpha$  – угол перекадки руля;  $f$  – приведенная сила внешнего возмущения;  $\psi$  – угол курса;  $\omega$  – угловая скорость;  $a = -0.0592$ ;  $b = 0.00505$  – приведенные коэффициенты модели судна.

На рис.1 изображена структурная схема системы стабилизации судна (10) с переменной структурой обратных связей при движении по отрезкам оптимальных траекторий вида (1,2) с управляющими функциям, полученными на основе уравнений (6-8). Первый ключ **K1** переключает соответствующие каналы управления, второй **K2** – начальные

значения управляющих функции вида (9) в моменты переключения  $t_{ki}$ ,  $t_{kj}$ , определяемые путем решения системы алгебраических уравнений отрезков траектории стабилизации судна на заданном курсе.

Воздействие морского волнения на судно задавалось с помощью формирующего фильтра [6] для высоты волны  $h_{3\%} = 2$  м, на вход которого поступает гауссов белый шум единичной интенсивности, и соответствующего редуционного коэффициента, рассчитанного для частоты максимума спектра волнения.

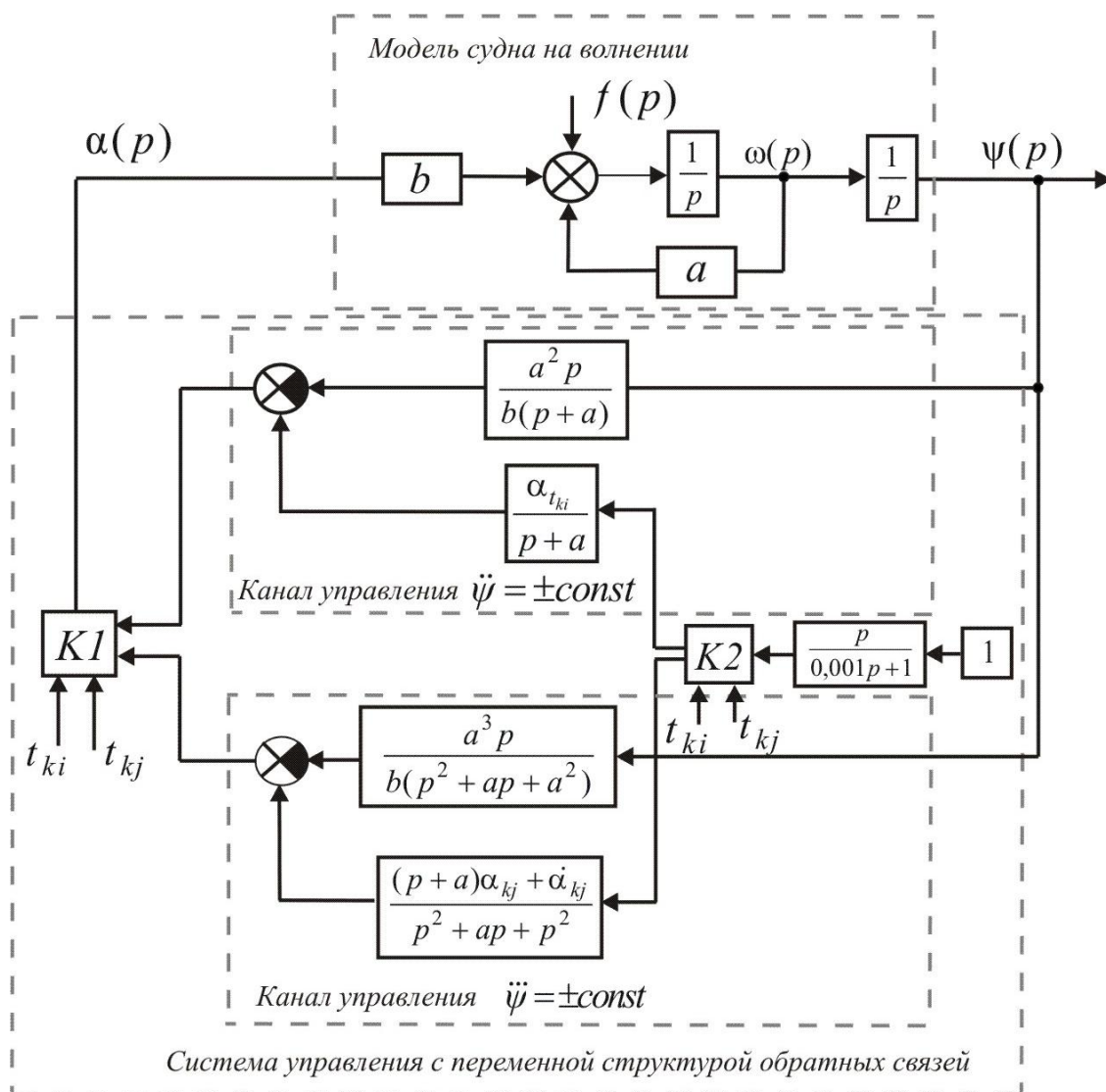


Рис.1. Структурная схема моделирования системы стабилизации судна на заданном курсе

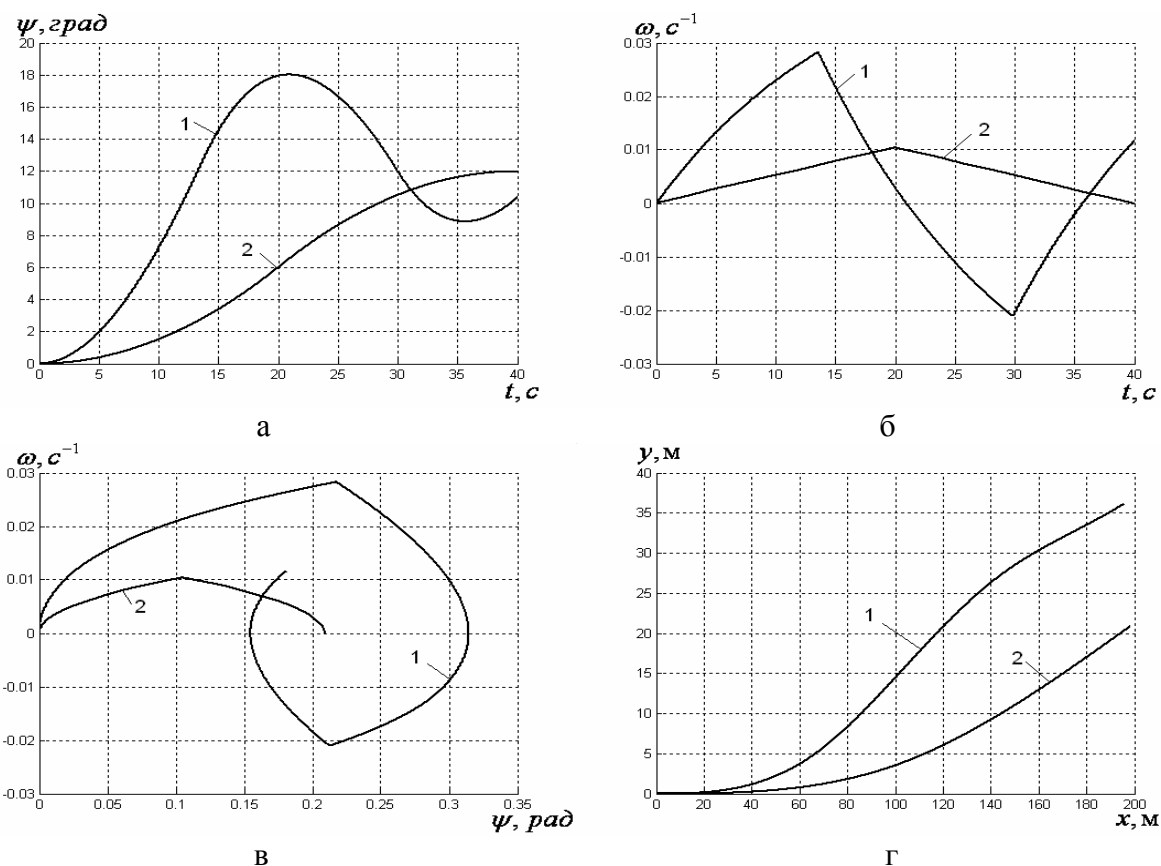


Рис.2. Зависимости угла курса (а), угловой скорости (б), а также фазовая траектория (в) и траектория судна в неподвижной системе координат (г) при стабилизации относительно угла курса  $12^\circ$  с ограничением на угол перекладки руля ( $|\alpha_{\max}|=35^\circ=0,61\text{рад.}$ ): оптимизированным ПИД-регулятором (кривые 1); системой с переменной структурой обратных связей (кривые 2)

Результаты моделирования процессов стабилизации судна на заданном курсе с помощью традиционного ПИД-регулятора и системы с переменной структурой обратных связей (рис.2,3) демонстрируют, что с помощью последней системы достигается заданное состояние за время переходного процесса  $T = 40$  с со значительно меньшими затратами энергии  $E$ : 0,65 против 14,9 (в приведенных единицах). При этом ПИД-регулятор не позволяет достичь заданного состояния объекта управления за требуемое время с необходимой точностью: ошибка по углу курса составляет 12,7% (рис.2.а).

Представленные на рис.3 изменения управляющих воздействий показывают для системы с переменной структурой отсутствие максимальных значений перекладок руля, что положительно влияет на работоспособность рулевого устройства[7].

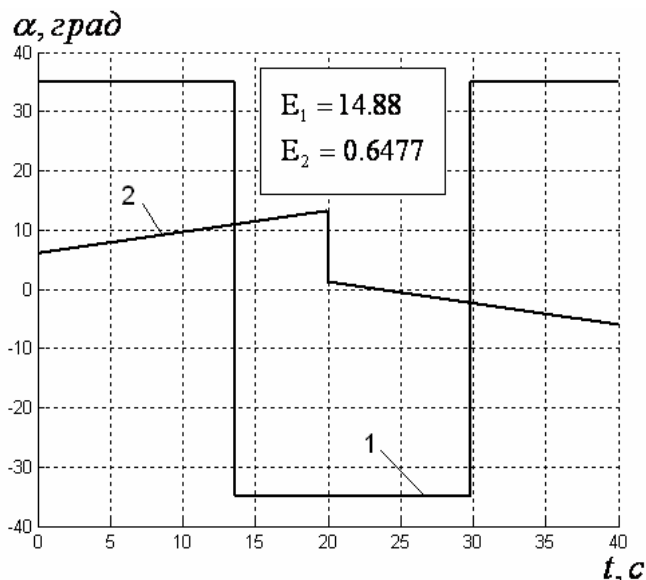


Рис.3. Зависимости угла перекладки руля судна для оптимизированного ПИД-регулятора (кривая 1) и системы с переменной структурой обратных связей (кривая 2)

**Выводы.** В статье определены прямые условия оптимальности движения многомерных объектов управления при требованиях минимума расхода энергии или максимального быстродействия переходного процесса. Процедура синтеза управляющих функций для многомерных динамических систем, сформированная на основе систем с переменной структурой обратных связей, позволяет решать задачи оптимизации процессов стабилизации для прямых условий оптимальности. Приведенные примеры моделирования процесса стабилизации судна на заданном курсе демонстрируют эффективность предложенного подхода по расходу энергии и ошибке управления при сравнительном анализе с традиционными управляющими устройствами.

#### Список использованной литературы

1. Габасов Р. Реализация ограниченной обратной связи в нелинейной задаче регулирования / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №1 – С. 108-116.
2. Емельянов С.В. Новые типы обратной связи / С.В. Емельянов, С.К. Коровин // – М.: Наука. Физматлит., 1997. – 352 с.
3. Крутько, П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления / П.Д. Крутько // – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.
4. Кунцевич В.М. Синтез робастно-оптимальных систем управления нестационарными объектами при ограниченных возмущениях / В.М. Кунцевич // Проблемы управления и информатики. – К.: 2004. – №2. – С.19-31.
5. Ларин В.Б. Об обращении проблемы аналитического конструирования регуляторов / В.Б. Ларин // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 1. – С. 17-25.
6. Лукомский Ю.А. Системы управления морскими подвижными объектами / Ю.А. Лукомский, В.С. Чугунов – Л.: Судостроение, 1988. – 272 с.
7. Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения / Г. В. Соболев // – Л.: Судостроение, 1976. — 478 с.
8. Тимченко В.Л. Синтез управляющих функций на основе структурно-переключаемых обратных связей при управлении многомерным объектом / В. Л. Тимченко // Труды Одесск. политехнич. ун-та. – Вып. 2(24). – 2005. – Одесса: – С.155-160.
9. Тимченко В.Л. Формирование динамических принципов управления подвижным объектом на основе метода структурно-переключаемых обратных связей / В.Л. Тимченко // Науково-техніч. журнал «Автоматика. Автоматизація. Електротехн. комплекси та системи». – 2009. – № 2(24). – С. 168-174.
10. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Ф. Чаки // – М.: Мир., 1975. – 425 с.
11. Horowitz, I.M. Survey of quantitative feedback theory (QFT) / I.M. Horowitz // Int. Journal of Robust and Non-Linear Control. – 2001. – Vol.11. – № 10. – P.887-921.

Получено 10.02.2011



Тимченко  
Виктор Леонидович,  
Нац. ун-т кораблестр.  
им. адм. Макарова,  
канд. техн. наук, доцент.  
Украина, 54025 Николаев,  
пр. Героев Сталинграда, 9  
Телефон (066) 734-52-45  
E-mail vl\_timchenko@mail.ru



Кондратенко  
Юрий Пантелеевич,  
Черноморск. гос. ун-т  
им. П. Могилы,  
д-р техн. наук, профессор  
Украина, 54003 Николаев,  
ул. 68-ми десантников, 10  
Телефон (0512) 46-40-74  
E-mail  
y-kondrat2002@yahoo.com