УДК 62-83

В.Т. Долбня, д-р техн. наук

Украина
Харьков

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ГУРВИЦА ДЛЯ ПРОВЕРКИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Указываются отличия между критерием устойчивости Гурвица и критерием Рауса и обосновываются существенные преимущества последнего по условиям достоверности результатов и трудоемкости для исследователя.

Вказаноно на відмінності між критерієм стійкості Гурвіца та критерієм Рауса та обґрунтовуються істотні переваги останнього за умовами достовірності результатів та трудомісткості для дослідника.

The differences between the Hurwitz stability criterion and the Routh criterion are shown in the paper and the essential advantage of the latter in terms of reliability and laboriousness is grounded.

Помимо частотных критериев (Найквиста, Михайлова и др.) в технической литературе широко популяризируется алгебраический критерий, установленный Гурвицем в 1895 г. Этот критерий используется как в специальной, так и в учебной литературе [1-5]. Иногда его называют «критерием Рауса-Гурвица» на том основании, что за 18 лет до Гурвица (в 1877 г.) он был предложен Раусом, но в несколько иной форме, хотя за основу, как затем и Гурвицем, были взяты коэффициенты характеристического полинома системы. А в [5] вообще сказано, что методы Рауса и Гурвица – это один и тот же метод.

Общее, однако, у них лишь то, что оба они исходят из коэффициентов характеристического полинома, но действия с этими коэффициентами выполняются совершенно по-разному.

Цель настоящего сообщения – показать, что критерий Гурвица намного уступает критерию Рауса как по трудоемкости его применения, так и по полноте сведений, полученных с его помощью о системе авторегулирования.

Допустим, что исследуемая система имеет характеристический полином

$$F(p) = p^6 + 21p^5 + 175p^4 + 735p^3 + 1624p^2 + 1764p + 720 \tag{1}$$

По Гурвицу, из коэффициентов этого полинома составляется определитель

$$\begin{vmatrix} 21 & 735 & 1764 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 175 & 1624 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 735 & 1764 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 175 & 1624 & 720 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 735 & 1764 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 175 & 1624 & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Необходимо найти значения всех миноров, начиная с верхнего левого угла и заканчивая значением определителя. Если все они имеют одинаковый знак, то система устойчива – все корни полинома располагаются в левой полуплоскости. В частности, если первый элемент первой строки положителен, то должны быть положительными и все остальные миноры.

Сразу видно, что нахождение всех миноров – трудоемкая вычислительная задача. Ее можно, правда, чуть-чуть упростить, вынося за знак определителя общий положительный множитель из каких-либо строки или столбца. Выносимые числа можно далее не учитывать, так как нас интересуют только знаки миноров. Подготовленный таким образом определитель примет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 35 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 175 & 1624 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 84 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 175 & 1624 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 35 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 175 & 406 & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Найдем все его миноры.

$M1 = 1 > 0$; $M2 = 175 - 35 = 140 > 0$;

$$M3 = \begin{vmatrix} 1 & 35 & 84 \\ 1 & 175 & 1624 \\ 0 & 1 & 35 \end{vmatrix} = 24 > 0;$$

$$M4 = \begin{vmatrix} 1 & 35 & 84 & 0 \\ 1 & 175 & 1624 & 720 \\ 0 & 1 & 35 & 84 \\ 0 & 1 & 175 & 1624 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 35 & 84 & 0 \\ 1 & 140 & 1540 & 720 \\ 0 & 1 & 35 & 84 \\ 0 & 0 & 140 & 1540 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 11 & 36 \\ 1 & 5 & 84 \\ 0 & 1 & 77 \end{vmatrix} = 1296 > 0;$$

$$M5 = \begin{vmatrix} 1 & 35 & 84 & 0 & 0 \\ 1 & 175 & 1624 & 720 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 84 & 0 \\ 0 & 1 & 175 & 1624 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 35 & 21 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 35 & 84 & 0 & 0 \\ 1 & 140 & 1540 & 720 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 1540 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 35 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 77 & 36 & 0 \\ 1 & 35 & 84 & 0 \\ 0 & 7 & 77 & 3 \\ 0 & 1 & 35 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -168 & -552 & 0 \\ 1 & 35 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & -168 & -46 \\ 0 & 1 & 35 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 168 & 552 & 0 \\ 0 & 168 & 46 \\ 1 & 35 & 7 \end{vmatrix} = 47520 > 0.$$

Последний минор $M6$ (он же определитель Δ) равен предыдущему минору $M5$, что видно из (3).

Бросается в глаза обилие вычислительной работы, что отмечается многими авторами [2].

В соответствии с критерием Рауса определитель Гурвица (2) не составляется, его заменяет таблица, составляемая по следующему правилу:

Пусть дан характеристический полином:

$$f(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n .$$

Составленная по Раусу таблица имеет вид:

$$\begin{array}{c|cccc} p^n & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ p^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ p^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}.$$

В первом ее столбце записываются операторы от p^n до p^0. Это фактически нумерация строк. Первая строка состоит из коэффициентов полинома, записанных через один, начиная с a_0, а вторая – из оставшихся. Элементы третьей строки находятся по формулам:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad (5)$$

и т.д.

Последующие строки (c_1, c_2... d_1, d_2… и т.д.) составляются по этому же правилу, исходя из двух предыдущих строк.

Элементы строк можно умножать или делить на любое положительное число. Таблица закончится (n+1)-й строкой при p^0, которая будет иметь лишь один первый элемент.

После составления таблицы рассматривают второй ее столбец с элементами a_0, a_1, b_1 и т.д. Если все его элементы положительны, у полинома нет корней, расположенных в правой полуплоскости. Если попадаются отрицательные элементы, то исследуемый полином имеет *столько корней в правой полуплоскости, сколько знакоперемен имеется во втором столбце*. Это первое преимущество критерия Рауса. Из определителя Гурвица получить такие сведения невозможно.

Составим таблицу Рауса применительно к уже рассмотренному полиному (1).

$$\begin{array}{c|llll} p^6 & 1 & 175 & 1624 & 720 \\ p^5 & 1 & 35 & 84 & \\ p^4 & 1 & 11 & 5.14 & \\ p^3 & 1 & 3.29 & & \\ p^2 & 1 & 0.67 & & \\ p^1 & 1 & & & \\ p^0 & 1 & & & \end{array}.$$

Первые две строки составлены из коэффициентов полинома, при этом вторая сокращена на 21. Третью строку находим по формулам (5):

$$b_1 = \frac{1 \cdot 175 - 1 \cdot 35}{1} = 140 ; \; b_2 = \frac{1624 - 84}{1} = 1540 ;$$

$$b_3 = \frac{720 - 0}{1} = 720 .$$

Разделив эти элементы на 140, получим третью строку: 1; 11; 5,14. Таким же образом находим и элементы четвертой строки:

$$c_1 = \frac{35 - 11}{1} = 24 ; \; c_1 = \frac{84 - 5{,}14}{1} = 78{,}86$$

или после сокращения на 24: 1 и 3,29.

Элементы пятой строки равны (11-3,29)=7,71 и 5,14 или 1 и 0,67. У шестой строки будет только один элемент (3,29-0,67)=2,62 или 1, а у седьмой тоже один элемент: 0,67 или 1.

Во втором столбце знак «минус» отсутствует, следовательно, у полинома (1) нет корней с положительной вещественной частью.

Если сравнить проделанную только что вычислительную работу с той, которую пришлось проделать, пользуясь определителем Гурвица, то впечатляет огромное преимущество критерия Рауса. Странно, что он практически не применяется в отечественной литературе.

Критерий Рауса позволяет получить еще некоторую информацию об исследуемом полиноме. Если, например, при составлении таблицы появилась строка, состоящая из одних только нулей, то это означает, что исследуемый полином имеет корни, *симметричные относительно начала координат комплексной плоскости* [5]. Это могут быть как вещественные, так и комплексные корни. Если при этом нет корней справа (нет знакоперемен во втором столбце таблицы), то эти симметричные корни будут мнимыми. Если нулевых строк будет две или три, то такие симметричные корни будут соответственно двух- или трехкратными.

Поскольку появление первой же нулевой строки не позволяет продолжить составление таблицы, нужно заменить эту строку ненулевой. Делается это следующим образом [5].

Строку, расположенную непосредственно над нулевой, используем для составления соответствующего ей полинома. Старшая степень оператора p этого полинома приведена в первом столбце этой строки, а коэффициентами являются элементы строки. Как и в первых двух строках, степень оператора снижается через одну. Когда полином для этой строки составлен, находят его первую производную. Коэффициентами полученного нового полинома и заменяют нулевые элементы последующей строки. Далее составление таблицы продолжается по уже установленным правилам.

Проанализируем теперь при помощи определителя Гурвица следующее характеристическое уравнение

$$f(p) = p^6 + 4p^5 + 9p^4 + 24p^3 + 43p^2 + 100p + 75. \quad (6)$$

Составленный определитель предварительно упростим, вынося общие множители из 1-й, 3-й и 5-й строк и из последнего столбца:

$$\begin{vmatrix}4&24&100&0&0&0\\1&9&43&75&0&0\\0&4&24&100&0&0\\0&1&9&43&75&0\\0&0&4&24&100&0\\0&0&1&9&43&75\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&25&0&0&0\\1&9&43&75&0&0\\0&1&6&25&0&0\\0&1&9&43&75&0\\0&0&1&6&25&0\\0&0&1&9&43&1\end{vmatrix},$$

после чего найдем все его миноры:

$$M1 = 1 > 0;\ M2 = 9 - 6 > 0;$$

$$M3=\begin{vmatrix}1&6&25\\1&9&43\\0&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&25\\0&3&18\\0&1&6\end{vmatrix}=18-18=0\,;$$

$$M4=\begin{vmatrix}1&6&25&0\\1&9&43&75\\0&1&6&25\\0&1&9&43\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&25&0\\0&3&18&75\\0&1&6&25\\0&0&3&18\end{vmatrix}=0$$

(2-я и 3-я строки пропорциональны).

$$M5=\begin{vmatrix}1&6&25&0&0\\1&9&43&75&0\\0&1&6&25&0\\0&1&9&43&75\\0&0&1&6&25\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&25&0&0\\0&3&18&75&0\\0&1&6&25&0\\0&0&3&18&75\\0&0&1&6&25\end{vmatrix}=0$$

(2-я и 3-я строки пропорциональны).

Рассмотрим еще один полином:

$$f(p) = 2p^4 + 4p^3 + 3p^2 + 1. \qquad (7)$$

Определитель Гурвица и его миноры:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&2&0&0\\2&3&1&0\\0&4&2&0\\0&2&3&1\end{vmatrix};\ \begin{matrix}M1=4;\\M2=8;\end{matrix}\quad M3=\begin{vmatrix}4&2&0\\2&3&1\\0&4&2\end{vmatrix}=$$

$$= 24 - 16 - 8 = 0\ ;\ M4=M3=0.$$

Автор предлагал многим, в том числе кандидатам и докторам наук, высказать свое мнение о полиномах (6) и (7), руководствуясь определителями Гурвица. Все сходились на одном: корней в правой полуплоскости у этих полиномов нет, так как нет отрицательных миноров. Нулевые же миноры говорят о наличии мнимых корней. Никто не обратил внимания на приведенное в [3] мелким шрифтом замечание, что при отрицательных минорах требуется какое-то дополнительное исследование. Мои коллеги были искренне удивлены тем обстоятельством, что если у полинома (7) в самом деле правых корней нет, но есть мнимые, то у полинома (6) с аналогичной ситуацией с минорами нет именно мнимых корней, зато имеются два корня с положительной вещественной частью: $1+j2$ и $1-j2$. Определитель Гурвица и в этом случае дает сбой. А что же критерий Рауса?

$$\begin{array}{c|llll}p^6&1&9&43&75\\p^5&1&6&25&\\p^4&1&6&25&\\p^3&1&3&&\\p^2&3&25&&\\p^1&-16&&&\\p^0&25&&&\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c|lll}p^4&2&3&1\\p^3&2&1&\\p^2&2&1&\\p^1&1&&\\p^0&1&&\end{array}\ . \qquad (8)$$

У полинома (6) составление таблицы, где вторая строка сокращена на 4, а третья после сокращения на 3 полностью повторяет вторую, наталкивается на появление четвертой нулевой строки. Возвращаемся к третьей, восстанавливаем соответствующий ей полином p^4+6p^2+25 и находим его производную $4p^3+12p$. Ее коэффициентами, сокращенными на 4, заменяем нули четвертой строки и заканчиваем составление таблицы, которая приведена в (8) слева. Во втором ее столбце две знакоперемены, значит у полинома есть два корня справа. Действительно – корни: $p_1=1+j2$; $p_2=1-j2$; $p_3=-1+j2$; $p_4=-1-j2$; $p_5=-1$; $p_6=-3$. Нулевая строка свидетельствует о наличии симметричных корней. Такими являются корни p_1, p_4 и p_2, p_3.

Для полинома (7) в таблице Рауса (см. (8) справа) также четвертая строка окажется нулевой. Производная полинома $2p^2 + 1$ для третьей строки равна 4 или 1. В последней строке также будет 1.

В этой таблице все элементы второго столбца положительны, корней справа нет, а симметричные корни, на наличие которых указывает нулевая строка, будут мнимыми.

Действительно, корни этого полинома

$$p_1 = p_2 = -1\,;\ p_{3,4} = \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Как видим, определитель Гурвица не выдерживает никакого сравнения с критерием Рауса как по трудоемкости его применения, так и по достоверности получаемых сведений о полиноме.

Список использованной литературы

1. Автоматизация производства и промышленная электроника – М.: Советская энциклопедия, 1962, т.1. – 524 с.

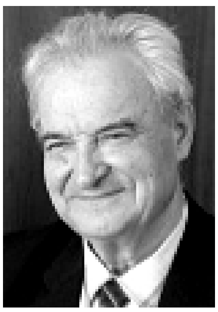
2. Власов К.П. Теория автоматического управления / К.П. Власов – Харьков: Гуманитарный центр, 2007. – 525 с.

3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления / А.А. Воронов – М.-Л.: Энергия, 1965, ч.1. – 423 с.

4. Корн Г. Справочник по математике / Г.Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

5. Пиан Луи де. Теория линейных активных цепей / Пиан Луи де – М.-Л.: Энергия, 1967. – 536 с.

Получено 19.07.2011



Долбня Виктор Тимофеевич,
д-р техн. наук, проф. каф. «Автоматизированные электромеханические системы» НТУ «ХПИ».
тел. 70-76-445